a) $t: y = m \cdot x + n$ mit $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ und $P\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{4}\right)$

$t: y = x - \frac{1}{4}$

Nullstelle der Tangente: $x = \frac{1}{4}$

Funktionswert der Tangente an der Stelle 1: $y = \frac{3}{4}$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$

Der gesuchte Inhalt ist $A = \frac{9}{32} FE$.

b) $t: y = m \cdot x + n$ mit $m = f'(t) = 2t$ und $P(t|t^2)$

$t: y = 2t \cdot x - t^2$

Nullstelle der Tangente: $x = \frac{t}{2}$

Funktionswert der Tangente an der Stelle 1: $y = 2t - t^2$

Flächeninhalt des Dreiecks (Zielfunktion): $A_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot \left(2t - t^2\right) = \frac{t^3}{4} - t^2 + t$

Nachweis der Extremstelle: $A_2'(t) = \frac{3}{4} t^2 - 2t + 1$; $A_2'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$; $A_2''(t) = \frac{3}{2} t - 2$; $A_2''\left(\frac{2}{3}\right) = -1 < 0$.

Also wird A_2 für $t = \frac{2}{3}$ maximal.

c) $A_3'(t) = \frac{8}{3} t^3 - 6t^2 + 3t = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{3}{4} \vee t = \frac{3}{2}$

$A_3''(t) = 8t^2 - 12t + 3$; $A_3''\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2} < 0$

Also hat A_3 bei $t = \frac{3}{4}$ ein Maximum.

d) Vermutung: $t = \dfrac{n}{n+1}$

Bestätigung:

fn(x):=x^n $\rightarrow$ fn(x) := x^n
fn'(x) $\rightarrow n\ x^{n-1}$
gn(x):=fn*(t)*x+fn(t)–fn'(t)*t $\rightarrow$ gn(x) := $n\ t^{n-1}\ x - n\ t^n + t^n$
Löse[gn(x) = 0] $\rightarrow \left\{x = \dfrac{n\ t^n - t^n}{n\ t^{n-1}}\right\}$
Vereinfache[1/2(1–(n t^n–t^n)/(n t^(n–1)))gn(1)] $\rightarrow \dfrac{n^2\ t^2\ t^n - 2\,n^2\ t\ t^n + n^2\ t^n - 2\,n\,t^2\ t^n + 2\,n\,t\ t^n + t^2\ t^n}{2\,n\,t}$
An(t):=(n^2 t^2 t^n–2n^2 t t^n+n^2 t^n–2n t^2 t^n+2n t t^n+t^2 t^n)/(2n t) $\rightarrow$ An(t):=$\dfrac{n^2\ t^{2+n} - 2\,n^2\ t^{2+n} - 2\,n\,t^{2+n} + n^2\ t^n + 2\,n\,t^{1+n} + t^{2+n}}{2\,n\,t}$
Löse[An'(t)=0,t] $\rightarrow \left\{t = \dfrac{n}{n+1}, t = \dfrac{n}{n-1}\right\}$