

Der Schienenverlauf des Mega-coasters (Achterbahn) Blue Fire im Europapark Rust wurde durch Aneinanderfügen von Funktionen dritten Grades, sogenannten Splinefunktionen, konstruiert. Dabei muss jede Anschlussstelle der Kurvenstücke den folgenden Bedingungen genügen:



(I) An den Anschlussstellen müssen die benachbarten Kurvenstücke ohne Unterbrechung aneinander anschließen.

(II) In den Anschlussstellen darf der Schienenverlauf keinen „Knick“ haben, d. h. die Steigungen der Graphen der jeweiligen Splinefunktionen müssen in jeder Anschlussstelle übereinstimmen.

(III) Damit auftretende Kräfte sich nicht abrupt ändern, muss außerdem die Krümmung in den Anschlussstellen übereinstimmen. Dies erreicht man durch die Gleichheit der Werte der 2. Ableitungen der Funktionen in der jeweiligen Anschlussstelle.

Im Folgenden soll ein Ausschnitt des Schienenverlaufs mit Funktionen des Typs

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ) modelliert werden.

Das erste Teilstück des Schienenverlaufs, der sogenannte „Anstieg“, liegt im Bereich  $0 \leq x \leq 72,7$ . Das anschließende zweite Teilstück im Bereich  $72,7 \leq x \leq 100$  ist ein Teil des „Abstiegs“.

Die beiden Teilstücke werden näherungsweise durch zwei Funktionen  $f_1$  bzw.  $f_2$  des oben genannten Typs beschrieben. Die zugehörigen Graphen bilden die entsprechenden Kurvenstücke der Bahn ab. 1 LE entspricht 1 m.

**a)** Für das erste Teilstück sollen die folgenden Vorgaben umgesetzt werden:

Am Ausgangspunkt der Bahn steht ein Waggon waagrecht in einer Höhe von 1,7 m. Von da aus wird der Waggon auf den höchsten Punkt des Schienenverlaufs in 38 m Höhe katapultiert, den er in horizontaler Richtung nach 72,7 m erreicht.

Formulieren Sie diese Vorgaben als Eigenschaften der Funktion  $f_1$ .

**b)** Bestätigen Sie, dass die Funktion  $f_1$  mit

$$f_1(x) = -1,8894412306261 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0,020604356619977 \cdot x^2 + 1,7$$

die Vorgaben für das erste Kurvenstück aus Teilaufgabe a) erfüllt.

**c)** Formulieren Sie die drei Bedingungen (I) bis (III) als Gleichungen für die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  in der Anschlussstelle  $x_0 = 72,7$ .

**d)** Für das zweite Kurvenstück im Bereich  $72,7 \leq x \leq 100$  wird zusätzlich folgender Wert vorgegeben:  $f_2(100) = 25$ .

Bestimmen Sie damit und mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe c) den Funktionsterm  $f_2(x)$  des zweiten Kurvenstücks.

**e)** Zeichnen Sie das aus den Teilstücken zusammengesetzte Kurvenstück.