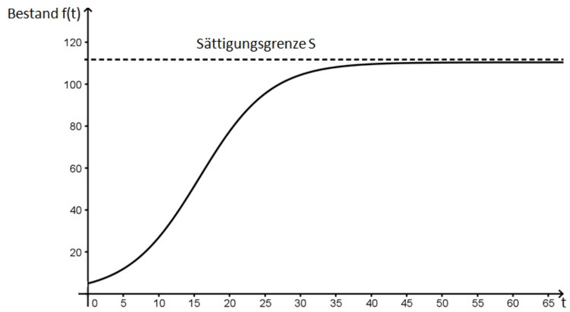
Aus einem Mathematikwiki:

Logistisches Wachstum

Beim sog. „logistischen Wachstum“ wächst der momentane Bestand *f(t)* anfangs nahezu exponentiell mit der Zeit *t* an, dann verlangsamt sich das Wachstum und kommt nach einer gewissen Zeit praktisch zum Erliegen.



Die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ ist direkt proportional zum Produkt aus momentanem Bestand *f(t)* und dessen Differenz zur Sättigungsgrenze S ($S > 0$). Für die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ des logistischen Wachstums gilt daher folgende Gleichung:

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [S - f(t)] \text{ mit einer Konstanten } k > 0.$$

Diese Gleichung wird von Funktionen f mit einem Term der Form

$f(t) = \dfrac{S}{1 + b \cdot e^{-ct}}$ ($b > 0$ und $c > 0$) erfüllt.

Derartige Funktionen beschreiben logistische Wachstumsvorgänge.

Im Folgenden sollen die wesentlichen Eigenschaften der im Mathematikwiki genannten Funktion f mit $f(t) = \dfrac{S}{1 + b \cdot e^{-ct}}$ untersucht werden. Für deren Ableitung $f'(t)$ gilt

$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [S - f(t)]$ mit $k = \dfrac{c}{S}$.

a) Begründen Sie, dass der Bestand $f(t)$ stets positiv ist.

b) Begründen Sie, dass der Bestand $f(t)$ stets unterhalb der Sättigungsgrenze S liegt.

c) Zeigen Sie, dass sich der Bestand $f(t)$ der Sättigungsgrenze S asymptotisch nähert.

d) Weisen Sie nach, dass sich die momentane Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ in der Form $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [S - f(t)]$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ schreiben lässt.

e) Begründen Sie, dass der Bestand $f(t)$ mit der Zeit zunimmt.

f) Bestimmen Sie das Verhalten der momentanen Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ für $t \to \infty$.