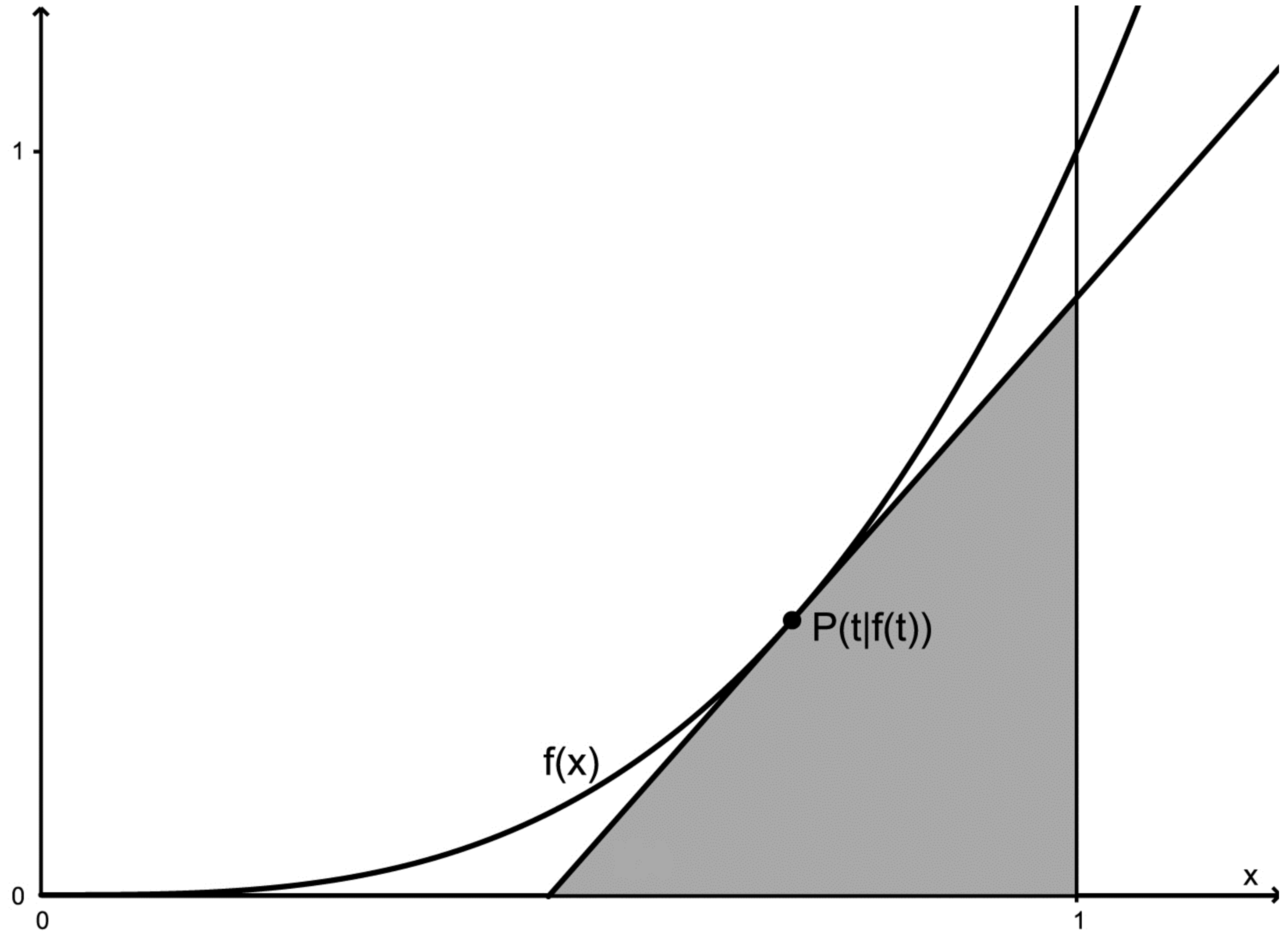
Gegeben ist die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Im Punkt $P(t|f(t))$ mit $0 \leq t \leq 1$ wird die Tangente an den Funktionsgraphen von f gelegt. Diese begrenzt mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche (s. Abbildung).



a) Es sei $n = 2$. Bestimmen Sie den Inhalt der beschriebenen Fläche für $t = \frac{1}{2}$.

b) Es sei $n = 2$. Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion A_2, die jedem $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ den Flächeninhalt des dargestellten Dreiecks zuordnet.

Zeigen Sie, dass A_2 für $t = \frac{2}{3}$ maximal wird.

c) Für $n = 3$ gibt die Funktion A_3 mit $A_3(t) = \frac{2}{3}t^4 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^2$ den Inhalt der beschriebenen Fläche in Abhängigkeit von t an. Bestimmen Sie denjenigen Wert von t, für den A_3 ein Extremum annimmt, sowie die Art des Extremums von A_3.

d) Für jeden Wert von n gibt es einen Wert von t mit $0 < t < 1$, für den der Inhalt der beschriebenen Fläche maximal ist. Stellen Sie auf der Grundlage der Ergebnisse der Aufgaben b) und c) eine Vermutung dazu an, wie sich dieser Wert von t aus dem Wert von n berechnen lässt. Bestätigen Sie Ihre Vermutung mithilfe eines CAS.