Werner Blum
Sebastian Vogel
Christina Drüke-Noe
Alexander Roppelt (Hrsg.)

Bildungsstandards aktuell:

Mathematik

in der Sekundarstufe II

Die Herausgeber dieses Bandes

Werner Blum war nach seinem Mathematik-Studium von 1969 bis 1972 wissenschaftlicher Assistent an der Universität Karlsruhe und promovierte dort 1970 in Mathematik. Von 1972 bis 1975 war er Dozent für Mathematik und dann bis 2013 Professor für Mathematik-Didaktik an der Universität Kassel. 2006 bekam er den Archimedes-Preis der MNU. Seine Arbeits- und Forschungsschwerpunkte umfassen empirische Untersuchungen zum Mathematikunterricht und zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften, nationale und internationale Vergleichsstudien zum Mathematikunterricht (u.a. PISA), unterrichtliche Qualitätsentwicklung (u.a. Mitarbeit bei den Bildungsstandards Mathematik), Modellbildung im Mathematikunterricht sowie Analysen und Unterrichtsvorschläge zur Analysis und zum Beweisen.

Sebastian Vogel war nach dem Studium des gymnasialen Lehramts mit den Fächern Mathematik, Biologie und Musik von 2011 bis 2014 wiss. Mitarbeiter bei Prof. Blum in der Mathematikdidaktik an der Universität Kassel mit den Arbeitsschwerpunkten Bildungsstandards und Vergleichsarbeiten. Er wirkte dabei auch bei Lehrerfortbildungsprojekten zu den Vergleichsarbeiten mit und leitete mehrere diesbezügliche Fortbildungsveranstaltungen. Seit 2013 arbeitet Sebastian Vogel ebenfalls in der Erziehungswissenschaft an der Universität Kassel in der Arbeitsgruppe von Prof. Lipowsky. Neben seiner Promotion zur Nutzung und Wahrnehmung der Lernstandserhebungen in Klasse 8 studiert er den Masterstudiengang „Empirische Bildungsforschung“.

Christina Drüke-Noe unterrichtete von 1997 bis 2009 als Gymnasiallehrerin Mathematik und Englisch und leitete zuletzt das mathematisch-naturwissenschaftliche Aufgabenfeld am Gustav-Stresemann-Gymnasium in Bad Wildungen. Sie war Schulbuchautorin sowie Fachberaterin und leitete seit 2000 zahlreiche Fortbildungen, u.a. in der SINUS-Qualitätsinitiative. Von 2004 bis 2014 arbeitete sie als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Universität Kassel in der Arbeitsgruppe Bildungsstandards und leitete im Auftrag des IQB Aufgabenentwicklungsgruppen (Sek. I, Sek. II). Nach ihrer Promotion wechselte sie im Mai 2014 an die PH Weingarten, wo sie eine Juniorprofessur für Mathematik und ihre Didaktik innehat. Ihre Forschungsschwerpunkte sind: Aufgaben (in Klassenarbeiten, in zentral gestellten Abschlussprüfungen), Basiskompetenzen in Mathematik (Sek. I, Sek. II). Sie ist fachdidaktische Beraterin für die Lernstandserhebungen Mathematik in Klasse 8.

Alexander Roppelt schloss 2004 sein Studium an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg mit dem Diplom in Mathematik und dem 1. Staatsexamen in Mathematik und Physik für das Lehramt an Gymnasien ab. Seit 2005 ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe Mathematik am Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) an der Humboldt-Universität zu Berlin. Dort wirkt er u. a. bei VERA 8 und den IQB-Ländervergleichen mit. In seiner Dissertation thematisiert er die Nachhaltigkeit schulischer Mathematikkompetenzen und untersucht, wie sich diese während eines Studiums verändern. Weitere Forschungsschwerpunkte sind das Zusammenspiel von Sprache und Mathematik sowie methodische Aspekte des Large-Scale-Assessments.

Werner Blum
Sebastian Vogel
Christina Drüke-Noe
Alexander Roppelt (Hrsg.)

Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II

IQB
Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Diesterweg
Schroedel
westermann

Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig
www.schroedel.de

Druck A[1] / Jahr 2015
Alle Drucke der Serie A sind im Unterricht parallel verwendbar.

Umschlaggestaltung, und Layout: thom bahr GRAFIK, Mainz
Satz: Satzteam Bleifrei, Hildesheim
Zeichnungen: Birgit und Olaf Schlierf, Lachendorf; Autorinnen und Autoren
Druck und Bindung: Westermann Druck Zwickau GmbH, Zwickau

Grafiken erstellt mit freundlicher Genehmigung von GeoGebra.

http://www.geogebra.org

ISBN 978-3-507-**00181**-7

Inhalt

8. Die Kompetenz mathematisch Modellieren

Teil 2: Konzeptionelle Fragen zu den Bildungsstandards Mathematik

9. Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II

20. Digitale Werkzeuge im Analysis-Unterricht

21. Simulieren im Stochastikunterricht

Anhang: Zur Aufgabensammlung auf der CD

Grußwort

der Präsidentin der Kultusministerkonferenz

Dass uns heute gesicherte Befunde der empirischen Bildungsforschung vorliegen, verdanken wir maßgeblich der mit dem „Konstanzer Beschluss“ der Kultusministerkonferenz 1997 eingeleiteten sogenannten „empirischen Wende“. Wir müssen damit nicht länger spekulieren, worin die Stärken und Schwächen unseres Bildungssystems liegen.

Die Kultusministerkonferenz legt einen besonderen Schwerpunkt auf die Entwicklung und Einführung von bundesweit geltenden Bildungsstandards. Damit sichern wir die gewünschte Qualität im Bildungssystem auf Grundlage des auch international bewährten „Dreiklangs“ von

- mehr Eigenständigkeit für Schulen
- bei gleichzeitiger Vorgabe verbindlicher Standards
- und regelmäßiger Evaluation.

Dabei beschreiben die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz Leistungserwartungen in Form fachlicher Kompetenzanforderungen, über die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der Grundschule, der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II verfügen sollen.

In den Jahren 2003 und 2004 wurden Bildungsstandards für den Primarbereich, den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss verabschiedet. Im Oktober 2012 hat die Kultusministerkonferenz Bildungsstandards in den Fächern Deutsch, Mathematik und der fortgeführten Fremdsprache (Englisch/Französisch) für die Allgemeine Hochschulreife verabschiedet. Mit Beginn der Einführungsphase des Schuljahres 2014/2015 bilden sie die Grundlagen der fachspezifischen Anforderungen für die Allgemeine Hochschulreife und gelten für standardbasierte Abiturprüfungen ab dem Schuljahr 2016/2017. Damit sind für die zentralen Fächer einheitliche Leistungsanforderungen formuliert, die für mehr Vergleichbarkeit zwischen den Bundesländern sorgen und ein gemeinsames Leistungsniveau zu sichern helfen.

Die Bildungsstandards, wie jede andere Innovation im Bildungswesen, entfalten ihre Wirkungen aber nur dann, wenn sie Eingang in die alltägliche Praxis der Schulen finden. Ihre Umsetzung in die schulische Praxis zielt insbesondere auf eine Unterrichtsgestaltung, die den Kompetenzerwerb als die pädagogisch zu gestaltende Verbindung von Wissen und Können in den Mittelpunkt pädagogischer Prozesse stellt. In Lernprozessen muss somit der systematische Aufbau inhaltsbezogenen Wissens und die Entwicklung der Fähigkeit, dieses Wissen flexibel zu nutzen und selbstständig in neuen Kontexten anzuwenden, konsequent berücksichtigt werden. Dies ist ohne die Bereitschaft der Lehrerinnen und Lehrer, sich mit neuen fachbezogenen Anforderungen auseinanderzusetzen und den Unterricht entsprechend didaktisch und methodisch weiterzuentwickeln, nicht möglich.

Bei der Umsetzung der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife gilt es deshalb, den Lehrerinnen und Lehrern in der gymnasialen Oberstufe konkrete Hinweise an die Hand zu geben, wie ein kompetenzorientierter Unterricht auf Grundlage der Bildungsstandards in der Praxis gestaltet werden kann. Die bewährte Unterrichtskultur in den Schulen der Sekundarstufe II soll dabei nicht aufgegeben, sondern vielmehr schrittweise weiterentwickelt werden.

Eine Unterrichtsgestaltung, die im Sinne der Bildungsstandards den Erwerb von Wissen und Können miteinander verbindet und damit die Kompetenzentwicklung ermöglicht, spiegelt sich ganz wesentlich auch in guten Aufgaben. Deshalb hat die Kultusministerkonferenz das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) gebeten, zur Unterstützung des Implementationsprozesses illustrierende Lernaufgaben zu entwickeln.

Diese fachlich fundierten und praxisnahen Anregungen für den kompetenzorientierten Unterricht im Fach Mathematik in der Sekundarstufe II liegen nun mit dieser Publikation vor. Dabei werden die Grundlagen eines standardbasierten Unterrichts beschrieben und mit anschaulichen Aufgabenbeispielen illustriert. So wird auch das Potenzial der Bildungsstandards, Schülerinnen und Schüler in ihren Lernprozessen wirksam zu unterstützen, anschaulich gemacht.

Ich wünsche mir, dass diese Veröffentlichung vor allem unter den Lehrkräften und den Verantwortlichen in der Lehreraus- und -fortbildung große Verbreitung und Anwendung findet, und danke allen, die an dieser grundlegenden Veröffentlichung mitgewirkt haben.

Staatsministerin Brunhild Kurth
Präsidentin der Ständigen Konferenz der Kultusminister
der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Januar 2015

Teil 1
Erläuterungen zu den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

1. Zur Konzeption der Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

Werner Blum

Nach allgemeinen Überlegungen zur Intention und Konzeption von Bildungsstandards wird das Kompetenzstrukturmodell der Mathematik-Standards für die Allgemeine Hochschulreife im Detail vorgestellt: allgemeine Kompetenzen, inhaltliche Leitideen und kognitive Ansprüche. Es folgen allgemeine Überlegungen zu der wichtigsten Intention von Standards, nämlich der unterrichtlichen Qualitätsentwicklung. Im letzten Teil werden die Beiträge in diesem Band kurz vorgestellt, auch im Hinblick auf ihre Rolle bei der Illustration der Mathematik-Standards.

1 Bildungsstandards für die Sekundarstufe II

Nachdem bereits in 2003 und 2004 für mehrere Fächer Bildungsstandards für die Grundschule, den Hauptschulabschluss (HSA) und den Mittleren Schulabschluss (MSA) verabschiedet worden sind, hat die Kultusministerkonferenz in 2012 auch Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife beschlossen (KMK, 2012). Damit liegen für das Fach Mathematik Bildungsstandards für alle diese Schulabschlüsse vor. Bildungsstandards sind *Leistungs*standards, wobei Leistung über *Kompetenzen* definiert ist. Kompetenzen sind nach Weinert (2001, S. 27) „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie zu erlernenden kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen". Hierdurch soll nicht das im Mittelpunkt stehen, was laut Lehrplänen im Unterricht behandelt und von Schülerinnen und Schülern gelernt werden *soll,* sondern das, was Schülerinnen und Schüler tatsächlich *können.* Den Standards liegen allgemeine *Bildungsziele* zugrunde, wie die Fähigkeit des Menschen zur selbständigen Teilhabe am öffentlichen Leben und zur bewussten Gestaltung des eigenen Lebens, mit dem Leitbild des mündigen Bürgers bzw. der mündigen Bürgerin. Deshalb ist auch die Bezeichnung *Bildungs*standards gerechtfertigt, auch wenn es in erster Linie um (kompetenzorientierte) Leistungen geht. Solche Bildungsziele formulieren einerseits Erwartungen an die Entwicklung jedes einzelnen Schülers bzw. jeder einzelnen Schülerin und verpflichten andererseits die Gesellschaft und ihre Bildungseinrichtungen, geeignete Entwicklungsmöglichkeiten bereitzustellen. Bildungsstandards sollen, orientiert an dieser Verpflichtung, den Bildungsauftrag der Schulen in Form je fachspezifischer Leistungserwartungen konkretisieren, diesen Auftrag überprüfbar machen und Lehrkräften damit ein Referenzsystem für ihr professionelles Handeln geben (vgl. Klieme et al., 2003). Insofern sind die zentralen *Intentionen* von Bildungsstandards

- *Orientierung* (d. h. Formulierung von Zielvorgaben für Bildungsabschlüsse in Form von Kompetenzerwartungen als Information für Lehrkräfte, Eltern sowie Schülerinnen und Schüler),
- *Evaluation* (d. h. Überprüfung von Kompetenzständen und -entwicklungen bei Schülerinnen und Schülern, insbesondere auch als Grundlage für Maßnahmen zur rechtzeitigen Behebung von Defiziten),
- *Qualitätsentwicklung* (d. h. Unterrichtsverbesserung mit dem Ziel, die Kompetenzentwicklung zu optimieren).

Dabei soll der Unterricht nicht standardisiert werden, im Gegenteil soll der Weg, wie die Vorgaben der Bildungsstandards erreicht werden, Sache der einzelnen Schulen und der einzelnen Lehrkräfte sein. Freilich ist dieser Weg keineswegs beliebig. Ein Unterricht, der vorgegebene Kompetenzziele erreichen will, kurz ein „kompetenzorientierter Unterricht", muss gewissen Qualitätskriterien genügen (genaueres dazu in Abschnitt 3).

Nach Klieme et al. (2003, S. 24) müssen „gute Standards" gewisse Merkmale erfüllen: Sie sind fachbezogen formuliert, fokussieren auf Kerninhalte, sind kumulativ angelegt, sind verbindlich, differenzieren nach verschiedenen Niveaus, sind verständlich und realisierbar. Konkretisiert werden Standards durch *Aufgaben*. Ziel sind theoretisch wie empirisch fundierte fachspezifische *Kompetenzmodelle*. Diese werden durch ein Set von geeigneten Aufgaben illustriert und beschreiben nach Klieme et al. (2003)

> das Gefüge der Anforderungen, deren Bewältigung von Schülern erwartet wird, und liefern wissenschaftlich begründete Vorstellungen darüber, welche Abstufungen eine Kompetenz annehmen kann bzw. welche Niveaustufen sich bei den Schülern feststellen lassen. (S. 75)

Bisher gibt es nur (querschnittlich angelegte, d. h. auf einen festen Zeitpunkt bezogene) Kompetenz*stufen*modelle[1], während (längsschnittlich angelegte, d. h. den zeitlichen Verlauf berücksichtigende) Kompetenz*entwicklungs*modelle ein Desideratum darstellen, nicht nur in Deutschland, sondern weltweit.

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife knüpfen an die Standards der Sekundarstufe I an und setzen sie mit erweiterten Zielen fort. Zu den allgemeinen Bildungszielen des HSA und des MSA (Leitbild mündiger Bürger, s. o.) kommen nun Studierfähigkeit sowie wissenschaftspropädeutische Bildung hinzu. Auch die Standards für die Allgemeine Hochschulreife sind als *Regel*standards formuliert. Das bedeutet grob gesagt, dass sie von den Absolventen *im Mittel* erreicht werden müssen. *Mindest*standards müssen hingegen von ihrer Begriffsbedeutung her (vgl. Klieme et al., 2003) von *allen* Schülerinnen und Schü-

1 Man vergleiche dazu https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm

lern erreicht werden. Insbesondere Mindeststandards sollten nicht nur normativ festgelegt werden, sondern auch empirisch abgesichert sein, weil sie auch realistisch erreichbar sein sollen. Eine empirische Überprüfung der Standards für die Allgemeine Hochschulreife und eine darauf basierende Formulierung von Mindeststandards sind vorerst (leider) nicht zu erwarten. Die Formulierung von Mindeststandards stellt jedoch in jedem Fall eine wichtige und wünschenswerte Orientierung dar.

Die Bildungsstandards haben die Regelungen der „Einheitlichen Prüfungsanforderungen für die Gestaltung der Abiturprüfungen“ (EPA) integriert und diese damit abgelöst. Dabei wurde die Grundkurs-/Leistungskurs-Differenzierung der EPA aufgegriffen in der Unterscheidung zwischen einem *grundlegenden* und einem *erhöhten Anforderungsniveau*. Das erhöhte Niveau soll durch Anreicherungen aus dem grundlegenden Niveaus entstehen und nicht umgekehrt das grundlegende durch Ausdünnungen aus dem erhöhten. Im erhöhten Niveau sollen somit zum einen mehr Inhalte behandelt werden und zum anderen soll es sich vom grundlegenden Niveau durch einen erhöhten Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- und Formalisierungsgrad und allgemeiner durch einen höheren Anteil von kognitiv anspruchsvollen Tätigkeiten unterscheiden. Es gibt in den einzelnen Bundesländern unterschiedliche Regelungen darüber, ob es im Fach Mathematik überhaupt eine Unterscheidung zwischen diesen beiden Niveaus geben soll.

2 Die Bildungsstandards für das Fach Mathematik

2.1 Das Kompetenzstrukturmodell

Den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife liegt dasselbe Modell zugrunde wie den Mathematik-Standards für die Grundschule (s. dazu Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer & Köller, 2008; Roppelt & Reiss, 2012) sowie für HSA und MSA (s. dazu Blum, Drüke-Noe, Hartung & Köller, 2006; Roppelt, Blum & Pöhlmann, 2013). Dabei werden drei Dimensionen unterschieden, die man kurz als Prozess-, Inhalts- und Anspruchs-Dimension bezeichnen kann (vgl. Abbildung 1):

- *Prozess:* Die allgemeinen mathematischen *Kompetenzen,* deren Erwerb im Mittelpunkt des Unterrichts stehen soll.
- *Inhalt:* Die inhaltsbezogenen *Leitideen,* anhand derer die Kompetenzen erworben werden sollen und innerhalb derer gewisse Stoffinhalte verbindlich vorgegeben sind.
- *Anspruch:* Die *Anforderungsbereiche,* die den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten (vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben) auf theoretischer Ebene beschreiben sollen.

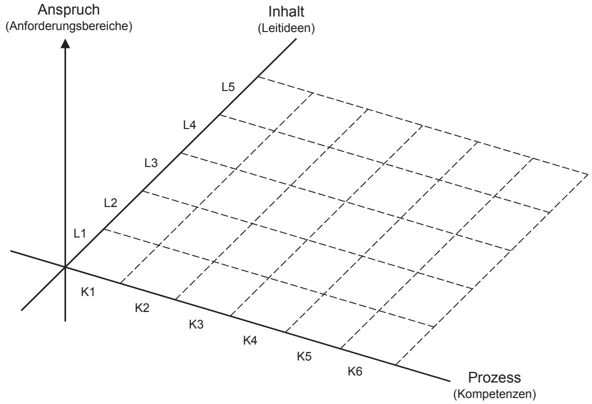


Abb. 1: Kompetenzstrukturmodell der Bildungsstandards für das Fach Mathematik (aus Roppelt, Blum & Pöhlmann, 2013, S. 25)

Dabei sind Inhalte und allgemeine Kompetenzen untrennbar miteinander verbunden, was in Abbildung 1 durch das Gitter symbolisiert werden soll, denn solche Kompetenzen können sich nur an konkreten Inhalten ausbilden („Es gibt kein Stricken ohne Wolle.“). Die Aktivierung solch allgemeiner mathematischer Kompetenzen ist nur möglich unter Rückgriff auf mathematisches Wissen, mathematikbezogene Vorstellungen und mathematische Fertigkeiten (schematisch dargestellt in Abbildung 2).

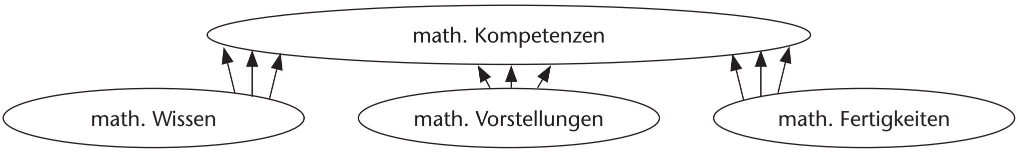


Abb. 2: Zusammenhang zwischen Wissen, Vorstellungen, Fertigkeiten und Kompetenzen

Konzeptuelle Grundlage aller Bildungsstandards im Fach Mathematik sind die *Grunderfahrungen* nach Winter (1995), die jedem Schüler und jeder Schülerin im Mathematikunterricht nahegebracht werden sollen: Mathematik als …

- … Werkzeug, um Erscheinungen der Welt in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- … geistige Schöpfung, Kulturgut und – auch deduktiv geordnete – Welt eigener Art,
- … Hilfsmittel zum Erwerb von – auch über die Mathematik hinausgehenden – Fähigkeiten.

Die hierdurch vermittelte breite Sicht von Mathematik rechtfertigt es auch fachbezogen, von *Bildungs*standards zu sprechen. Mit ihrem Bezug auf die Winter'schen Grunderfahrungen liegt somit eine einheitliche Konzeption der Mathematik-Standards von der Grundschule bis zum Abitur vor.

Wir betrachten nun die drei Dimensionen im Einzelnen.

2.2 Die Prozess-Dimension

Bei den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife werden sechs *allgemeine mathematische Kompetenzen* unterschieden, die das Spektrum mathematischen Arbeitens hinreichend breit erfassen (für den Theoriehintergrund zu den mathematischen Kompetenzen siehe Niss & Højgaard, 2011). Dabei ist es kaum möglich, die Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Vielmehr ist es geradezu typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden und sich die verschiedenen Kompetenzen dabei gegenseitig partiell durchdringen. Man unterscheidet wie schon bei den Standards für die Sekundarstufe I die Kompetenzen mathematisch Argumentieren, Probleme mathematisch Lösen, mathematisch Modellieren, mathematische Darstellungen Verwenden, mit Mathematik symbolisch/formal/technisch Umgehen und mathematisch Kommunizieren. Dabei haben fast alle Kompetenzen eine eher aktive, produktive und eine eher passive, rezeptive Seite (z. B. neue Darstellungen erzeugen versus gegebene Darstellungen interpretieren). Die sechs Kompetenzen werden im Folgenden näher beschrieben (für eine ausführlichere Beschreibung, bezogen auf die Mittelstufe, siehe Blum et al., 2006). Während die kognitiven Aktivitäten und damit die Beschreibungen strukturell ähnlich sind wie in der Sekundarstufe I, sind die Inhalte, anhand derer die Aktivitäten stattfinden, nun natürlich spezifisch für die Sekundarstufe II.

Mathematisch Argumentieren (K1): Hierzu gehören sowohl das Entwickeln von problemangemessenen mathematischen Argumentationen als auch das Nachvollziehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis hin zu formalen Beweisen. Genaueres hierzu findet man im Beitrag von Ufer und Kramer (Kapitel 7 in diesem Band).

Probleme mathematisch Lösen (K2): Diese Kompetenz beinhaltet das Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis zur Konstruktion komplexer und neuartiger Problemlösestrategien. Dabei spielen heuristische Prinzipien wie z. B. systematisch Probieren oder vorwärts bzw. rückwärts Arbeiten eine wichtige Rolle.

Mathematisch Modellieren (K3): Der Kern ist hier das Übersetzen zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen oder Verfahren. Hierzu gehören sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (z. B. „Dreisatz“) bis zu komplexen Modellierungen. Genauer wird diese Kompetenz im Beitrag von Kaiser und Stender (Kapitel 8 in diesem Band) beschrieben.

Mathematische Darstellungen Verwenden (K4): Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen sowie das Umgehen mit gegebenen Darstellungen und das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen wie Wertetabellen bis zu eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren und Dokumentieren von Überlegungen dienen.

Mit Mathematik symbolisch/formal/technisch Umgehen (K5): Im Zentrum steht hier das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten. Das Spektrum reicht von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung. Diese Kompetenz beinhaltet auch Fakten- und Regelwissen sowie den Einsatz von Hilfsmitteln wie digitalen Mathematikwerkzeugen.

Mathematisch Kommunizieren (K6): Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus mathematikhaltigen schriftlichen Texten oder mündlichen Äußerungen als auch das Darlegen von mathematischen Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Das Spektrum reicht von der direkten Informationsentnahme aus kurzen Texten bzw. vom Aufschreiben einfacher Lösungswege bis hin zum sinnentnehmenden Erfassen fachsprachlich geprägter Texte bzw. zur strukturierten Darlegung eigener Überlegungen.

2.3 Die Inhalts-Dimension

Mit den *mathematischen Leitideen* sollen die Phänomene erfasst und strukturiert werden, die man findet, wenn man die Welt mit einer „mathematischen Brille" betrachtet. In den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife werden fünf solche Leitideen unterschieden, die im Folgenden kurz erläutert werden. Dabei wird auch ausgeführt, inwiefern diese Leitideen die weitgehend gleichlautenden Leitideen der Sekundarstufe I fortsetzen und erweitern. Natürlich sind die Phänomene, die mit einer oberstufentypischen Brille entdeckt werden können, typischerweise komplexer, abstrakter und weniger direkt beobachtbar als die Phänomene, die hinter der Grund- und Mittelstufenmathematik stehen. Die Leitideen sind nicht identisch mit den klassischen, fachlich orientierten *Stoffgebieten;* in der Oberstufe sind dies die Analysis, die lineare Algebra und analytische Geometrie sowie die Stochastik. Es gibt aber gewisse Beziehungen zwischen den Leitideen und den Stoffgebieten, die im Folgenden im Einzelnen benannt werden. Innerhalb der Leitideen gibt es konkrete mathematische Inhalte, die typischerweise zum Schulcurriculum gehören und anhand derer die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erworben werden sollen. Was dabei im Einzelnen erreicht werden soll, wird in den Bildungsstandards Mathematik in Form von sogenannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen vorgegeben. Zu den Inhalten gehören dabei insbesondere auch die damit verbundenen begrifflichen Vorstellungen.

Leitidee *Algorithmus und Zahl* (L1): Während die Leitidee „Zahl" in der Sekundarstufe I alle Arten von numerischen Quantifizierungen und damit die verschiedenen Zahlenbereiche bis zu den reellen Zahlen erfasst, wird nun der Zahlbegriff zu Tupeln und Matrizen verallgemeinert. Diese Leitidee erweitert zudem die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch infinitesimale Methoden. Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden automatisierbarer mathematischer Verfahren (Algorithmen). Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Anfänge der Analysis und die lineare Algebra. Genauer wird diese Leitidee im Beitrag von Kleine (Kapitel 2 in diesem Band) beschrieben.

Leitidee *Messen* (L2): Hierzu gehört das Umgehen mit Größen, insbesondere mit Längen, Winkeln, Flächeninhalten und Volumina in geometrischen Kontexten, aber auch mit Alltagsgrößen wie Zeitspannen oder Massen. Gegenüber der Sekundarstufe I geschieht nun eine Erweiterung um infinitesimale, numerische, analytisch-geometrische und stochastische Methoden. Dazu gehören sowohl funktionale Größen wie lokale Änderungsraten als auch geometrische Größen im Koordinatensystem sowie statistische Kenngrößen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Analysis, die analytische Geometrie und die Stochastik. Genauer wird diese Leitidee im Beitrag von Leuders (Kapitel 3 in diesem Band) beschrieben.

Leitidee *Raum und Form* (L3): Diese Leitidee umfasst ebene und räumliche geometrische Objekte sowie deren Darstellungen, Eigenschaften, Beziehungen und Transformationen. In der Sekundarstufe II wird der Umgang mit räumlichen Objekten gegenüber der Sekundarstufe I vertieft, insbesondere durch Operationen im dreidimensionalen Koordinatensystem, wodurch auch das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickelt werden soll. Das zugehörige mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die analytische Geometrie. Genauer wird diese Leitidee im Beitrag von Filler (Kapitel 4 in diesem Band) beschrieben.

Leitidee *funktionaler Zusammenhang* (L4): Hier geht es um alle Arten funktionaler (und allgemeiner: relationaler) Beziehungen zwischen mathematischen Objekten einschließlich deren Darstellungen und Eigenschaften. In der Sekundarstufe II werden die funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I durch infinitesimale Begriffe und Verfahren vertieft und wird der Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele erweitert, auch in stochastischen Kontexten. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind in erster Linie die Analysis und die Stochastik. Genauer wird diese Leitidee im Beitrag von Henn und Oldenburg (Kapitel 5 in diesem Band) beschrieben.

Leitidee *Daten und Zufall* (L5): Hierzu gehört der Umgang mit statistischen Daten ebenso wie der Umgang mit zufallsabhängigen Situationen; beide Aspekte hängen über die Durchführung, Auswertung und Interpretation von Zufallsexperimenten bzw. statistischen Erhebungen eng zusammen. Im Vergleich zur Sekundarstufe I umfasst diese Leitidee nun auch den Umgang mit vielstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen. Das darauf bezogene mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die Stochastik. Genauer wird diese Leitidee im Beitrag von Biehler und Eichler (Kapitel 6 in diesem Band) beschrieben.

Welche inhaltbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards Mathematik im Einzelnen ausgewiesen sind, kann man bei KMK (2012, S. 21–26) nachlesen. Für jede Leitidee werden dabei zum einen Inhalte auf grundlegendem Anforderungsniveau formuliert, die somit für *alle* Abiturientinnen und Abiturienten als Regelstandard gefordert sind, und zum anderen Inhalte, die nur für das erhöhte Anforderungsniveau als Standard gelten sollen.

In den Curricula der einzelnen Bundesländer werden dann die je verbindlichen Inhalte genauer festgelegt. Hierbei kann es durchaus erhebliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Curricula geben, was die Intention der Standards, für größere Vergleichbarkeit innerhalb Deutschlands zu sorgen, ein Stück weit konterkariert. Dies ist einerseits in einem föderalen System wie dem deutschen kaum zu vermeiden. Andererseits hätte man durch Vorgabe weiterer Inhalte in den Bildungsstandards für eine noch größere Verbindlichkeit und Einheitlichkeit sorgen können; ein Beispiel sind die der Analysis zugrundeliegenden Funktionenklassen.

2.4 Die Anspruchs-Dimension

Das kognitive Niveau, auf dem kompetenzbezogene Aktivitäten stattfinden, wird in den Bildungsstandards Mathematik als *Anforderungsbereich* bezeichnet. Theoretisch liegen die denkbaren kognitiven Ansprüche für jede der Kompetenzen auf einem Kontinuum. Man unterscheidet aber pragmatisch bei jeder Kompetenz drei solche Anforderungsbereiche I, II und III, wobei Anforderungsbereich III theoretisch nach oben offen ist. Natürlich sind die Übergänge zwischen diesen Bereichen fließend. Für jede Kompetenz gibt es auch ein kognitives Niveau *unter* Anforderungsbereich I, was bedeutet, dass die Kompetenz kaum oder gar nicht benötigt wird. Das ist insbesondere für die Analyse und Konstruktion von *Aufgaben* relevant, denn kompetenzbezogene Aktivitäten finden in der Schule anhand von Aufgaben statt (zur zentralen Rolle von Aufgaben in Mathematik siehe u.a. Christiansen & Walther, 1986; Neubrand, Jordan, Krauss, Blum & Löwen, 2011). In Anforderungsbereich I sind diese Aktivitäten typischerweise ein- oder wenigschrittig und können direkt aus der Aufgabenstellung entnommen werden. In Anforderungsbereich II sind die Aktivitäten typischerweise mehrschrittig und erfordern gewisse Querverbindungen. In Anforderungsbereich III geht es typischerweise um komplexere Aktivitäten, um Verallgemeinerungen oder um Reflexionen auf einer Metaebene. Man kann nun für jede der sechs Kompetenzen die drei kognitiven Niveaus genauer beschreiben; für Details sei auf KMK (2012, S. 15–20) verwiesen.

Es gibt somit in den Bildungsstandards zwei Begriffe, die unglücklicherweise sehr ähnlich klingen und die man gut auseinanderhalten muss: „Anforderungsniveau“ und „Anforderungsbereich“. Während Anforderungsbereiche in den Bildungsstandards *kognitiv* definiert sind, sind die (kursbezogenen) Anforderungsniveaus im Sinne der Standards sowohl *inhaltlich* als auch *kognitiv* definiert: Einerseits sollen im erhöhten Anforderungsniveau mehr Inhalte behandelt werden, andererseits soll der Anteil des höchsten Anforderungsbereichs III im erhöhten Niveau höher sein als im grundlegenden Niveau. Zudem wird der Begriff Anforderungsbereich in den Bildungsstandards anders verwendet als in den früheren EPA, denn dort waren die „Anforderungsbereiche“ weniger kognitiv und stärker *curricular* definiert, indem sie die Vertrautheit der Lernenden mit den jeweiligen Gegenständen als wesentliches Kriterium für die Einordnung in einen der drei Bereiche ausgewiesen haben.

Hinzu kommt ein weiterer Begriff, den man gut von den eben genannten, theoretisch geprägten Begriffen unterscheiden muss und der ebenfalls wie jene Begriffe unterschiedliche Niveaus beschreibt, nämlich der Begriff der *Kompetenzstufen*. Hiermit sind *empirisch* definierte Niveaustufen beim Bearbeiten von Aufgaben gemeint, d. h. man teilt die Aufgaben je nach ihrer empirischen Schwierigkeit in verschiedene Intervalle ein. Da es die verwendeten psychometrischen Modelle erlauben, Aufgaben und Lernende auf derselben Skala abzubilden, kann man mit Kompetenzstufen auch unterschiedliche *Leistungsniveaus* bei Schülerinnen und Schülern beschreiben. Für Mathematik in der Sekundarstufe I gibt es ein solches Kompetenzstufenmodell, in dem sechs Stufen Ia (nach unten offen), Ib, II, III, IV und V (nach oben offen) unterschieden werden; für Details vergleiche man Blum, Roppelt und Müller (2013). Es wäre wünschenswert, ist aber bisher nicht vorgesehen, ein entsprechendes empirisch fundiertes Kompetenzstufenmodell für die Sekundarstufe II aufzustellen (siehe schon die Bemerkung zu den Regelstandards in Abschnitt 1).

3 Kompetenzorientierter Mathematikunterricht

Der wichtigste Grund für die Einführung von Bildungsstandards war die Förderung der unterrichtlichen Qualitätsentwicklung mit dem Ziel, die Leistungen und Einstellungen der Schülerinnen und Schüler zu verbessern. *Unterrichtsqualität* war und ist seit etwa zwei Jahrzehnten ein zentrales Thema in der empirischen Bildungsforschung (man vergleiche für die deutschsprachige Diskussion u.a. Ditton, 2006; Klieme, Lipowsky, Rakoczy & Ratzka, 2006; Helmke, 2014; de Florio-Hansen, 2014). Es gibt sicherlich keinen Königsweg zum Lernerfolg, aber es gibt theoretisch wie auch empirisch gut abgesicherte Qualitätskriterien, die hier wie folgt in fünf Kategorien zusammengefasst werden sollen (aufgelistet in Reihenfolge von fachunabhängigen zu stark fachbezogenen Kategorien):

- Effektive Klassen- und Unterrichtsführung (Classroom Management)
- Schülerorientierte Unterrichtsführung
- Kognitive Aktivierung der Lernenden
- Metakognitive Aktivierung der Lernenden
- Fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung

Im Folgenden werden jeweils einige Stichworte zu den einzelnen Kategorien gegeben. Vieles klingt fast selbstverständlich, aber dennoch wird dies offenbar im Unterrichtsalltag in Deutschland wie auch anderswo sehr oft nicht beachtet, wie Befragungen und Unterrichtsstudien zeigen (man vergleiche dazu etwa Baumert et al., 2004; Schiepe-Tiska, Reiss, Obersteiner, Heine, Seidel & Prenzel, 2013). Auf der anderen Seite zeigen Metastudien wie die von Seidel und Shavelson (2007), dass qualitätvoller Unterricht auch zu Lerneffekten führt.

Classroom Management umfasst Aspekte wie Methodenvariation, klare Strukturierung des Unterrichts, effektive Zeitnutzung, Störungsprävention, aufmerksames begleitendes Monitoring, erkennbare Trennung von Lern- und Beurteilungssituationen oder flexible Mediennutzung. In zahlreichen Studien ist bestätigt worden, dass die Beachtung solcher Aspekte eine notwendige (wenngleich natürlich nicht per se hinreichende) Bedingung für effektives Lernen ist (siehe z.B. die Metastudie von Hattie, 2009). In manchen Kriterienkatalogen für Unterrichtsqualität gehört die Mehrzahl der dort aufgeführten Aspekte zu der Kategorie des Classroom Management, wodurch stärker fachbezogene Aspekte (s. u.) zu kurz kommen.

Zur *Schülerorientierung* kann man u.a. ein adaptives Unterrichtstempo, respektvollen Umgang mit den Lernenden, ein konstruktives Umgehen mit Fehlern, Anknüpfen an das Vorwissen der Lernenden sowie Wertlegen auf individuelle Diagnosen, dazu passende Rückmeldungen und gezielte Lernunterstützungen zählen. Besonders Letzteres wird in jüngerer Zeit besonders betont. Lernwirksames, diagnosebasiertes Feedback ist u. a. durch ein ausgewogenes Eingehen auf individuelle Schwächen und Stärken sowie durch Hinweise auf Möglichkeiten, wie Lernende gezielt an ihren Schwächen arbeiten können, gekennzeichnet, wobei eine Kombination aus inhaltlichen und strategischen Hilfen besonders erfolgversprechend erscheint (vgl. u. a. Hattie & Timperley, 2007).

Kognitive Aktivierung bedeutet ein permanentes Herausfordern der geistigen Eigentätigkeit der Lernenden, eine adaptive, auf selbständiges Arbeiten der Lernenden abzielende Lehrerunterstützung und ein Ermutigen individueller Bearbeitungen von Aufgaben. Dahinter steht eine konstruktivistische Sicht des Lernens, d. h. die Grundüberzeugung, dass Lernende sich die Inhalte möglichst selbständig erschließen müssen. Besonders erfolgversprechend ist dabei eine stete Balance zwischen Lehreranleitung und Schülerselbständigkeit. Lehrerhinweise sollten adaptiv sein, d. h. sie sollen den Schülerinnen und Schülern so behutsam wie möglich dabei helfen, ihre jeweiligen Schwierigkeiten zu überwinden (vgl. dazu Leiß, 2010).

Zur *metakognitiven Aktivierung* gehören ein Stimulieren von lernprozessbegleitenden wie auch von rückblickenden Reflexionen der Lernenden und ein Betonen von Lern- und Problemlösestrategien durch ein Bewusstmachen von Vorgehensweisen beim Bearbeiten von Aufgaben. Ziel ist es, den Schülerinnen und Schülern möglichst viel selbstgesteuertes Lernen zu ermöglichen. Metakognitive Aktivitäten sollten in selbstverständlicher Weise zum Unterrichtsalltag gehören (siehe u. a. Sjuts, 2003).

Der *fachliche Gehalt* des Unterrichts wird (wie schon in Abschnitt 2.4 betont) insbesondere vom Inhalt und Anspruchsniveau der behandelten Aufgaben geprägt. Dabei müssen die Aufgaben diejenigen Kompetenzen herausfordern, die gefördert werden sollen, denn man darf, wie die Lehr-/Lernforschung eindringlich gezeigt hat (vgl. z. B. den Überblick in de Corte, Greer & Verschaffel, 1996), keinen automatischen Transfer von einer Kompetenz oder einem Inhalt auf eine andere Kompetenz oder einen anderen Inhalt erwarten. Weiter gehören hierzu das Herstellen stofflicher Vernetzungen sowie ein ständiges intelligentes Üben, Wiederholen und Festigen (Aebli, 1985) mit dem Ziel, langfristig Kompetenzen aufzubauen (Bruder, 2006).

Man kann mit *gutem* Mathematikunterricht einen Unterricht bezeichnen, der hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt, mit dem Ziel des Aufbaus der angestrebten Schülerkompetenzen. Die allseits angestrebte *Implementation* der Bildungsstandards in den Schulen heißt dann im Kern, guten Unterricht zu realisieren. Insofern könnte man unter *kompetenzorientiertem* Mathematikunterricht einfach einen Unterricht verstehen, der in diesem Sinne *gut* ist. Grundlage hierfür sind – vor allem für das Fach Mathematik – kompetenzorientierte Aufgaben, d. h. Aufgaben, die das Potential in sich tragen, die jeweils zu fördernden Kompetenzen bei den Lernenden herauszufordern.

Ob Unterricht *gut* ist, kann man nur zum Teil an der Unterrichtsplanung erkennen. Viele der Qualitätskriterien beziehen sich auf die konkrete Durchführung des Unterrichts und lassen sich nur durch Beobachtung vor Ort beurteilen, mit Leitfragen wie den folgenden, orientiert an den genannten Qualitätsaspekten:

- Wurde die zur Verfügung stehende Zeit effektiv zum Lernen genutzt?
- War das Tempo des Voranschreitens lerngruppenangemessen?
- War die eben beobachtete Lehrerintervention minimal-adaptiv und hat sie der Schülerin dabei geholfen, die aufgetretene Hürde selbständig zu überwinden?
- Hat der eben gegebene Lehrerhinweis ein adäquates strategisches Verhalten des Schülers gefördert?
- Hat die eingesetzte Aufgabe die Schülerinnen und Schüler tatsächlich dazu motiviert, ihre spezifischen Kompetenzen einzusetzen und weiterzuentwickeln?

Solche an den Qualitätskriterien orientierte Fragen können auch dazu beitragen, Unterricht zielgerichtet zu verbessern. Das Ziel solcher Kriterienkataloge ist es nicht, unerreichbare Idealbilder von gutem und lernwirksamem Unterricht zu entwerfen, sondern den alltäglichen Unterricht schrittweise zu verbessern. Dass hierfür Bedarf besteht, sollte nicht als Lehrerschelte missverstanden werden, sondern ist eine Erkenntnis aus den erwähnten Unterrichtsstudien.

Ein Aspekt, der im Fach Mathematik über die bloße Effektivierung des Unterrichts hinausgeht und auch die fachliche Substanz betrifft, ist der Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln oder - wie wir besser sagen - von *digitalen Mathematikwerkzeugen*. Mit der unmittelbaren Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechner ist deren Bedeutung für das Lehren und Lernen von Mathematik in den letzten Jahren enorm gestiegen. Dabei scheint es in Deutschland noch einen Nachholbedarf beim Rechnereinsatz im alltäglichen Mathematikunterricht zu geben, auch in der Oberstufe. Erst wenn elektronische Hilfsmittel auch regelmäßig in Prüfungen (Kursklausuren und Abitur) verwendet werden, wird ihr Einsatz im Unterricht selbstverständlich werden. Deshalb müssen neue Prüfungsformen gefunden werden, die u. a. eine adäquate Balance finden zwischen hilfsmittelfreien, -neutralen und -abhängigen Teilen (siehe dazu die Diskussion über hilfsmittelfreies Grundwissen und -können im Beitrag von Bruder, Feldt-Caesar, Pallack, Pinkernell und Wynands, Kapitel 9 in diesem Band).

Auch in den Bildungsstandards wird betont, welch vielfältige und wichtige Rollen digitale Werkzeuge im kompetenzorientierten Mathematikunterricht der Sekundarstufe II spielen können und sollen. Hierzu gehören neben der Entlastung von numerischen oder algebraischen Rechentätigkeiten (vgl. die Ausführungen in KMK 2012, S. 12 f.)

- das Entdecken mathematischer Zusammenhänge, u. a. durch experimentelle Erkundungen beim Argumentieren und Problemlösen,
- Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, auch mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten und problemloser Übersetzungen zwischen unterschiedlichen Darstellungen,
- die Verarbeitung größerer Datenmengen und damit die Möglichkeit der Behandlung realitätsnaher Probleme,
- die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben,
- die flexiblen Möglichkeiten zur Ergebniskontrolle.

Genauere Hinweise zur Rolle von digitalen Werkzeugen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II sind im Beitrag von Barzel und Greefrath (Kapitel 12 in diesem Band) zu finden. Speziell mit Möglichkeiten zum Werkzeugeinsatz im Analysisunterricht beschäftigt sich der Beitrag von Elschenbroich (Kapitel 20 in diesem Band).

4 Zum Aufbau dieses Buchs

Das wesentliche Ziel dieses Buchs ist es, die Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife zu illustrieren, zu konkretisieren und mit Leben zu füllen. Dies geschieht zum einen über die einzelnen Beiträge in diesem Buch, welche bestimmte Aspekte der Standards oder des an Standards orientierten Unterrichts erläutern und interpretieren. Zum anderen geschieht dies durch *Aufgaben*. Schon in den Beiträgen kommen immer wieder illustrierende Aufgaben vor. Zudem liegt dem Buch eine CD mit zahlreichen Aufgaben bei, welche das gesamte Spektrum der Kompetenzen, Inhalte und Anforderungsbereiche der Standards abdecken; diese Aufgabensammlung ist auch online auf der Internetseite des IQB abrufbar.

Sowohl die Beiträge als auch die Aufgabensammlung in diesem Band sollen Anregungen für einen Mathematikunterricht geben, der im Sinne von Abschnitt 3 „kompetenzorientiert" ist, d. h. sie sollen Lehrkräfte dabei unterstützen, kompetenzorientierte Aufgaben gezielt auszuwählen, für unterschiedliche didaktische Zwecke (Einführung, Übung, Diagnose, Leistungsüberprüfung) einzusetzen und ggf. selbst zu konstruieren. Detaillierte methodische Vorschläge zu geben, ist nicht die Intention dieses Bandes.

Die unterrichtlichen Anregungen zusammen mit den konzeptionellen Erläuterungen sollen vor allem auch Material für Lehrerfortbildungskurse zu den Standards bereitstellen. Das Wichtigste ist dabei, bei der Analyse und Konstruktion von Aufgaben oder von Unterricht wie auch bei der Diagnose und Bewertung von Schülerlösungen immer die „Kompetenzbrille" aufzusetzen, d. h. darauf zu achten, welches Wissen und welche Vorstellungen, welche Fertigkeiten und welche Kompetenzen jeweils angestrebt werden bzw. erkennbar sind. Diese Sichtweise repräsentiert den „Geist" der Bildungsstandards und soll durch den vorliegenden Band gefördert werden.

Das Buch ist in vier Teile gegliedert. Die Beiträge in *Teil 1* „Erläuterungen zu den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife" sollen die Konzeption dieser Standards aus verschiedenen Perspektiven beleuchten. Dazu gehören dieses Kapitel 1 ebenso wie die bereits erwähnten Kapitel 2 bis 8, welche die fünf mathematischen Leitideen bzw. zwei der sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen genauer ausführen.

In *Teil 2* „Konzeptionelle Fragen zu den Bildungsstandards Mathematik" geht es um weiterführende Aspekte. Bruder, Feldt-Caesar, Pallack, Pinkernell und Wynands (Kapitel 9) diskutieren die wichtige Frage, was man unter „mathematischem Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II" verstehen kann und wie sich dies fördern lässt. Koepf und Kramer (Kapitel 10) untersuchen den Beitrag der Bildungsstandards zum immer wieder auch öffentlich diskutierten Übergang zwischen der Sekundarstufe II und dem universitären Bereich. Im Beitrag von Drüke-Noe (Kapitel 11) geht es um kompetenzorientierte Leistungsüberprüfung, ein wichtiges Thema, da Kompetenzorientierung im Unterricht und in Prüfungen Hand in Hand gehen müssen. Schließlich enthält dieser Teil den zuvor schon erwähnten Beitrag von Barzel und Greefrath (Kapitel 12) zur Rolle und zum Einsatz von digitalen Werkzeugen.

Teil 3 „Zur Rolle von Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II" beschäftigt sich genauer mit Aufgaben, da wie gesagt kein anderes Fach so von Aufgaben geprägt ist wie die Mathematik. Im Beitrag von Hammer und Ufer (Kapitel 13) geht es um das Potential von Aufgaben für den Mathematikunterricht. Speziell mit dem Thema Abituraufgaben befasst sich der Beitrag von Heintz, Drüke-Noe und Greefrath (Kapitel 14). Dann diskutiert Leuders zwei wichtige Bereiche, die mittels geeigneter Aufgaben konkretisiert werden: Diagnose (Kapitel 15) und Übung (Kapitel 16). Im ersten dieser beiden Beiträge wird aufgezeigt, wie Aufgaben zu diagnostischen Zwecken verwendbar sind, während es im anderen Beitrag um intelligentes Üben geht. Neubrand (Kapitel 17) erörtert dann am Beispiel von „Bestimmungsaufgaben" einige grundsätzliche Fragen zur Gestaltung und zur Variation von Aufgabenstellungen. Schließlich behandeln Kowalewski und Löding (Kapitel 18) am Beispiel einer komplexen Aufgabe grundlegende Fragen zu Anwendungsbezügen (Einkleidung versus Authentizität).

Teil 4 „Zum Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II" nimmt den Unterricht selbst noch stärker in den Blick. Im Beitrag von Schmidt (Kapitel 19) wird ein kompetenzorientierter Einstieg in die Integralrechnung beschrieben, wie ihn die Autorin schon mehrfach erprobt hat. Nach dem schon erwähnten Beitrag von Elschenbroich (Kapitel 20) zu digitalen Werkzeugen folgt als letzter Beitrag eine Erörterung von Biehler, Eichler, Löding und Stender (Kapitel 21) zum Thema Simulation im Stochastikunterricht.

Dieser Band soll Anregungen für Unterricht und Fortbildung geben, ist aber natürlich nicht als direkte Vorlage für Unterricht oder Fortbildung gedacht. Die einzelnen Beiträge wie auch die Aufgabensammlung müssen stets für spezifische Verwendungszwecke adaptiert werden. Insofern soll dieser Band eher zum Nach-Denken über grundlegende Fragen des Lehrens und Lernens von Mathematik in der Sekundarstufe II als zum direkten Nach-Machen anregen.

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1985). *Zwölf Grundformen des Lehrens.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner & M. Neubrand (Hrsg.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 314–354). Münster: Waxmann.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele – Unterrichtsanregungen – Fortbildungsideen.* Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Blum, W., Roppelt, A. Müller, M. (2013). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik. In H.A. Pant, P. Stanat, U. Schroeders, A. Roppelt, T. Siegle & C. Pöhlmann (Hrsg.), *IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I* (S. 61–73). Münster: Waxmann.

Bruder, R. (2006): Langfristiger Kompetenzaufbau. In Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 135–151). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A.-G. Howson & M. Otte (Hrsg.), *Perspectives on mathematics education* (S. 243–307). Dordrecht: Reidel.

Corte, E. de, Greer, B. & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In Berliner, D. C. & Calfee, R. C. (Hrsg.), *Handbook of Educational Psychology* (S. 491 549). New York: Macmillan.

Ditton, H. (2006). Unterrichtsqualität. In K.-H. Arnold, U. Sandfuchs & J. Wiechmann (Hrsg.), *Handbuch Unterricht* (S. 235–243). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Florio-Hansen, I. de (2014). *Lernwirksamer Unterricht: Eine praxisorientierte Anleitung.* Darmstadt: WBG.

Hattie, J. A. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77* (1), 81–112.

Helmke, A. (2014). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts.* Seelze: Klett-Kallmeyer, 5. Auflage.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M. et al. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – Expertise.* Berlin: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K. & Ratzka, N. (2006): Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projekts „Pythagoras". In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 127–146). Münster: Waxmann.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Leiß, D. (2010). Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren – empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31* (2), 197–226.

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W. & Löwen, K. (2011). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Einblicke in das Potenzial für kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 115–132). Münster: Waxmann.

Niss, M. & Højgaard, T. (Hrsg.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning.* IMFUFA, Roskilde University.

Roppelt, A., Blum, W. & Pöhlmann, C. (2013). Beschreibung der untersuchten mathematischen

Kompetenzen. In H. A. Pant, P. Stanat, U. Schroeders, A. Roppelt, T. Siegle & C. Pöhlmann (Hrsg.), *IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I* (S. 23–37). Münster: Waxmann.

Roppelt, A. & Reiss, K. (2012). Beschreibung der im Fach Mathematik untersuchten Kompetenzen. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 34–43). Münster: Waxmann.

Schiepe-Tiska, A., Reiss, K., Obersteiner, A., Heine, J.-H., Seidel, T. & Prenzel, M. (2013). Mathematikunterricht in Deutschland: Befunde aus PISA 2012. In M. Prenzel, C. Sälzer, E. Klieme & O. Köller (Hrsg.), *PISA 2012 – Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland* (S. 123–154). Münster: Waxmann.

Seidel, T. & Shavelson, R. J. (2007). Teaching Effectiveness Research in the Past Decade: The Role of Theory and Research Design in Disentangling Meta-Analysis Results. *Review of Educational Research, 77* (4), 454–499.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik, 24* (1), 18–40.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (Hrsg.). (2008). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Aufgabenbeispiele – Unterrichtsanregungen – Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17–31). Weinheim, Basel: Beltz.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, 37–46.

2. Die Leitidee Algorithmus und Zahl

Michael Kleine

Die Leitidee Algorithmus und Zahl setzt die Kompetenzentwicklung aus Primarstufe und Sekundarstufe I im Hinblick auf die Zahlbegriffsentwicklung und das Verständnis für Rechenoperationen und Anwendungen fort. In diesem Beitrag wird diese Entwicklung aus der Sekundarstufe I heraus aufgezeigt und insbesondere auch unter dem Blickwinkel des „Algorithmus" fortgeschrieben. Dabei sollen an illustrierenden und kommentierten Beispielaufgaben insbesondere die Aspekte betont werden, die in der Sekundarstufe II für den Aufbau von Fähigkeiten und Fertigkeiten stärker in den Blick genommen werden.

1 Einleitung

Die Leitidee Algorithmus und Zahl setzt die Fundierungen aus der Leitidee Zahlen und Operationen aus den Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2005) sowie der Leitidee Zahl aus den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss fort (KMK, 2004), indem die Phänomene rund um das Zählen und Rechnen mit immer neuen Methoden erschlossen werden und das Zahlverständnis sukzessive ausgebaut wird. Im Hinblick auf die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) werden dabei Vorstellungen aus dem Bereich der reellen Zahlen mithilfe infinitesimaler Methoden erweitert. Die Betonung des Wortes „Algorithmus" in der Bezeichnung der Leitidee weist darauf hin, dass insbesondere die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden grundlegender mathematischer Verfahren im Mittelpunkt stehen, die prinzipiell automatisierbar sind. Betrachtet man unter diesem Aspekt die Entwicklung dieser Leitidee von der Grundschule an, dann lassen sich in deren Entwicklung von einem abstrahierten Standpunkt aus Parallelen zur Erweiterung algebraischer Strukturen erkennen, die beginnend mit Halbgruppen und Gruppen über Ringe und Körper bis zu den Vektorräumen der linearen Algebra führen. In dieser Entwicklung knüpft die Leitidee an diejenigen Inhalte der Sekundarstufe II aus dem Bereich der analytischen Geometrie und Analysis an, die das Verständnis für Tupel und Matrizen sowie deren Anwendungen legen und algorithmische Verfahren in den Blick nehmen, die sowohl im Hinblick auf Grenzwertprozesse neue mathematische „Objekte" erfassen als auch Lösungsverfahren systematisieren. In letzteren Bereich fallen eine Vielzahl an Beispielaufgaben zum Lösen linearer Gleichungssysteme, wie sie aus dem Unterricht der Sekundarstufe II wohlbekannt sind und auf deren Ausführung daher hier verzichtet werden kann. Vielmehr sollen in diesem Beitrag im Folgenden vor allem diejenigen Aspekte dieser Leitidee verstärkt betont werden, die mehr als bisher in den Unterricht implementiert werden sollten.

2 Entwicklung der Leitidee hin zur Hochschulreife

Die Leitidee Algorithmus und Zahl setzt die Anforderungen aus der Primarstufe (KMK, 2005) und der Sekundarstufe I (KMK, 2004) zur Entwicklung des Zahlbegriffs fort. Betrachtet man zu Beginn der Sekundarstufe II die bisherige Entwicklung innerhalb dieser Leitidee, dann lässt sich feststellen, dass in der Sekundarstufe I ausgehend von den natürlichen Zahlen und den aus der Grundschule bekannten Rechenoperationen der Zahlbegriff sukzessive über die Bruchzahlen sowie die ganzen und rationalen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen erweitert wird. Rechenoperationen werden im Sinne des Permanenzprinzips so fortgesetzt, dass die Erkenntnisse aus den bekannten Zahlbereichen weitgehende Gültigkeit behalten und in die Gesetzmäßigkeiten des jeweils neuen Zahlbereichs eingebettet sind. Die inhaltlichen Kompetenzen lassen sich am Ende der Sekundarstufe I anhand von drei Bereichen klassifizieren, die im Folgenden näher beschrieben werden.

2.1 Kompetenzbereiche am Ende der Sekundarstufe I

Schülerinnen und Schüler sollen über folgende Kompetenzen verfügen (vgl. Kleine, 2012):

(1) *Kompetenzen innerhalb der Zahlbeziehungen und Zahlbereichserweiterungen.* In der Primarstufe stehen der Aufbau des Dezimalsystems, die Beziehungen der natürlichen Zahlen zueinander sowie die Orientierung im Zahlenraum im Mittelpunkt. Auf dieser Basis werden in der Sekundarstufe I die Notwendigkeiten von Zahlbereichserweiterungen mit dem Wissen beispielsweise um die Grenzen der natürlichen Zahlen bei Zähl- und Rechenprozessen begründet. Zu den Zahlbereichen der ganzen Zahlen, rationalen Zahlen und reellen Zahlen sollen sinnbasierte Vorstellungen aufgebaut werden und Zahlen in verschiedenen Situationen auf unterschiedliche (je geeignete) Arten dargestellt werden (z. B. als Bruch, Verhältnis, Dezimalzahl).

(2) *Kompetenzen hinsichtlich der Rechenfähigkeiten und Rechenfertigkeiten.* Das Verständnis für Zahlen ist nicht primär ein Selbstzweck, sondern soll vor allem dazu genutzt werden, um das Operieren mit ihnen zu verstehen und auszuüben. Für den jeweiligen Zahlbereich kann man hierin auch die Anwendung der Rechenoperationen einordnen, die insbesondere auch die Einsicht in die Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen umfasst. Darüber hinaus gehören die Verwendung von Rechengesetzen (z. B. vorteilhaftes Rechnen) sowie die Nutzung von Kontrollverfahren für Rechenoperationen (z. B. Überschlag, Probe) zu diesem Bereich.

(3) *Kompetenzen hinsichtlich des Zahlverständnisses in verschiedenen Kontexten.* Die Anwendung des Zahlverständnisses und Rechenoperationen in verschiedenen Kontexten stellen den dritten Bereich dieser Leitidee im bisherigen Bildungsverlauf dar. Dieser umfasst einerseits die Interpretation und kritische Wertung von Rechenergebnissen im Hinblick auf einen gegebenen außermathematischen Sachverhalt. Andererseits werden hier die Beschreibung, die Auswahl und die Beurteilung von Verfahren sukzessive in den Mittelpunkt gestellt, denen algorithmisches Vorgehen auf Basis der Rechenoperationen und Zahlvorstellungen zugrundeliegt und die auch einen innermathematischen Bezug haben können. Prototypisch für den letzten Aspekt sind beispielsweise Aufgaben, die Grenzprozesse in den Blick nehmen. Beispiele hierfür sind Kontexte rund um das Heron-Verfahren oder Intervallschachtelungsverfahren zur Bestimmung von Lösungen linearer Gleichungen bzw. Gleichungssyste-

me oder zur Approximation irrationaler Zahlen, die prinzipiell auch einer Rechnernutzung zugänglich sind. Auch die approximative Betrachtung zur Bestimmung der Kreiszahl π kann als ein solches algorithmisches Vorgehen in der Sekundarstufe I aufgefasst werden.

2.2 Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe II

Betrachtet man vor diesem Hintergrund die inhaltlichen Kompetenzen der Leitidee Algorithmus und Zahl in der Sekundarstufe II, dann erkennt man bereits in den Beschreibungen der verschiedenen Bereiche bis zum Ende der Sekundarstufe I zahlreiche Anknüpfungspunkte, an denen die Kompetenzentwicklung fortgesetzt wird. Dabei rückt das algorithmische Vorgehen, was bisher durch die Sachbezüge in dieser Leitidee bis zum Ende der Sekundarstufe I eher implizit mitentwickelt wurde, jetzt explizit in den Vordergrund und durchzieht diese Leitidee erkennbar. Nicht zuletzt zeigt die Benennung Algorithmus und Zahl die neue Schwerpunktsetzung dieser Leitidee. Betrachtet man die inhaltliche Beschreibung der Leitidee systematisch anhand der zuvor herausgestellten drei Bereiche, wie sie sich aus der Sekundarstufe I ergeben, dann erkennt man als einen neuen Beitrag (1) *die Erweiterung des Zahlbegriffs* hin zu Tupeln und Matrizen. Dabei werden Tupel als mathematische Strukturen erfahren, mit denen Objekte unter Beachtung einer Reihenfolge zahlenmäßig beschrieben werden. In ihrer Interpretation zur Zahlentwicklung ist hier insbesondere der aus der Koordinatisierung der Ebene in der Sekundarstufe I heraus entwickelte Begriff des Vektors (und dahinterstehend der Begriff des Vektorraums) von Bedeutung, der die Grundlage legt für das weitere Operieren und Verallgemeinern im Sinne des Umgangs mit Tupeln und Matrizen. Die Kenntnisse über die Strukturierung und Darstellung von Tupeln können dann in der Leitidee Raum und Form weiter zum Tragen kommen (vgl. den Beitrag von Filler, Kapitel 4 in diesem Band). Andererseits wird der Zahlbegriff um das Verständnis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs erweitert, der sich (in Fortschreibung der Methoden zur Approximation reeller Zahlen in der Sekundarstufe I) insbesondere beim Ableitungs- und Integralbegriff nutzen lässt. Dieser besteht einerseits aus den algorithmisch geprägten Zugängen einer beliebig genauen Annäherung an eine Zahl bzw. einen zahlmäßig erfassbaren Grenzwert, wie sie für infinitesimale Methoden charakteristisch sind (vgl. beispielsweise Heuser, 2000). Andererseits beruht er auf einer (damit z. T. einhergehenden) Betrachtung zur Untersuchung eines Grenzverhaltens über eine unendliche Anzahl an Schritten.

Innerhalb der Entwicklung von (2) *Rechenfähigkeiten und Rechenfertigkeiten* stehen in Bezug auf die hier erfolgte Weiterentwicklung die begründete Auswahl geeigneter Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen im Mittelpunkt. Dabei soll insbesondere ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, das auf algorithmischen Strukturen fußt, erläutert und für die Lösung solcher Gleichungssysteme genutzt werden (in erster Linie das Gauß-Verfahren). Die Fähigkeiten zu einer händischen Nutzung eines algorithmischen Verfahrens sind insofern bedeutsam, als sie dem Verständnis und der Einsicht in die strukturellen Abläufe dienen. Unter diesem Aspekt sind auch die Anwendung von Rechenoperationen mit Matrizen und Tupeln Gegenstand eines Mathematikunterrichts, der die Einsicht in die strukturellen Zusammenhänge verdeutlichen möchte, beispielsweise wenn es um die Nutzung und Anwendungen von inversen Matrizen geht oder die Wesenszüge der Matrizenmultiplikation (im Auswahlthema A1) verdeutlicht werden sollen. Diese händischen Fertigkeiten stehen dabei in einer Wechselbeziehung mit der Automatisierung algorithmischer Verfahren für Gleichungen und (lineare) Gleichungssysteme, wie sie von einem digitalen Werkzeug durchgeführt werden können.

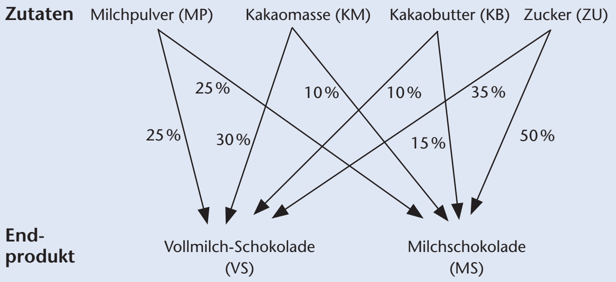
Hinsichtlich der Anwendbarkeit der Objekte und Verfahren stehen (3) die Kompetenzen bezüglich der *Anwendung von Operationen und Algorithmen in verschiedenen Kontexten* im Mittelpunkt. Hier wird nicht allein der außermathematische Kontext betont, da innerhalb des Spektrums mathematischer Aufgaben, in denen solche mathematischen Strukturen erarbeitet werden, sowohl außermathematische als auch innermathematische Kontexte auftreten können. In diesen Bereich fällt die Interpretation und kritische Wertung der eingesetzten Verfahren in Bezug auf den dafür vorgesehenen Kontext, die Beschreibung von Sachverhalten mithilfe von Tupeln und Matrizen. Weiterhin gehören hierzu Aspekte der Auswahlalternative A1, sofern sie sich auf dem grundlegenden Anforderungsniveau auf die Beschreibung einfacher mathematischer Prozesse durch Matrizen und ihrer Operationen beziehen und auf dem erhöhten Anforderungsniveau die Beschreibung mehrstufiger Prozesse mit Matrizen bzw. die Interpretation von Grenzmatrizen und Fixvektoren umfassen (die Auswahlalternative A2 gehört zur Leitidee Messen und wird hier nicht weiter betrachtet).

3 Prozesse mit Tupeln und Matrizen beschreiben

3.1 Matrizen zur Beschreibung von Sachverhalten nutzen

Matrizen sind wesentliche Objekte der Mathematik, die aufgrund ihrer zweidimensionalen Anordnung in verschiedenen Situationen genutzt werden können. Sie können beispielsweise lineare Gleichungssysteme beschreiben, als lineare Abbildungen aufgefasst oder auch für die tabellarische Anordnung bivariater Daten als Darstellungsform genutzt werden. Zur Beschreibung von Produktionsabläufen bieten sie sich für mehrstufige Prozesse als Strukturierungshilfe und Werkzeug zur Erfassung einfacher Sachverhalte an. Illustriert man Wirtschaftsabläufe exemplarisch an einem zweistufigen Produktionsprozess, dann steht bei dieser Betrachtung das Prinzip der adäquaten Beschreibung eines solchen Sachverhalts mithilfe von Matrizen im Blickpunkt. Die Matrix wird dabei im Sinne der Leitidee Algorithmus und Zahl zu einem neuen „Objekt“, das den zugrundeliegenden Sachverhalt zahlenmäßig erfasst und eine Beziehung zwischen zwei beteiligten Größen herstellt. Das folgende Beispiel soll illustrieren, wie die Matrizenschreibweise hilfreich sein kann und zur Strukturierung eines Produktionsprozesses bei einer Schokoladenherstellung beiträgt (Aufgabe 1).

Schokolade besteht aus wenigen Zutaten: Milchpulver (MP), Kakaomasse (KM), Kakaobutter (KB) sowie (flüssigem oder kristallinem) Zucker (ZU). Je nach unterschiedlicher Zusammensetzung der Zutaten entstehen verschiedene Schokoladensorten. Das Diagramm zeigt die Anteile dieser Zutaten bei Vollmilch- (VS) und Milchschokolade (MS).



Tupel zur Beschreibung der Anteile der einzelnen Zutaten bei VS:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}30 \\ 0{,}10 \\ 0{,}35 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{MP} \\ \text{KM} \\ \text{KB} \\ \text{ZU} \end{array} \end{array}$$

Produktionsmatrix:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \text{VS} & \text{MS} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}30 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}35 & 0{,}50 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{MP} \\ \text{KM} \\ \text{KB} \\ \text{ZU} \end{array} \end{array}$$

Rohstoff-Zutaten-Matrix pro kg Rohstoff:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{MP} & \text{KM} & \text{KB} & \text{ZU} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{M} \\ \text{K} \\ \text{Z} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}50 & 0{,}45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bevor die Zutaten verarbeitet werden können, müssen diese zunächst einmal aus Rohstoffen hergestellt werden. Dabei benötigt man für 1 kg Milchpulver fast die siebenfache Menge Milch (M), aus 1 kg geschälten und gerösteten Kakaobohnen (K) bekommt man etwa 500 g Kakaomasse und 450 g Kakaobutter. In der Zuckerproduktion benötigt man etwa 5 kg Zuckerrüben (Z) für jedes Kilogramm Zucker.

Aufgabe 1:
Süße Versuchung; Sachverhalte mit Tupeln und Matrizen beschreiben

Man erkennt in den Ausführungen zur Aufgabe 1, dass man für jede einzelne Schokoladensorte, die aus den vier verschiedenen Zutaten Milchpulver (MP), Kakaomasse (KM), Kakaobutter (KB) und Zucker (ZU) besteht, die Zusammensetzung als Tupel beschreiben kann, dessen Koordinaten in einem inhaltlichen Zusammenhang zu den Zutaten stehen. Die Zusammensetzung der einzelnen Schokoladensorten zu einer Matrix lässt sich als Beschreibung eines gesamten Produktionsprozesses verstehen. Nimmt man noch die Rohstoffe hinzu, aus denen die Zutaten hergestellt werden, lässt sich über die Verknüpfung der Stufen des Produktionsprozesses die Produktionskette beschreiben. So lassen sich beispielsweise Aufgaben anschließen, die auf den Einsatz einzelner Rohstoffe für die Endprodukte abzielen, nach einer möglichst optimalen Umsetzung bei begrenzten Ressourcen oder – je nach Randbedingungen wie einer bestimmten Nachfrage – auch nach der konkreten Gestaltung von Produktionsmengen. Weiterhin kann das Operieren mit Tupeln und Matrizen direkt in den Blick genommen werden, etwa bei der Frage nach der inhaltlichen Bedeutung mathematischer Verknüpfungen im Hinblick auf den realen Kontext.

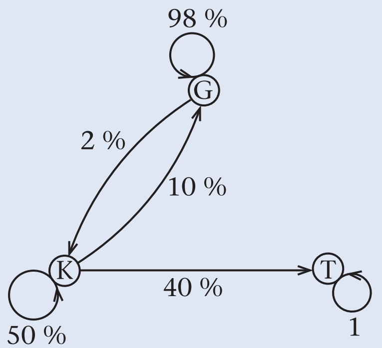
Es gibt eine Vielzahl an Beispielen für die Beschreibung von Sachverhalten und Prozessen mithilfe von Tupeln und Matrizen: Aus dem Bereich der Wirtschaft sei als weiterer Anwendungsbereich exemplarisch das Qualitätsmanagement genannt, im Bereich der Naturwissenschaften können chemische Reaktionen betrachtet werden, in den Sozialwissenschaften ergeben sich Möglichkeiten zur Beschreibung von Sozialstrukturen und im Bereich der Verkehrsplanung können Verkehrsströme untersucht werden.

Dabei ergibt sich im Zusammenhang mit außermathematischen Kontexten stets die Anforderung, mathematischen Operationen wie der skalaren Multiplikation, der Vektoraddition oder der Matrizenmultiplikation in dem jeweiligen Anwendungsfeld eine inhaltliche Bedeutung zu geben. Andererseits gilt es jedoch auch, die innermathematische Struktur dieser universellen mathematischen „Werkzeuge“ für ein vertieftes Verständnis genauer zu betrachten.

3.2 Übergangsprozesse untersuchen

Für eine weiterführende Auseinandersetzung mit der Leitidee Algorithmus und Zahl lassen sich die inhaltlichen Kompetenzen aus der Beschreibung von Sachverhalten durch Tupel und Matrizen fortsetzen, indem man mithilfe stochastischer Modelle eine Matrix als Prozessmatrix interpretiert, mit deren Hilfe man die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt verschiedener Zustände darstellen kann (sogenannte Übergangsmatrizen). Die folgende Aufgabe, die die Ausbreitung einer Krankheit modellieren soll, sei hierfür exemplarisch angeführt (Aufgabe 2).

In einer Seehundpopulation breitet sich eine ansteckende Krankheit aus. Am ersten Tag der Beobachtung gibt es etwa 20000 gesunde und 80 kranke Tiere, am Strand werden 10 tote Seehunde gefunden. Im Labor wird nachgewiesen, dass sie alle an der Krankheit gestorben sind.
Eine Gruppe von Meeresbiologen versucht, den Verlauf der Epidemie von Tag zu Tag durch das nebenstehende Modell abzuschätzen.



Tier ist gesund (G), krank (K) bzw. tot (T)

Geben Sie die Übergangsmatrix für das Modell der Biologen an und tragen Sie für die folgenden sieben Tage die Anzahlen der gesunden, kranken und toten Seehunde in die folgende Tabelle ein.

	1. Tag	2. Tag	3. Tag	4. Tag	5. Tag	6. Tag	7. Tag	8. Tag
Gesunde	20000							
Kranke	80							
Tote	10							

Stellen Sie Ihre Ergebnisse in Form eines kurzen Zeitungsberichts dar (ca. 40–50 Wörter).

Aufgabe 2: Seehundepidemie

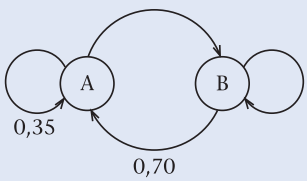
Diese Aufgabe stellt eine enge Wechselbeziehung zwischen der Leitidee Algorithmus und Zahl, welche die mathematische Struktur zur Beschreibung der stochastischen Prozesse liefert, und der Leitidee Daten und Zufall dar, die den inhaltlichen Rahmen vorgibt.

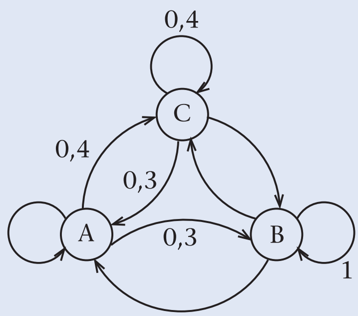
Mithilfe des Diagramms lässt sich die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}02 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$ erstellen, aus der man die Wahrscheinlichkeiten dafür ablesen kann, dass ein Seehund im Hinblick auf seinen aktuellen (Gesundheits-)Zustand den entsprechenden (Gesundheits-)Zustand für den nächsten Tag erreicht. Bezeichnet man mit $\vec{s_n}$ die Verteilung der Seehundpopulation bezüglich der drei Zustände am Tag n, dann lassen sich mithilfe dieser Übergangsmatrix die zu erwartenden Tageswerte bestimmen, wozu sich ein Einsatz von Rechnern als Werkzeug anbietet. Die Verteilung in der Population der Seehunde n Tage nach Beginn der Beobachtung lässt sich somit berechnen durch $\vec{s_n} = M^{n-1} \cdot \vec{s_1}$. Hiermit lassen sich nun Fragestellungen beantworten wie beispielsweise die folgenden: Nach wie vielen Tagen erwartet man, dass ungefähr die Hälfte der Population gestorben ist? Welche Bedeutung haben Fixvektoren für den konkreten Sachbezug?

Das folgende Beispiel (Aufgabe 3) soll exemplarisch aufzeigen, wie Übergangsmatrizen innermathematisch an einfachen Zusammenhängen untersucht werden, um die Strukturen dieser mathematischen Elemente in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit zu stellen.

Übergangsprozesse können übersichtlich in einem Übergangsgraphen oder einer Übergangsmatrix dargestellt werden.

a) Vervollständigen Sie die Graphen und geben Sie jeweils die Übergangsmatrix an.





b) Ein Übergangsprozess wird durch die Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$ beschrieben.

Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen und interpretieren Sie die Elemente der ersten Spalte der Matrix

$$U^2 = \begin{pmatrix} (1-a)^2 + a \cdot b & (1-a) \cdot b + (1-b) \cdot b \\ a \cdot (1-a) + a \cdot (1-b) & b \cdot a + (1-b)^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Übergangsprozesse

4 Über alle Grenzen hinaus

Für die Leitidee Algorithmus und Zahl ist der Umgang mit Grenzwerten auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs eine wesentliche inhaltliche Kompetenz. Hierunter ist sicherlich einerseits der dynamische Aspekt einer beliebig genauen Annäherung an eine bestimmte Stelle zu verstehen, das ein Wesen der infinitesimalen Betrachtung darstellt. Andererseits ist die Phänomenologie bezüglich der Frage nach der Existenz eines Grenzwertes und dessen Eindeutigkeit zu betrachten. Die Entwicklung des Grenzwertbegriffs wird sich hierbei in hohem Maße in einer Verknüpfung dieser Leitidee mit der Leitidee funktionaler Zusammenhang vollziehen. Das folgende Beispiel zur Betrachtung des Grenzwertes an Teststellen soll dieses illustrieren (Aufgabe 4). Hier wird eine beliebige Funktion f mit einer Definitionslücke x_L näher in den Blick genommen. Dabei stellt sich die Frage, wie sich die Funktionswerte von f bei Annäherung der entsprechenden Argumente an die Stelle x_L verhalten.

a) Betrachten Sie die Funktion f mit $f(x) = \frac{(x^2 + x - 2)}{(x - 1)}$ mit deren Definitionslücke $x_L = 1$.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ bei Annäherung der Argumente x an die Stelle $x_L = 1$. Stellen Sie eine Vermutung für das Verhalten der Funktionswerte auf.

b) Betrachten Sie die Funktion g mit $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, die für $x_L = 0$ nicht definiert ist.
Untersuchen Sie für die Funktion g das Verhalten der Funktionswerte $g(x)$ bei folgenden Annäherungen der Argumente x an die Stelle $x_L = 0$.

(1)	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{(10\pi)}$	$\frac{1}{(100\pi)}$	$\frac{1}{(1000\pi)}$	$\frac{1}{(10\,000\pi)}$
(2)	$\frac{1}{(0{,}5\pi)}$	$\frac{1}{(10{,}5\pi)}$	$\frac{1}{(100{,}5\pi)}$	$\frac{1}{(1000{,}5\pi)}$	$\frac{1}{(10\,000{,}5\pi)}$

Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

c) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{(x^2 - 1)}{|x - 1|}$. Geben Sie die Definitionslücke x_L von h an.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung der Argumente an die Definitionslücke x_L.

Aufgabe 4: Grenzwert mit Teststellen

In Aufgabe 4 wird das Verhalten der Funktionswerte betrachtet und dabei auftretende Probleme werden genauer thematisiert. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass die Untersuchung von Grenzwerten von Funktionen mittels Wertetabelle nur Hinweise auf das Verhalten der Funktionswerte liefern kann. Verschiedene Folgen von Teststellen können zu gleichen oder verschiedenen Ergebnissen führen. Man erhält auch dann noch kein sicheres Urteil, falls mehrere Testfolgen dasselbe Ergebnis liefern. Ergeben jedoch verschiedene Testfolgen verschiedene Ergebnisse, kann man zumindest mit Sicherheit auf ein nicht einheitliches Verhalten der Funktionswerte schließen.

Die in dieser Beispielaufgabe erkennbaren Verknüpfungen der Leitidee Algorithmus und Zahl mit der Leitidee funktionaler Zusammenhang sind durchaus gewollt, denn die Orientierung an Leitideen stellt innerhalb des Kompetenzmodells der Bildungsstandards keine Aufteilung in klar zu trennende inhaltliche Teilbereiche dar. Vielmehr soll durch verschiedene Perspektiven in den Aufgabenstellungen aufgezeigt werden, wie funktionale Beziehungen mit Aspekten algorithmischen Vorgehens insgesamt der Entwicklung des Grenzwertbegriffs dienen. Doch die Begriffsentwicklung ist durchaus noch übergreifender im Verbund der verschiedenen Leitideen zu sehen, wie man in Aufgabe 5 exemplarisch erkennen kann.

Ein Laplace-Würfel wird n-mal geworfen, wobei $n \geq 2$ ist. Unter dem Aspekt „Augenzahl ist gerade“ kann man folgende Ereignisse betrachten:
A: „Es fällt höchstens eine gerade Zahl.“
B: „Es fallen wenigstens eine gerade und wenigstens eine ungerade Zahl.“

a) Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ an.
Untersuchen Sie $\lim_{n \to \infty} P(A)$ und interpretieren Sie das Ergebnis bezüglich des Zufallsexperimentes.
b) Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ an.
Ermitteln Sie $\lim_{n \to \infty} P(B)$ und deuten Sie das Ergebnis bezüglich des Zufallsexperimentes.

Aufgabe 5: Würfeln mit Grenzwert

Diese Beispielaufgabe lässt sich als mehrstufiges Zufallsexperiment der Länge n mit zwei Ausgängen („gerade“, „ungerade“) interpretieren, wobei jeder Pfad gleich wahrscheinlich ist, mit der jeweiligen Pfadwahrscheinlichkeit $p_F = 0{,}5^n$. Für das Ereignis A gibt es $(n + 1)$ Pfade (n Pfade mit genau einer geraden Zahl und einen Pfad mit keiner geraden Zahl). Somit ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: $P(A) = (n + 1) \cdot 0{,}5^n$ (Anmerkung: Die Aufgabe ist auch als Laplace-Experiment interpretierbar mit $|\Omega| = 2^n$ und $|A| = n + 1$). Interpretiert man den Grenzwert für eine steigende Anzahl an Versuchsdurchführungen $\lim_{n \to \infty} P(A) = 0$, dann bedeutet dies, dass es mit zunehmender Anzahl der Versuchsdurchführungen immer unwahrscheinlicher wird, dass höchstens eine gerade Zahl fällt. Im Sinne eines propädeutischen Grenzwertbegriffs ist diese Aufgabe exemplarisch für die intendierte Verknüpfung zwischen der Begriffsbildung und der inhaltsbezogenen Auslegung der Sachsituation.

5 Fazit

Die verschiedenen Beispiele in diesem Beitrag sollten verdeutlichen, wie vielfältig die inhaltlichen Anforderungen in der Leitidee Algorithmus und Zahl sind. Die Fortschreibung der Zahlentwicklung aus der Sekundarstufe I soll das Verständnis für algebraische Strukturen hin zu Vektorräumen und deren Eigenschaften fördern. Die Betonung des algorithmischen Aspekts der Leitidee lenkt dabei den Blick auf die Kenntnis und den Nutzen mathematischer Verfahren, die für die Zahlentwicklung und darüber hinaus für Denkweisen in algorithmischen Strukturen bedeutsam sind. Aufgaben in verschiedenen Kontexten sollen Schülerinnen und Schülern Einsichten ermöglichen, um diese Fortentwicklung des Zahlbegriffs sowie das Verständnis für algorithmische Verfahren und für Strukturen auf möglichst unterschiedliche Weise begründet zu erfahren.

Literaturverzeichnis

Heuser, H. (2000). *Lehrbuch der Analysis (Teil 2)*. Stuttgart: Teubner.

Kleine, M. (2012). *Lernen fördern: Mathematik – Kompetenzorientierter Unterricht in der Sekundarstufe 1*. Seelze: Klett-Kallmeyer.

KMK (2004) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss vom 04.12.2003*. München: Luchterhand.

KMK (2005) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München: Luchterhand.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

3. Die Leitidee Messen

Timo Leuders

Messen ist eine so vertraute und scheinbar so banale Verrichtung, dass man leicht übersieht, dass es sich hier um ein anspruchsvolles theoretisches Konzept und eine zentrale kulturelle Errungenschaft handelt. In diesem Beitrag wird aufgezeigt, wie sich das Verständnis von Messen in der gymnasialen Oberstufe auf verschiedene Weisen gegenüber der Sekundarstufe I erweitert und welche Rolle eine themenübergreifende Sicht auf die Kernideen des Messens beim Lehren und Lernen haben kann.

1 Zum Begriff des Messens

Die Idee des Messens durchdringt viele Bereiche der Mathematik und all diejenigen Wissenschaften, die sich der Mathematik bedienen – beispielsweise auch die Psychologie, die sich seit vielen Jahrzehnten um eine systematische Theorie der Messung menschlicher Eigenschaften bemüht. Bis in die aktuelle Forschung hinein beschäftigen Probleme des Messens die Mathematik (wie etwa beim Banach-Tarski-Paradoxon, z. B. bei Wapner, 2007, oder Kirsch, 1990).

Daneben ist der Umgang mit Messprozessen und mit Größen auch ein Teil mathematischer Grundbildung und notwendig für die gesellschaftliche Teilhabe. Aus diesem Grunde findet man Messen auch aus curricularer Sicht immer wieder als „zentrale Idee", „fundamentale Idee", „universelle Idee" oder auch als „Leitdiee" beschrieben (Vohns, 2002). Das so genannte „Prinzip des Messens" ist zunächst einmal die mathematische Antwort auf das Problem des *indirekten Vergleiches* von Objekten: Wie kann man Objekte nach ihrer „Größe" vergleichen, wenn man sie nicht direkt nebeneinander stellen kann? Zum Messen gehört damit nicht nur die Entwicklung oder Ausführung von Messverfahren, sondern auch eine Festlegung und Präzisierung, was man jeweils genau unter einer „Größe" verstehen will. Die verschiedenen mit dem Messen verbundenen mathematischen Konzepte (z. B. das Konzept „Umfang" oder das Konzept „Einheit") können im Mathematikunterricht dann das Ergebnis so genannter horizontaler Mathematisierungen sein, also von Bemühungen, konkrete, verständliche Probleme durch die Entwicklung mathematischer Konzepte zu lösen. Dies kann man – auch ohne mathematische Formalisierung – durch so genannte „Kernideen" beschreiben (vgl. Leuders, Hußmann, Barzel & Prediger, 2011). Tabelle 1 beschreibt die wichtigsten Kernideen des Messens, wie sie bereits in der Grundschule und der Sekundarstufe I für verschiedene Größenbereiche entwickelt werden (nach Leuders & Barzel, 2014).

Tabelle 1: Kernideen des Messens

Kernidee – noch unmathematisiert	Mathematische Präzisierung
Man kann Objekte und Phänomene der Welt nach ganz unterschiedlichen Eigenschaften vergleichen. Manchmal kann man das so tun, als lägen die Objekte sortiert hintereinander, wie die Zahlen auf einem Zahlenstrahl (z. B. bei Länge oder Gewicht). *(Modellieren von Eigenschaften durch Zahlen)*	Messen ist eine Abbildung von einer Objektmenge in einen Größenbereich (z. B. die Längen, die ähnlich wie die positiven reellen Zahlen strukturiert sind). Das Operieren in der Objektwelt (also z. B. das Zusammenfassen von Objekten), sollte dabei immer zu sinnvollen Operationen im Größenbereich führen (also z. B. zur Addition).
Will man die Größe eines Objektes zahlenmäßig erfassen, so wählt man ein „kleines" Vergleichsobjekt und fragt, wie oft es in das zu erfassende Objekt passt. Geht das nicht auf, so kann man versuchen, das Vergleichsobjekt in kleinere aufzuteilen („Verfeinern") und mit diesen weiter zu arbeiten. *(Einheitenkonzept und Passen-In-Vorstellung)*	Zu einer zahlenmäßigen Angabe für eine Größe kommt man, indem man eine Einheit im Größenbereich auswählt und danach fragt, wie oft die Einheit in die Größe passt. Einheiten sind i. A. willkürlich, mitunter kann man sie durch Division verfeinern.
Für die Verständigung über Größen ist es nützlich, sich auf möglichst einfache, stabile, praktische und vor allem gemeinsame Einheiten zu einigen. *(Nutzen von Standardeinheiten)*	Zur Messung physikalischer Größen bedient man sich weltweit normierter Standardeinheiten.

Mathematisch verstanden ist der Akt des Messens also eine Übersetzung aus einer Objektwelt, bestehend aus so genannten „Repräsentanten", welche bereits mehr oder weniger mathematisiert vorliegen können (z. B. Bleistifte auf dem Tisch oder abstrakte Strecken in der Ebene), in jeweils eine besondere Zahlenwelt, in der man addieren, vervielfachen und ggf. teilen kann. Diese „mathematische Zahlenwelt" wird *Größenbereich* genannt. Der Akt des Messens lässt sich somit auch als ein Schritt in einem Modellierungszyklus verstehen (vgl. den Beitrag von Kaiser und Stender, Kapitel 8 in diesem Band). Anstelle eines komplexen Objektes hat man es nach dem Messen erst einmal nur mit einer einzigen mathematischen Eigenschaft dieses Objekts, nämlich seiner (jeweils betrachteten) Größe zu tun, die man sprachlich an andere Menschen übermitteln kann und mit der man weiter operieren kann (s. Abbildung 1).

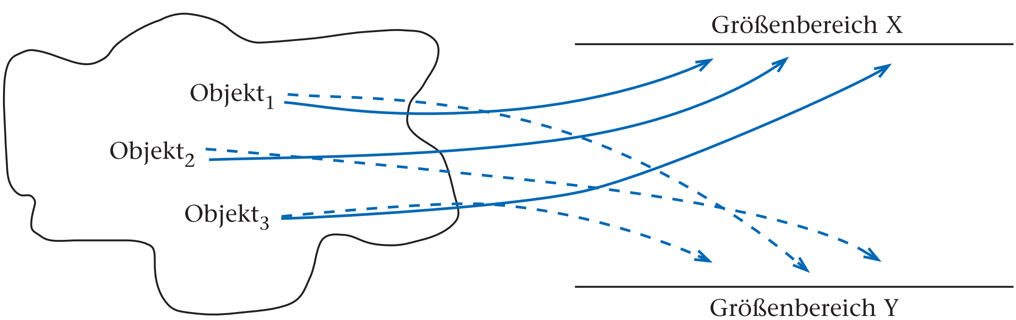


Abb. 1: Der Akt des Messens als Beschreibung von Objekteigenschaften durch Größenbereiche

Typisch ist, dass man oft verschiedene Wahlmöglichkeiten hat, welche Eigenschaft man als „Größe" auffassen möchte: Als Größe einer ebenen Figur kann man ihren Umfang, ihren Flächeninhalt, aber auch ihren Durchmesser, also ihre größte Breite verstehen. Welches Maß passend ist, hängt vom zu lösenden Problem ab (ein Gelände umzäunen, eine Wand streichen, ein Sofa durch einen langen Gang tragen).

Messen begegnet Schülerinnen und Schülern von der Grundschule an (Clements & Bright, 2003): In der Grundschularithmetik werden unter anderem Anzahlen aufgeteilt – die Frage „Wie oft passt die 5 in die 1000?" kann bereits als ein Messvorgang angesehen werden. Auch später beim Vergleich von Brüchen sucht man nach einer gemeinsamen Einheit, um Brüche mit unterschiedlichen Nennern vergleichen zu können. Expliziter wird der Akt des Messens, wenn man sich mit den so genannten bürgerlichen Größenbereichen Länge, Zeit oder Geldwert befasst (Kirsch, 1970). Schülerinnen und Schüler erleben, dass die Wahl von passenden Einheiten praktisch sein kann, aber auch zu neuen rechnerischen Herausforderungen führen kann. Konzeptuell wird es dann schwieriger, wenn die zu messenden Objekte komplexer werden und nicht mehr direkt verglichen werden können: Wie misst man die Größe einer Fläche? Sowohl die Wahl des jeweils passenden Größenkonzeptes („Flächeninhalt" oder „Umfang"?) als auch das Messverfahren („Zerlegen und Ergänzen" oder „Auslegen mit Einheiten") sind nicht mehr selbstverständlich und stoßen an ihre Grenzen. Schließlich erleben die Schülerinnen und Schüler die reellen Zahlen als Antwort auf das uralte Problem der Messung von Strecken, die ansonsten inkommensurabel, also ohne gemeinsames Maß sind.

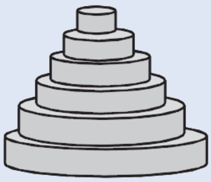
Dieser Versuch einer kurzen Zusammenfassung der Leitidee Messen und ihrer Entwicklung in der Primar- und in der Sekundarstufe I (ausführlicher bei Leuders & Barzel, 2013, für den Flächeninhalt: Vollrath, 1999) zeigt, dass die Lernenden zu Beginn der Sekundarstufe II viele konkrete Erfahrungen und einen ersten Eindruck von der Mächtigkeit des Messens als mathematischer Leitidee haben können. Ziel eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe sollte dabei nicht nur eine Erweiterung des Repertoires von Messverfahren sein, sondern auch eine höhere Bewusstheit für die allgemeinen Prinzipien und die Bedeutung des Messens. Das kann geschehen, indem gewisse „Grunderfahrungen des Messens" im Lernprozess explizit gemacht werden, beispielsweise die oben bereits erwähnte Kernidee des Messens als Reduzieren komplexer Situationen auf einfache Zahlen oder die Freiheiten bei der Festlegung von Maßen. Wie dies in den Themenbereichen der gymnasialen Oberstufe aussehen kann, soll im Folgenden an fünf thematisch zentralen Stellen und anhand von Aufgabenbeispielen skizziert werden.

2 Messen durch infinitesimales Ausschöpfen

Die Situation der Messung durch eine fortschreitend verfeinernde und im Prinzip nicht abbrechende Ausschöpfung ist den Lernenden bereits in der Sekundarstufe I mehrfach vor Augen getreten. Die Messung der Diagonalen des Einheitsquadrates verlangte faktisch eine Intervallschachtelung, und das Maß für die Wurzel aus 2 lässt sich als Ergebnis eines unendlich verfeinerten Messprozesses vorstellen. Die Messung von Umfang bzw. Flächeninhalt des Kreises führte auf eine ähnliche Situation. Möglicherweise ist die immer feinere Ausschöpfung der Kreisfläche durch immer kleinere Quadrate oder allgemeiner n-Ecke sogar diejenige Situation, in der die Unendlichkeit und Begrenztheit des Prozesses und auch die Existenz des Grenzwertes für Lernende am anschaulichsten wird.

Diese konzeptuellen Aspekte sollten sich Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Integralrechnung wieder in Erinnerung rufen können – am besten wenn sie den Flächeninhalt oder das Volumen von konkreten Formen näherungsweise numerisch bestimmen (für ein Unterrichtsbeispiel s. z. B. Meyer, 2009).

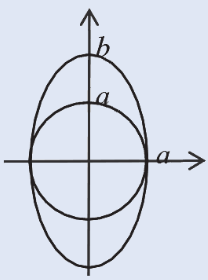
Was man von Lernenden schließlich erwarten kann, die das Ausschöpfungsprinzip als infinitesimalen Messprozess verstanden haben, zeigen die beiden Aufgaben 1 und 2. Wenn in den Bildungsstandards davon die Rede ist, dass Schülerinnen und Schüler „das bestimmte Integral deuten“ (KMK 2012, S. 25) und dass sie „Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen“ (KMK 2012, S. 23), dann sollte das nicht nur so verstanden werden, dass das infinitesimale Messen nur als Verfahren beherrscht und angewandt wird, sondern dass auch die dem Verfahren zugrunde liegende Idee der infinitesimalen Ausschöpfung durchdrungen wird und argumentativ genutzt werden kann.



$$V = \sum_{x=1}^{6} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{6}$$

Erklären Sie die Bedeutung der verschiedenen Teile der Summe am Bild. Wie hoch ist die Scheibenpyramide? Welchen Radius hat die größte Scheibe?
Was wird hier näherungsweise berechnet? Wenn die Scheibendicke, also die Feinheit dieser Näherung gegen 0 geht, entsteht ein Integral. Schreiben Sie es auf und bestimmen Sie seinen Wert.

Aufgabe 1: Scheibenpyramide



Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse.
Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Skizzieren Sie zunächst eine Annäherung der Kreisfläche durch eine Summe von Rechtecksflächen. Wie kann man hiervon auf die Ellipse schließen?

Aufgabe 2: Ellipsenflächeninhalt

3 Messen durch Quotientenbildung

Das Ausschöpfen ist ein Prozess, welcher auf Schritte des Zerlegens und Zusammensetzens aufbaut und sich daher für das Messen sogenannter *extensiver* Größen eignet. Anders sieht es beim Messen sogenannter *intensiver* Größen aus, welche zum Beispiel entstehen, wenn man zwei extensive Größen ins Verhältnis setzt (Jong, 1996): Masse und Volumen sind extensiv (d. h. sie addieren sich, wenn man verschiedene Systeme zusammenfügt), die Dichte als ihr Quotient ist intensiv, d. h. sie vergrößert sich nicht, wenn man zwei identische Körper zusammensetzt. Längen und Zeiten sind extensiv, die Geschwindigkeit als ihr Quotient ist eine intensive Größe, sie ändert sich nicht, wenn man bei gleichmäßigen Bewegungen Messzeit und -strecke vergrößert. Im einfachsten Fall sind intensive Größen räumlich homogen bzw. zeitlich konstant – so erleben Schülerinnen und Schüler sie in der Sekundarstufe I, wenn sie lernen, mit Proportionalitätsfaktoren und Steigungen zu arbeiten. Intensive Größen können aber auch in Raum und Zeit variieren, was neue Herausforderung an ihre Messung stellt. Der Wunsch, solche veränderliche Bewegungen wie etwa die Bewegungen von Planeten mathematisch zu beschreiben, hat Ende des 17. Jahrhunderts zur Erfindung der Infinitesimalrechung geführt. Für den Unterricht braucht es Situationen, in denen die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit und den Nutzen einer solchen „theoretisch beliebig genauen Messung“ erfassen können und welche die Grundvorstellungen von Änderungsrate und Gesamtbilanz bis hin zum Hauptsatz der Infinitesimalrechnung anschaulich machen können (z. B. die Berechnung von Geschwindigkeiten und Benzinverbrauch bei einem Navigationssystem, s. Leuders, 2010, oder der Wasserfluss in einem Stausee).

Bei Prozessen der zeitlichen Veränderung kann man sich zunutze machen, dass der theoretische Grenzprozess in der Mathematik in anschaulicher Beziehung zum praktischen Messprozess der Verkleinerung der Zeitintervalle steht. Aufgabe 3 zeigt, in welcher Form Schülerinnen und Schüler auf ein solches konzeptuelles Wissen zurückgreifen können (vgl. Leuders, 2010).

Der Bordcomputer eines Fahrzeugs erhält alle zwei Sekunden die Information über die seit Fahrbeginn gepumpte Benzinmenge $b(t)$ in Millilitern. Daraus soll der momentane Benzinverbrauch (in Millilitern pro Sekunde) berechnet werden. Beantworten und erläutern Sie an einem Beispielgraphen die folgenden Fragen.

a) Wie verläuft die Autofahrt vermutlich? Deuten Sie den Verlauf des Graphen.

b) Welche Bedeutung hat die Größe $p(t+2) = \frac{b(t+2) - b(t)}{2}$? Bestimmen Sie ihren Wert an einer Stelle mit geringem und an einer Stelle mit hohem Verbrauch.

c) Nehmen Sie an, die Benzinmenge $b(t)$ könne kontinuierlich und nicht nur alle 2 Sekunden gemessen werden. Was kann man tun, um auch die Größe $p(t)$ kontinuierlich anzugeben? Sie können für die Erläuterung eine Beispielfunktion $b(t) = 0{,}5t^2$ (für $t = 0, \ldots,$ 10s) nutzen.

Aufgabe 3: Bordcomputer

4 Messen im Rahmen des Koordinatisierens

Zu den großen mathematischen Ideen, die die moderne mathematische Beschreibung der Welt erst möglich machen, gehörte die Descart'sche Idee, dass Orte im Raum durch Zahlen wiedergegeben werden können (s. den Beitrag von Filler zur Leitidee Raum und Form, Kapitel 4 in diesem Band; vgl. auch Leuders, 2003, 2004; Leuders & Wittmann, 2013). Ein solches „Koordinatisieren" unserer Raumzeit machte die umfassende Mathematisierung grundlegender naturwissenschaftlicher Theorien erst möglich und erschloss auch innerhalb der Mathematik einen neuen Zugang zur Geometrie.

Die analytische Geometrie in der gymnasialen Oberstufe kann diese Leistung der Mathematik spürbar werden lassen: Probleme der Geometrie lassen sich in Probleme der Arithmetik und Algebra übersetzen und so mit neuen Methoden (z. B. der linearen Algebra und Vektorrechnung) behandeln. Es ist naheliegend, dass im Rahmen dieses „kartesischen Programmes" der Koordinatisierung auch die Frage entsteht, wie sich Messprobleme in Koordinatendarstellung übersetzen und vielleicht anders oder sogar besser lösen lassen. Längen, Flächeninhalte, Volumina, Winkel – alles Größen, mit denen Schülerinnen und Schüler als Eigenschaften geometrischer Objekte bereits aus der Sekundarstufe I vertraut sind – müssen nun übersetzt werden in die Sprache der Koordinatengeometrie und können dann auch analytisch als Eigenschaften der zugehörigen Koordinatengebilde untersucht werden.

Nachfolgend ist dieser Übersetzungsprozess idealtypisch an drei Beispielen dargestellt:

<table>
<tr><td colspan="3">„In der Geometrie habe ich gelernt, wie man die Größe X messen kann."</td></tr>
<tr><td>Die Länge der Diagonalen eines Rechtecks</td><td>Der Schnittwinkel zweier (Halb)Geraden</td><td>Der Flächeninhalt eines Parallelogramms</td></tr>
<tr><td colspan="3">„Nun habe ich hier ein Gebilde vor mir, das durch Koordinaten/Vektoren dargestellt ist, und frage: Wie kann ich die Größe X bestimmen? „Gemessen" ist das Objekt ja bereits, denn es liegen alle Informationen als Koordinaten/Vektoren vor."</td></tr>
<tr><td>A(1,2), B(1,5),
C(4,2), D(4,5)</td><td>$\vec{a} = \binom{1}{3}, \vec{b} = \binom{2}{1}$</td><td>$\vec{a} = \binom{5}{1}, \vec{b} = \binom{2}{6}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">„Ich erinnere mich an verschiedene Verfahren, wie ich diese Größe bisher rechnerisch bestimmen konnte."</td></tr>
<tr><td>Über ein rechtwinkliges Dreiecks mit dem Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$</td><td>Über den Kosinussatz:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$</td><td>Durch Zerlegen und Zusammensetzen aus Dreiecken und Rechtecken</td></tr>
<tr><td colspan="3">„Ich versuche, diese Verfahren auf die Daten in meinem koordinatisierten Objekt anzuwenden. Am besten wäre es, wenn ich das in allgemeiner Weise, also für beliebige Koordinaten tun kann."</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2}$</td><td>$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$</td><td>$F = 5 \cdot 6 - 2 \cdot 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">„Das Ergebnis ist ein möglicherweise neues/einfaches/schönes/nützliches Verfahren zur rechnerischen Bestimmung der Größe X im Rahmen der Koordinaten-/Vektorgeometrie."</td></tr>
</table>

Abstand: $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$	Winkelbestimmung: $\cos\gamma = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{a \cdot b}$	Determinante: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
„Die Verallgemeinerung von zwei auf drei Dimensionen erweitert das Feld der Probleme, die ich nun lösen kann."		
Abstand, auch in drei Dimensionen: $\sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2}$	Winkelbestimmung, auch in drei Dimensionen: $\cos\gamma = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	Volumen als dreidimensionale Determinante: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Die Suche nach geeigneten Berechnungsverfahren für geometrische Größen lässt sich somit auffassen als der Versuch einer analytischen Darstellung der Messung dieser Größen. Längen, Flächeninhalte, Volumina und Winkel werden dadurch zu abgeleiteten Größen, die sich allein aus Koordinatendaten bestimmen lassen.

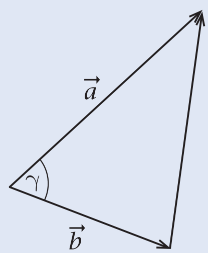
Die analytische Form eines Berechnungsverfahrens kann mitunter auf grundlegende Verfahren bzw. Konzepte der Koordinatengeometrie führen, wie im obigen Beispiel die Bestimmung der Raumdiagonale auf das Verfahren zur Berechnung des *Abstandes* zweier Punkte. Ebenso kann die Suche nach Berechnungsverfahren für das Volumen eines Parallelepipeds (bzw. des Parallelogramms) auf die *Determinante* oder die Suche nach einem Berechnungsverfahren für einen Winkel auf das *Skalarprodukt* führen.

In den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife ist vom Messen in der Geometrie die Rede. Hierbei ist nicht mehr das Bemühen um die Entwicklung neuer Größen und Verfahren zu deren Messung gemeint. Es geht vielmehr darum, für messbare Größen aus der Geometrie eine Übersetzung in die Sprache der Koordinaten zu finden und zu nutzen. Dabei entstehen nach dem Prinzip der vertikalen Mathematisierung verallgemeinernde Sichten auf die Geometrie und die Algebra.

Das folgende Beispiel (Aufgabe 4) zeigt, wie das Messproblem „Winkel" auf die „Entdeckung" und die Definition des Skalarproduktes führen kann (z. B. Reichel, 1980). Schülerinnen und Schüler können dies zunächst numerisch an Beispielen und dann algebraisch angehen.

Mithilfe des Kosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$ kann man einen Winkel in einem Dreieck bestimmen, wenn man die drei Seitenlängen kennt. Nutzen Sie dies, um den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu berechnen. Vereinfachen Sie die Berechnungsformel so weit wie möglich.

Möglicher Hinweis: Entwickeln Sie eine Formel, mit der sich $\cos\gamma$ aus den neun Koordinaten der Vektoren berechnen lässt. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

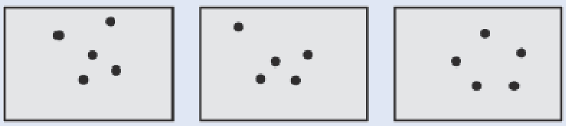


Aufgabe 4: Kosinussatz

5 Messen als Festlegung von statistischen Kenngrößen

Nicht nur in der Geometrie, sondern auch in der beschreibenden Statistik wird gemessen. Die Objekte, die hier gemessen werden, sind keine geometrischen, sondern Mengen von Daten, die man jeweils durch einen einfachen Zahlenwert charakterisieren möchte. Das kann z. B. ein Lagemaß wie das arithmetische Mittel m sein: $\{x_i\} \xrightarrow{m} \frac{1}{n} \sum_i x_i$. Das arithmetische Mittel ist nicht das einzige Lagemaß, auch mit dem Median kann man die „Lage" eines Datensatzes messen. Ein Lagemaß ist also in gewissem Sinne willkürlich wählbar, muss aber die Idee der „Lage" vernünftig übersetzen. Daher ist es nicht mehr sinnvoll, wie bei der Messung von Längen oder Flächeninhalten Additivität zu verlangen. Eine vernünftige Forderung an eine Lagemaß $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besteht vielmehr darin, dass es natürlich auf Verschiebungen der Daten reagiert: $L(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = L(x_1, \ldots, x_n) + a$. Bedeutsam für statistische Analysen sind auch Streumaße, die invariant gegen Verschiebungen sein sollten: $S(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = S(x_1, \ldots, x_n)$.

Was Schülerinnen und Schüler anhand von Maßen in der Statistik erleben können, ist vor allem die Tatsache, dass es durchaus große Spielräume für die Festlegung von Maßen geben kann (zum Mittelwert vgl. Hischer, 2002). Welches Maß man wählt, hängt insbesondere davon ab, welches sich im Sinne der zu klärenden Fragestellung als günstig erweist (vgl. z. B. Lengnink, 2009, zur Entwicklung von Maßen für die Leistung von Schwimmteams). Das folgende Beispiel (Aufgabe 5) zeigt, wie Schülerinnen und Schüler die Breite der Optionen für die Definition von Streumaßen ausloten können (aufbauend auf Becker & Shimada, 1997, S. 25).



a) Drei Schüler werfen mit Murmeln und haben vereinbart: Es gewinnt derjenige, dessen fünf Murmeln am wenigsten weit auseinander liegen bleiben. Immer wieder streiten sie sich darüber, wer gewonnen hat. Wie kann man den Grad, wie stark die Murmeln streuen, messen oder berechnen? Erfinden Sie ein „Maß für die Streuung", also eine Zahl, mit der man das Ausmaß des Zusammen-/Auseinanderliegens messen und vergleichen kann.
b) Erfinden Sie mindestens zwei weitere Maße und/oder tauschen Sie sich aus, welche anderen Maße gefunden wurden.
c) Welche Anordnung ist bei welchem Maß die beste? Gibt es Anordnungen, die für bestimmte Streumaße besonders gut sind und für andere nicht? Welche Eigenschaften erfassen Ihre Streumaße? Welche nicht?
d) Übersetzen Sie Ihre Streumaße für die zweidimensionale Verteilung auf den eindimensionalen Fall. Die Lage von n Murmeln ist hier durch die Werte x_1 bis x_n beschrieben. Wie würden Sie Ihre Streumaße in diesem Fall beschreiben. Erstellen Sie soweit möglich auch Formeln für die eindimensionalen Fälle.

Aufgabe 5: Murmelspiel

Lösungsskizze: Schülerinnen und Schüler finden meist eine Handvoll verschiedener Streumaße, z. B. der größte Abstand zwischen zwei Murmeln, die Summe (oder der Mittelwert) aller paarweisen Abstände, der Durchmesser des kleinsten Kreises, in den alle passen, oder der Flächeninhalt des kleinsten Rechtecks, in das alle passen. Die Übersetzung dieser Ideen führt dann mindestens auf die Streumaße Spannweite, Betragssumme, Quadratsumme (wenn der kartesische Abstand von zweidimensionalen Koordinaten berechnet wurde). Diese Maße kann man nun auf die Verschiebungsinvarianz überprüfen und ggf. noch gewichten, so dass sie geeignete Maßeinheiten haben bzw. günstig skalieren: $S(ax_1, \ldots, ax_n) = aS(x_1, \ldots, x_n)$

6 Messen als Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Auch das Modellieren von Wahrscheinlichkeitsverteilungen kann als Messprozess angesehen werden. Der Versuch einer systematischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit unterschiedlicher Ereigniskonstellationen führt auf die Definition eines Wahrscheinlichkeits-Maßes: Die zu messenden Objekte sind hier die Ereignisse als Untermengen eines Ergebnisraumes Ω, z. B. beim Würfeln: $\{1, 2, 3\} \xrightarrow{P} P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$. Ein Maß P für ihre Wahrscheinlichkeiten muss gerade die Eigenschaften erfüllen, die Kolmogorow zum Ausgangspunkt einer axiomatischen Wahrscheinlichkeitsdefinition gemacht hat: (1) $P(A) \geq 0$, (2) $P(\Omega) = 1$ und (3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $A \cap B = \emptyset$. Hier gibt es also eine Reihe von für den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten vernünftige Annahmen über die Eigenschaften der Maßfunktion.

Im Fall von kontinuierlichen Verteilungen können Schülerinnen und Schüler erleben, wie sich Integraltheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie als Ansatz des Messens im Bereich Daten und Zufall miteinander verbinden:

Kontinuierliche Verteilungen: $P(a < x < b) = \int_a^b p(x)\, dx, \quad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\, dx$

Diskrete Verteilungen: $P(\{a, \ldots, b\}) = \sum_{i=a}^{b} p(i), \; m = \sum_i i \cdot p(i)$

Die mathematisch vollständig saubere Behandlung der geeigneten Definitionsmengen und Funktionsklassen für kontinuierliche Verteilungen wird allerdings anspruchsvoll und führt auf weitergehende Formen der Maß- und Integrationstheorie, welche die Möglichkeiten der Schule übersteigen.

7 Fazit

Die notwendigerweise nur sehr knapp ausfallenden Überlegungen zu der Bedeutung des Messens in der gymnasialen Oberstufe konnten aufzeigen, wie breit das Thema in den verschiedenen Inhaltsbereichen verankert ist. Dabei wurde deutlich, dass eine mathematische Bildung, wie wir sie im Abitur erwarten, sich nicht nur in der Beherrschung all der damit zusammenhängenden Messprozeduren erschöpfen darf. Die inhaltsbezogenen Kompetenzformulierungen der Bildungsstandards könnte man womöglich auf eine so reduktionistische Weise missverstehen, denn hier stehen die konkreten mathematischen Handlungen der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund („Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen“, KMK, 2012, S. 23). Im Unterricht aber kann und muss darüber hinausgehend auch die „Idee des Messens“ immer wieder explizit gemacht werden. Das Ziel sollte sein, dass alle Schülerinnen und Schüler, die die allgemeinbildende Schule verlassen und möglicherweise nicht in ein Studium oder einen Beruf gehen, in dem das Messen weiter verwendet und reflektiert wird, aus ihrer Schulzeit ein Bewusstsein über Messen als besondere kulturelle Errungenschaft mitnehmen.

Literaturverzeichnis

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach. A new proposal for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H. & Bright, G. (2003). *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jong, O. de (1996). Verstehen von intensiven physikalischen Größen – Ein Vergleich der Vorstellungen von Lehrern und Schülern. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 2* (1), 3–10.

Kirsch, A. (1970). *Elementare Zahlen- und Größenbereiche.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kirsch, A. (1990). Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es ‚verstehen‘?. *Mathematische Semesterberichte, 37,* 216–239.

Lengnink, K. (2009). Vorstellungen bilden: Zwischen Lebenswelt und Mathematik. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 120–129). Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. (2003). Vom räumlichen Sehen zu Projektionen. Die kartesische Idee (nach-)erfinden. *mathematik lehren, 119,* 52–56.

Leuders, T. (2004). Raumgeometrie: Ein Unterricht mit Kernideen. *Der Mathematikunterricht, 50* (1), 5–28.

Leuders, T. (2010). Wie funktioniert ein Bordcomputer? Von der diskreten Beschreibung zum Hauptsatz der Infinitesimalrechnung. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52* (31), 30–34.

Leuders, T. & Barzel, B. (2014). Größen, Maße und Messen. In H. Linneweber-Lamerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 48–68). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B. & Prediger, S. (2011). „Das macht Sinn!“. Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 37,* 2–9.

Leuders, T. & Wittmann, G. (2013). Standortbestimmungen. Mit Koordinaten rechnen! *Praxis der Mathematik in der Schule, 49,* 2–8.

Meyer, D. (2009). Mit einer Tabellenkalkulation approximieren – Grenzprozesse bei der Volumen- und Flächenbestimmung in der Sekundarstufe I. *Praxis der Mathematik in der Schule, 51* (28), 29–32.

Reichel, H.-C. (1980). Zum Skalarprodukt im Unterricht an der Sekundarstufe, eine didaktische Analyse. *Didaktik der Mathematik, 8* (2), 102–132.

Vohns, A. (2002). Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Siegener Studien, 61,* 157–174.

Vollrath, H.-J. (1999). Ein Modell für das langfristige Lernen des Begriffs „Flächeninhalt“. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung, Festschrift für Heinrich Besuden* (S. 191–198). Oldenburg: Bültmann & Gerriets.

Wapner. L. M. (2007). *Aus 1 mach 2. Wie Mathematiker Kugeln verdoppeln.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

4. Die Leitidee Raum und Form

Andreas Filler

Die Leitidee Raum und Form kommt in der Sekundarstufe II hauptsächlich im Inhaltsbereich analytische Geometrie zum Tragen. Dabei wird an die gleichnamige Leitidee in der Primarstufe und der Sekundarstufe I angeknüpft, wobei jedoch in der Sekundarstufe II das Koordinatisieren als fundamentale Idee in den Mittelpunkt tritt. Der Begriff des Vektors und Anwendungen der Vektorrechnung in der Geometrie werden zu tragenden Säulen dieser Leitidee. In diesem Beitrag wird daher nach einer Diskussion von Aspekten des Vektorbegriffs auf vektorielle Beschreibungen geometrischer Objekte und darauf basierende Lösungen geometrischer Aufgaben eingegangen, wobei Vernetzungen zwischen Geometrie und Algebra eine besondere Bedeutung zukommt.

1 Die Leitidee Raum und Form von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II

Die zentralen, mit der Leitidee Raum und Form verbundenen Anliegen sind während der gesamten Schulzeit die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens und die Beschreibung des uns umgebenden Raumes mit mathematischen Mitteln. Die Leitidee befasst sich von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II mit räumlichen Beziehungen, mit Figuren und Körpern sowie deren Darstellungen und mit geometrischen Abbildungen. Während dies zunächst in der Primarstufe rein anschauungsbasiert erfolgt, wird in der Sekundarstufe I anschauliches Arbeiten zunehmend um exakte Beschreibungen und Begründungen ergänzt. Beginnend in der Primarstufe und im Verlauf der Sekundarstufe I werden zudem zunehmend Berechnungen an geometrischen Figuren durchgeführt: von Flächeninhalten einfacher geometrischer Figuren in der Primarstufe bis hin zu komplexeren Berechnungen mithilfe trigonometrischer Beziehungen am Ende der Sekundarstufe I. Die hierbei erfolgende zunehmende Vernetzung der Leitideen Raum und Form, Messen sowie Algorithmus und Zahl wird dann in der Sekundarstufe II mit der Behandlung der analytischen Geometrie fortgesetzt und erreicht eine neue Qualität (vgl. auch Beiträge von Kleine, Kapitel 2, und Leuders, Kapitel 3 in diesem Band).

2 Analytische Geometrie als vernetzendes Gebiet

In der Geschichte der Mathematik entstand die analytische Geometrie aus dem Bedürfnis heraus, geometrische Objekte algebraisch zu beschreiben und damit arithmetische und algebraische Methoden für die Lösung geometrischer Probleme nutzbar zu machen sowie umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu veranschaulichen. Ganz in diesem

Sinne ist die Leitidee Raum und Form in der Sekundarstufe II vielfältig und kaum trennbar mit anderen Leitideen vernetzt. So greifen die Leitideen Messen und Raum und Form im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II eng ineinander, implizieren jedoch eine Betrachtung zweier verschiedener Bereiche der analytischen Geometrie:

- Raum und Form: Beschreibung und Untersuchung der Lage geometrischer Objekte ohne die Verwendung von Maßen (d. h. insbesondere ohne Skalarprodukt) – *affine Geometrie*.
- Messen: Berechnungen von Längen- und Winkelmaßen (auf der Grundlage eines Skalarproduktes), metrische Eigenschaften geometrischer Objekte – *metrische Geometrie*.

Hinsichtlich der Leitidee Raum und Form sind somit vor allem affine Aspekte, insbesondere Lagebeziehungen, von Bedeutung. Traditionell stehen dabei Geraden und Ebenen als geometrische Objekte im Vordergrund, und es kommen zwei Arten von Beschreibungen zum Tragen:

- *Beschreibungen durch Gleichungen bzw. lineare Gleichungssysteme* (Bezüge zur Leitidee Algorithmus und Zahl),
- *Parameterdarstellungen* (Bezüge zu den Leitideen Algorithmus und Zahl und funktionaler Zusammenhang; vgl. den Beitrag von Henn und Oldenburg, Kapitel 5 in diesem Band).

3 Der Begriff des Vektors

Der Vektorbegriff ist von zentraler Bedeutung für die Leitidee Raum und Form in der Sekundarstufe II. Auch dieser Begriff verbindet mehrere Leitideen miteinander. In den Bildungsstandards kommt dies folgendermaßen zum Ausdruck:

- Raum und Form: „elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen" (KMK, 2012, S. 24);
- Algorithmus und Zahl: „einfache Sachverhalte mit Tupeln … beschreiben" (KMK, 2012, S. 22).

Die Bezüge zu diesen beiden Leitideen verdeutlichen auch mögliche Herangehensweisen an den Vektorbegriff in der Schule. Grob gesagt kann man zwischen 1) einer geometrisch orientierten und 2) einer arithmetisch-algebraisch orientierten Vektorauffassung unterscheiden. Eine detaillierte und stärker ausdifferenzierte Klassifikation schulrelevanter Interpretationen des Vektorbegriffs enthält Tietze, Klika und Wolpers (2000, S. 159–166).

1) *Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile (Pfeilklassen)*. Dieses Paradigma liegt vielen aktuellen Schulbüchern zu Grunde, wobei nicht immer explizit von Pfeilklassen gesprochen und fast immer der Bezug zu Verschiebungen hergestellt wird. Zu den großen Schwierigkeiten des „Pfeilklassenkonzepts" gehört die häufige Identifikation von Vektoren mit einzelnen Pfeilen, siehe Malle (2005b, S. 16 f.).

Das folgende Beispiel (s. Filler & Donevska-Todorova, 2012) verdeutlicht den engen Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Pfeilklassen und bereitet eine Zuordnung von Zahlenpaaren zu (als Verschiebungen bzw. Pfeilklassen eingeführten) Vektoren vor.

Beispiel 1: Koordinatendifferenzen bei Verschiebungspfeilen

Die folgende Aufgabe kann bereits in der Sekundarstufe I bei der Behandlung von Verschiebungen gestellt und dann bei der Einführung von Vektoren aufgegriffen werden.

Warum beschreiben alle in der Abbildung dargestellten Pfeile dieselbe Verschiebung?
Ermitteln Sie für jeden der Pfeile die Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes. Berechnen Sie für jeden Pfeil die Differenzen der x- und der y-Koordinaten:
x-Koordinatendifferenz = x-Koordinate der Pfeilspitze – x-Koordinate des Anfangspunktes,
y-Koordinatendifferenz = y-Koordinate der Pfeilspitze – y-Koordinate des Anfangspunktes.
Was stellen Sie fest?

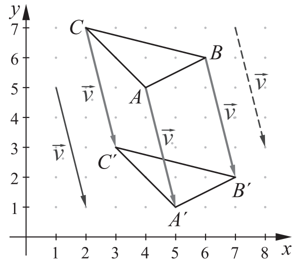


Abb. 1: Verschiebungspfeile

2) *Arithmetische Auffassung von Vektoren als n-Tupel* (speziell Paare und Tripel) reeller Zahlen. Um die Probleme mit dem Pfeilklassenkonzept zu vermeiden, plädiert u. a. Malle (2005a, S. 10) für eine primär arithmetisch-algebraisch orientierte Behandlung des Vektorbegriffs: „algebraische Vektoren mit geometrischer Deutung“. Allerdings treten Schwierigkeiten, insbesondere die Identifikation „Vektor = Pfeil“, auch bei einer arithmetisch-algebraischen Einführung des Vektorbegriffs auf, wenn Vektoren im Folgenden nur noch in geometrischen Kontexten verwendet werden (Wittmann, 2003, S. 373). Damit Lernende *sowohl* den geometrischen *als auch* den arithmetisch-algebraischen Charakter von Vektoren erfassen, muss mit ihnen auch in arithmetischen Kontexten gearbeitet werden. Geeignete Beispiele sind u. a. Stücklisten sowie das RGB-Modell der Beschreibung von Farben, bei dem jede Farbe additiv aus den drei Grundfarben Rot, Grün und Blau erzeugt wird und sich damit als Zahlentripel (welches die Rot-, Grün- und Blau-Anteile angibt) beschreiben lässt; siehe dazu etwa Filler und Donevska-Todorova (2012) oder die Arbeit von Fischer (2003) über mentale Modelle zum Vektorraumbegriff.

Vektoren in geometrischen und in arithmetisch-algebraischen Kontexten zu betrachten, soll nicht bedeuten, diese voneinander zu trennen – im Gegenteil: Lernende sollen die Erfahrung machen, dass die (zunächst völlig unterschiedlichen) Objekte Pfeilklassen und Tupel gemeinsame strukturelle Eigenschaften besitzen und geometrische Operationen mit Vektoren (Pfeilklassenaddition und -vervielfachung) denselben Rechengesetzen genügen wie arithmetische Operationen mit Tupeln – wobei auch Analogien zwischen Vektoren und Zahlen sichtbar werden. In interaktiven Visualisierungen lässt sich die Gültigkeit der Rechengesetze simultan für Pfeilklassen und zugehörige Zahlenpaare bzw. -tripel verdeutlichen.

Beispiel 2: Assoziativgesetz der Vektoraddition

Verändern Sie die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{z}$ durch Ziehen an den Endpunkten der zugehörigen Pfeile.

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} \qquad\qquad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$$

$$\left(\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

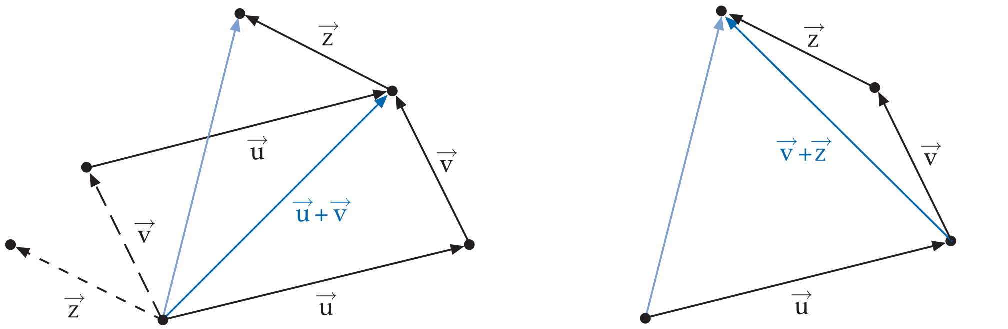


Abb. 2: Interaktive Visualisierung des Assoziativgesetz der Vektoraddition[1]

Die Erarbeitung von Rechengesetzen führt zu einer Annäherung an den *Begriff des Vektorraumes* (ohne dass dieser explizit thematisiert werden muss) und hat damit propädeutische Bedeutung für die lineare Algebra in Hochschulstudiengängen. Die Leitidee Raum und Form in der Sekundarstufe II bereitet damit eine grundlegende Änderung in der Auffassung des Begriffes Raum vor – ein Beispiel für einen *conceptual change* im Sinne von Vosniadou und Verschaffel (2004): vom „Raum" als Anschauungsraum (Schulmathematik) zum „Raum" als mathematische Struktur (Hochschulmathematik).

4 Analytische Beschreibung geometrischer Objekte

4.1 Beschreibung von Geraden und Ebenen durch Koordinatengleichungen und lineare Gleichungssysteme

Der durch die Bildungsstandards geforderte „Umgang mit Objekten im Raum" (KMK, 2012, S. 24) ist in der Sekundarstufe II unmittelbar mit der Fähigkeit verbunden, Geraden und Ebenen durch Gleichungen und Parameterdarstellungen zu beschreiben sowie Beziehungen zwischen der gegenseitigen Lage von Objekten im Raum und Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme herzustellen. Bereits 1973 schrieb Hans Freudenthal:

> Die Geometrie, die mit linearer Algebra auf der Schule möglich ist, ist ein trübes Abwasser. Der Höhepunkt ist etwa, zu beweisen, daß zwei verschiedene Geraden einen oder keinen Schnittpunkt haben. (Freudenthal, 1973, Bd. 2, S. 411)

---

1 Auf der Internetseite www.afiller.de/vektappl stehen Applets zu mehreren Rechengesetzen für Vektoren zur Verfügung.

In der Tat sind Lageuntersuchungen und Schnittpunktbestimmungen von Geraden und Ebenen aus geometrischer Sicht unattraktiv. Eine Legitimation ergibt sich jedoch aus der umgekehrten Denkrichtung: Geometrische Interpretationen dienen der *Veranschaulichung algebraischer Strukturen* (Lösungsmengen linearer Gleichungen bzw. Gleichungssysteme) *und Lösungsverfahren.* Die der Leitidee Raum und Form zugeordnete inhaltsbezogene Kompetenz „Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen … untersuchen" (KMK, 2012, S. 24) ist somit nicht als reiner Selbstzweck zu deuten, sondern es kommt ihr eine wesentliche *Hilfsfunktion* für das Verständnis von Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme (Leitidee Algorithmus und Zahl) zu.

Eine grundlegende Idee ist die *Einschränkung der Dimension* einer Grundmenge (Ebene bzw. Raum) durch Gleichungen, wodurch Teilmengen (Geraden bzw. Ebenen) beschrieben werden. Bereits in der Sekundarstufe I können Schülerinnen und Schüler lineare Gleichungssysteme (mit zwei Variablen) graphisch lösen und dabei folgende Erfahrungen machen:

- Lineare Gleichungen mit zwei Variablen beschreiben Geraden; von den prinzipiell als Lösungen in Frage kommenden Punkten (d. h. von allen Punkten der Ebene) „lässt" eine Gleichung die Punkte einer Geraden „übrig".
- Die Lösung eines linearen Gleichungssystems ergibt sich als Durchschnitt der Lösungsmengen der Einzelgleichungen (i. A. als Schnittpunkt zweier Geraden).

In der Sekundarstufe II kann daran angeknüpft werden, wobei jetzt für diese Zwecke vorrangig lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen betrachtet werden.

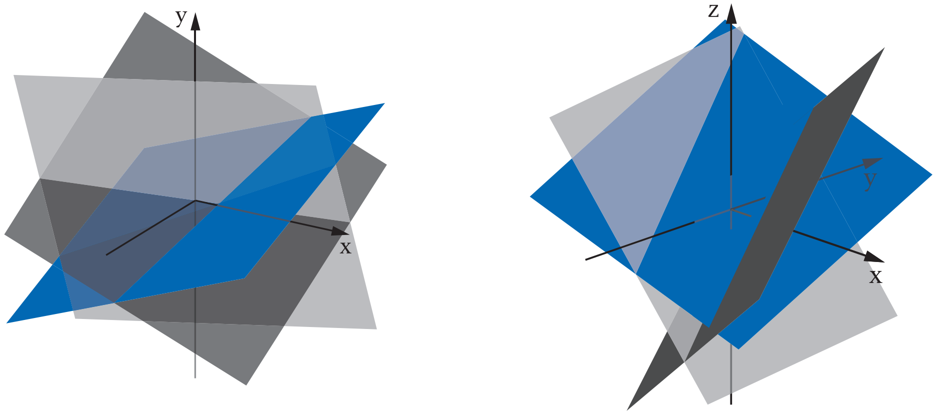
- Die Lösungsmenge einer einzigen Gleichung mit drei Variablen beschreibt eine Ebene, eine Gleichung „lässt" von der dreidimensionalen Grundmenge also eine zweidimensionale Lösungsmenge „übrig".
- Eine weitere (von der ersten Gleichung unabhängige[2]) Gleichung verringert die Dimension der Lösungsmenge abermals um Eins, so dass durch lineare Gleichungssysteme mit zwei unabhängigen Gleichungen Geraden beschrieben werden (die Schnittgeraden der durch die beiden Gleichungen beschriebenen Ebenen).
- Ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen und drei unabhängigen Gleichungen hat, falls es lösbar ist, eine nulldimensionale Lösungsmenge, die durch einen Punkt dargestellt wird. Geometrisch lässt sich dieser Punkt als Schnittpunkt der drei den Gleichungen zugeordneten Ebenen bestimmen, siehe Abbildung 3 (links).

Graphische Darstellungen der Lösungsmengen linearer Gleichungen bzw. Gleichungssysteme können sowohl ein anschaulich-strukturelles Verständnis solcher Lösungsmengen unterstützen als auch die Funktionsweise von Lösungsverfahren illustrieren[3]. So verändern die durch den Gauß-Algorithmus vorgenommenen Umformungen an dem Gleichungssystem

2 Zwei Gleichungen sind *voneinander unabhängig,* wenn die *linke Seite* einer Gleichung nicht durch Multiplikation der linken Seite der anderen Gleichung mit einer Zahl entsteht. Etwas komplizierter wird die elementare Beschreibung der *Unabhängigkeit* dreier Gleichungen. Hierzu ist es sinnvoll, Beispiele zu betrachten, bei denen die Multiplikation zweier Gleichungen mit reellen Zahlen und anschließende Addition die dritte Gleichung ergibt. Durch Visualisierungen können Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die drei Gleichungen in diesem Falle drei parallele Schnittgeraden und somit i. A. keinen gemeinsamen Schnittpunkt (bzw. im Spezialfall eine gemeinsame Schnittgerade) haben (vgl. Abbildung 3, rechts).

3 Für derartige Visualisierungen siehe die Internetseite http://www.afiller.de/gauss. Mithilfe eines Computeralgebrasystems (CAS) können Schülerinnen und Schüler auch selbst entsprechende Visualisierungen anfertigen und den Gauß-Algorithmus für Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Variablen simultan rechnerisch und graphisch durchführen. Ein entsprechendes Arbeitsblatt, bei dem dazu das freie CAS Maxima genutzt wird, enthält Filler (2010, S. 36).

in Abbildung 3 (links) die drei Gleichungen schrittweise so, dass zunächst Ebenen entstehen, die zu Koordinatenachsen und schließlich sogar zu Koordinatenebenen parallel sind, so dass sich die Koordinaten des Schnittpunktes unmittelbar aus den Gleichungen der drei Ebenen bzw. geometrisch aus ihren Schnittpunkten mit den Achsen ablesen lassen.



$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 8y & - & 4z & = & 2 \\ 4x & - & 4y & - & 9z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & + & 8z & = & 16 \\ 6x & - & y & + & 5z & = & -4 \\ -3x & - & 3y & + & 3z & = & -8 \end{array}$$

Abb. 3: Darstellung der durch die Gleichungen zweier linearer Gleichungssysteme beschriebenen Ebenen (links für ein LGS mit drei unabhängigen, rechts mit abhängigen Gleichungen)

4.2 Parameterdarstellungen

Bei der Behandlung von Parameterdarstellungen verbinden sich sogar drei Leitideen:

- Algorithmus und Zahl: Parametergleichungen ergeben sich beim Lösen linearer Gleichungen oder Gleichungssysteme, die nicht eindeutig lösbar sind, z. B. mithilfe des Gauß-Algorithmus. Sie beschreiben somit „Lösungsräume" (affine Unterräume), siehe z. B. Filler (2011, S. 2 ff., S. 15 ff. und S. 214 ff.).
- Raum und Form: Parametergleichungen eignen sich zur Beschreibung von Geraden und Ebenen (sowie auch Kurven und Flächen) – diese geometrische Sicht korrespondiert mit der zuvor angesprochenen algebraischen Sicht; bei einer verallgemeinerten Auffassung des Begriffes „Raum" vereinigen sich die geometrische und algebraische Sichtweise. In der Schule äußert sich dies u. a. darin, dass die Umwandlung von Koordinaten- in Parametergleichungen von Geraden oder Ebenen dem Lösen linearer Gleichungssysteme (bzw. Einzelgleichungen) entspricht.
- Funktionaler Zusammenhang: Parameterdarstellungen sind Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ (Geraden) bzw. von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ (Ebenen), wodurch reellen Zahlen bzw. Zahlenpaaren Punkte auf Geraden bzw. Ebenen zugeordnet werden.

Im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen gewinnt die *Auffassung geometrischer Objekte als Punktmengen* an Bedeutung, die eine die analytische Geometrie kennzeichnende Herangehensweise ist. Mit den dabei veränderten Sichtweisen (gegenüber der synthetischen Elementargeometrie) treten oft Schwierigkeiten auf (Wittmann, 2003, S. 377 ff.):

- Viele Schülerinnen und Schüler gelangen höchstens in Ansätzen zu einer Auffassung geometrischer Objekte als Punktmengen, dominierend bleibt die Auffassung von Geraden als ganzheitlichen, konkret-gegenständlichen Objekten, deren Lage im Raum durch einen Punkt und einen Richtungsvektor festgelegt ist.
- Der funktionale Zusammenhang zwischen dem Parameter (bzw. den Parametern) und den zugehörigen Punkten wird von Schülerinnen und Schülern oft nicht erkannt. Das Erkennen dieses Zusammenhangs geht über die Punktmengenauffassung noch hinaus, da die Abhängigkeit der Lage von Punkten von dem/den Parameter(n) zu erfassen ist.

Um die Einengung auf konkret-gegenständliche Konzepte von Parameterdarstellungen bei Lernenden zu vermeiden sowie den Punktmengengedanken und funktionale Zusammenhänge stärker einzubeziehen, sind vor allem zwei Herangehensweisen interessant:

- Lernende konstruieren bei einer gegebenen Parameterdarstellung der Form $P = P_0 + t\vec{a}$ die zu einigen Parameterwerten gehörenden Punkte und erkennen dabei, dass diese Punkte auf einer Geraden liegen. Davon ausgehend kann die Parameterbeschreibung von Geraden eingeführt werden. Weiterhin bieten sich Umkehrüberlegungen an, bei denen zu einzelnen Punkten von Geraden bzw. Kurven ermittelt wird, welchem Wert des Parameters sie zugeordnet sind.
- Es wird eine dynamische Sicht auf Geraden (und ggf. andere Kurven) als Bahnkurven hervorgehoben, wodurch Lernende mit dem Parameter eine konkrete Bedeutung verbinden können. Maaß (2003) schlägt dazu beispielsweise vor, Bewegungsbahnen von Flugzeugen zu untersuchen. Die Interpretation des Parameters als Zeit stellt dabei Bezüge zur Beschreibung von Bewegungen in der Physik her.

Gut eignet sich hinsichtlich der Herausbildung einer dynamischen Sichtweise auf Parameterdarstellungen die Erstellung von Computeranimationen mithilfe eines Computeralgebrasystems (CAS), dynamischer Mathematiksoftware (wie GeoGebra) oder Grafiksoftware (s. z. B. das folgende Beispiel aus Filler, 2012).

Beispiel 3: Unterschiedliche Parametrisierungen einer Geraden

Bei Animationen zeigen Parameterdarstellungen einen Aspekt, der die Gestalt der durch sie beschriebenen Objekte nicht beeinflusst: die Geschwindigkeit von Bewegungen.

So beschreiben z. B. die beiden Parameterdarstellungen

$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{a} \qquad (t \in \mathbb{R}_+) \qquad$ und

$P(t) = P_0 + t^2 \cdot \vec{a} \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$

dieselbe Halbgerade.

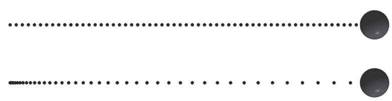


Abb. 4: Parametrisierungen einer Halbgeraden

Werden diese Parametergleichungen verwendet, um Animationen zu generieren, so ergibt (1) eine gleichförmige und (2) eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. In Abbildung 4 ist dies durch die Abstände der Punkte erkennbar; zwischen zwei benachbarten Punkten verstreicht jeweils gleich viel Zeit.

5 Vektoren und Parameterbeschreibungen beim Arbeiten mit geometrischen Objekten

Hinsichtlich der inhaltsbezogenen Kompetenz „Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden“ (KMK, 2012, S. 24) kommen vor allem folgende Strategien zur Anwendung:

- Darstellungen von Vektoren als *Linearkombinationen* anderer Vektoren sind eine zentrale Strategie bei der vektoriellen Lösung geometrischer Aufgaben (s. Beispiel 4). Ohne dass der Begriff *Basis* explizit thematisiert werden muss, entspricht dies der Findung von Koordinaten in anderen *Bezugssystemen* und ist daher essenziell für die Idee des *Koordinatisierens*.
  Ihre Leistungsfähigkeit zeigen vektorielle Methoden zum Beweisen geometrischer Sätze besonders beim Übergang von ebenen zu räumlichen Sachverhalten. So lässt sich mit den Vorgehensweisen des Beispiels 4 auch eine analoge Aussage über den Schwerpunkt eines Tetraeders verifizieren (s. z. B. Filler, 2011, S. 120).
- Um geradlinig bzw. ebenflächig begrenzte geometrische Objekte zu untersuchen und Berechnungen an ihnen vorzunehmen, ist es häufig sinnvoll, mit Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen zu arbeiten, auf denen Kanten oder Begrenzungsflächen der zu untersuchenden Figuren oder Körper liegen (Beispiel 5).

Beispiel 4: Der Schwerpunkt eines Dreiecks

In einem beliebigen Dreieck ΔABC schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt (dem Schwerpunkt). Dieser teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.

Dieser Satz kann recht einfach vektoriell bewiesen werden. Dazu ist es notwendig, die interessierenden Punkte durch Vektoren zu beschreiben und die zu betrachtenden Vektoren bezüglich eines geeigneten Bezugssystems als Linearkombinationen dazustellen.

Als Bezugssystem bieten sich zwei „Seitenvektoren“ des Dreiecks ΔABC an, z. B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Man kann mit elementarer Vektorrechnung zeigen, dass alle Seitenhalbierenden durch den Punkt S mit $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ verlaufen und dass S alle drei Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

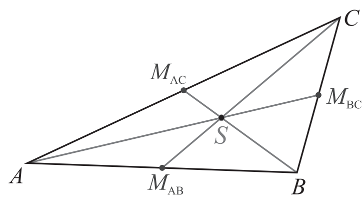


Abb. 5: Schwerpunkt eines Dreiecks

Beispiel 5: Bestimmung von Schnittpunkten

Die folgende, dem Schulbuch von Schulz und Stoye (1998, S. 147) entnommene Aufgabe vereint einfaches Koordinatisieren mit der Nutzung von Parameterdarstellungen für Schnittpunktbestimmungen.

Wählen Sie ein Koordinatensystem so, dass sich die Eckpunkte des in Abbildung 6 dargestellten Würfels durch ganzzahlige Koordinaten beschreiben lassen. Dabei sollen M_1 der Mittelpunkt der Würfelkante $\overline{EF}$, M_2 der Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$ und M_3 der Schnittpunkt der Diagonalen der Seitenfläche *ADHE* sein.

- Welche Koordinaten haben die Punkte M_1, M_2 und M_3?
- Beschreiben Sie die Gerade FM_3 und die Ebene BM_2M_1 durch Parametergleichungen.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes S der Geraden FM_3 durch die Ebene BM_2M_1.

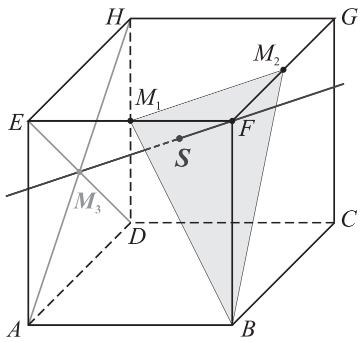


Abb. 6: Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene

6 Fazit

Dieses Kapitel kann nur einige zentrale Aspekte der analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II ansprechen und bezieht sich daher auf Vorgehensweisen der affinen Geometrie, die vorrangig der Leitidee Raum und Form zuzuordnen sind. In der Schule werden diese Vorgehensweisen oft eng mit Methoden der metrischen Geometrie verbunden, wozu das Skalarprodukt als Grundlage dient (s. hierzu den Beitrag von Leuders zur Leitidee Messen, Kapitel 3 in diesem Band). Vernetzungen zwischen den Leitideen Raum und Form sowie Messen, Zahl und funktionaler Zusammenhang kommt daher – wie hier an einigen Beispielen skizziert wurde – in einem lebendigen Unterricht der analytischen Geometrie eine besondere Bedeutung zu. Strukturelle Überlegungen stehen nicht im Vordergrund, können und sollten aber – wie am Beispiel des Vektorbegriffs beschrieben wurde – behutsam angebahnt werden, womit Schülerinnen und Schüler einen ersten Einblick in Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik gewinnen können, die in vielen Hochschulstudiengängen von Bedeutung sind.

Literaturverzeichnis

Dorier, J.-L. (Hrsg.). (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer.

Filler, A. (2010). Geometrisch veranschaulichen – algebraisch verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52* (32), 31–36.

Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum.

Filler, A. (2012). Creating computer graphics and animations based on parametric equations of lines and curves – proposals for mathematics education at upper secondary level. *Electronic Journal of Mathematics and Technology, 6* (1), 18–33.

Filler, A. & Donevska-Todorova, A. (2012). Der Vektorbegriff. Verschiedene Wege zu seiner Einführung. *Mathematik Lehren, 172* (6), 47–51.

Fischer, A. (2003). Mentale Modelle zum Vektorraumbegriff. *Mathematica Didactica, 26* (2), 91–114.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Maaß, K. (2003). Sicher durch die Lüfte – Geraden und Ebenen, die sich nicht schneiden dürfen. In H.-W. Henn & K. Maaß (Hrsg.), *Istron. Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 8* (S. 178–202). Hildesheim: Franzbecker.

Malle, G. (2005a). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik Lehren, 133,* 8–14.

Malle, G. (2005b). Schwierigkeiten mit Vektoren. *Mathematik Lehren, 133,* 16–19.

Schulz, W. & Stoye, W. (Hrsg.). (1998). *Analytische Geometrie Grundkurs*. Berlin: Volk und Wissen.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction, 14* (5), 445–451.

Wittmann, G. (2003). *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker.

5. Die Leitidee funktionaler Zusammenhang

Hans-Wolfgang Henn und Reinhard Oldenburg

Die Leitidee funktionaler Zusammenhang umfasst mehr als nur das Thema Funktionen. Sie umfasst das funktionale Denken im Allgemeinen mit all seiner Relevanz in verschiedenen mathematischen Kontexten, die von der Geometrie bis zur Stochastik die ganze Schulmathematik umfassen. Entsprechend breit und tief verstanden, sind funktionale Zusammenhänge weit mehr als ein mathematisches Konzept, sie bieten einen Rahmen für das Nachdenken über die Abhängigkeit und Unabhängigkeit verschiedenster Größen. Unterricht zu dieser Leitidee kann viele Kompetenzbereiche abdecken, weil etwa mit den für Lernende neuen Methoden der Analysis eine höhere Verständnisebene erreicht werden kann. Es zeigt sich dabei, dass es zur Abrundung der Inhalte und zur Verdeutlichung der Ziele sinnvoll ist, an einigen Stellen bewusst über die inhaltlichen Vorgaben der Bildungsstandards hinauszugehen.

1 Funktionales Denken

Die Leitidee funktionaler Zusammenhang steht in der Tradition des funktionalen Denkens. Durch sie erhalten Funktionen und die mit ihnen verbundenen Denkoperationen einen hohen Stellenwert im Bildungsangebot der Mathematik. Sie ermöglichen die Beschreibung von Änderungsprozessen und dienen der Beschreibung von Zahlbeziehungen. Damit schließen sie direkt an die Leitidee Muster und Strukturen der Primarstufe und an die Leitidee funktionaler Zusammenhang der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss an (KMK, 2004, 2005).

Funktionen sind ein grundlegendes und universelles Arbeitsmittel der Mathematik. Die Vielfalt ihrer Anwendungen in mathematischer Theorie und in der Praxis bringt es mit sich, dass Lernende verschiedene Aspekte von Funktionen kennen lernen müssen, u. a. um mit Funktionen (innermathematisch) argumentieren und (außermathematisch) modellieren zu können.

Die Relevanz der Leitidee funktionaler Zusammenhang wurde schon 1905 in dem von Felix Klein stark beeinflussten Beschluss der Meraner Konferenz der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte betont:

> Ferner wird es sich darum handeln, unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik doch auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschau-

ungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens. (Gutzmer, 1908, S. 53)

Heute versteht man „funktionales Denken“ als Denken in funktionalen Zusammenhängen, bei dem das Änderungsverhalten der beteiligten Größen im Mittelpunkt steht. Solche Überlegungen können das Denken in komplexen Situationen weit über die Mathematik hinaus strukturieren. Präzisiert und erweitert wird diese Sicht durch die didaktischen Aspekte des Funktionsbegriffs, wie sie beispielsweise in den drei Grundvorstellungen von Funktionen nach Malle (1993) beschrieben werden. Ähnliche Überlegungen findet man bei Vollrath (1989), der noch eine Hierarchie dazu entwickelt:
Zuordnungsvorstellung: Welche Werte einer Größe werden welchen Werten einer anderen Größe (eindeutig) zugeordnet? Beispiel: Uhrzeit und Körpertemperatur.
Ko-Variationsvorstellung: Wie verändert sich die eine Größe mit der anderen? Beispiel: Geschwindigkeit und Länge des Anhaltewegs.
Objektvorstellung: Wie verhält sich die Funktion als Ganzes, wie kann man sie als eigenständiges Objekt beschreiben? Beispiel: eine quadratische Funktion hat höchstens ein Maximum.

Dieser Band zeigt, dass zwischen den Leitideen vielfältige Beziehungen existieren, die sich z. B. dadurch ausdrücken, dass bestimmte Themen wie das Lösen von Gleichungen in den Standards der Sekundarstufen I und II verschiedenen Leitideen zugeordnet werden. Andere Beispiele, wie die Bewegung eines Flugzeugs längs einer Geraden, die in Parameterdarstellung gegeben wird, umfassen von vorneherein mehrere Leitideen (im Beispiel zusätzlich die Leitidee Raum und Form, s. den Beitrag von Filler, Kapitel 4 in diesem Band) und entsprechen damit den Forderungen der Meraner Reform. Damit die Unterrichtsthemen, die die Leitidee funktionaler Zusammenhang beinhalten, möglichst viele der allgemeinen mathematischen Kompetenzen fördern, müssen reichhaltige Vorstellungen entwickelt werden. Dazu sollten funktionale Zusammenhänge in unterschiedlichen Darstellungsformen repräsentiert und interpretiert werden. Semantik und Syntax sollten dabei in einer ausgewogenen Balance stehen, d. h. wesentlich ist die Erarbeitung und inhaltliche Interpretation von behandelten Verfahren. Sinnvolle Formalisierungen (etwa von Monotonie, Krümmungsverhalten oder Wahrscheinlichkeitszuschreibungen) nehmen ihren Ausgangspunkt in inhaltlichen Vorstellungen und modellieren diese mit den formalen Mitteln der Mathematik – dabei werden insbesondere die Kompetenzen mathematisch Argumentieren, mathematisch Modellieren und mit Mathematik symbolisch/formal/technisch Umgehen angesprochen.

Modellbildungen mit Funktionen im Sinne der ersten Winter'schen Grunderfahrung (Winter, 1995, S. 38; vgl. den einleitenden Beitrag von Blum, Kapitel 1 in diesem Band) haben in der Regel ihren Ausgangspunkt in geschätzten Größen (etwa bei Fermi-Aufgaben) bzw. in (mess-)fehlerbehafteten Datentabellen (s. etwa das Beispiel 4.1. in KMK, 2012, S. 33). Ein verständiger Umgang mit Messfehlern baut auf Kenntnissen der Analysis auf. Beim Umgehen mit Funktionen in Anwendungskontexten kann der Einsatz digitaler Medien sehr hilfreich sein (vgl. die Beiträge von Barzel und Greefrath und von Elschenbroich, Kapitel 12 und Kapitel 20 in diesem Band). Sie unterstützen u. a. die Berechnung von Funktionswerten, die Darstellung von Funktionsgraphen und Darstellungswechsel oder die Anpassung von Funktionen an gegebene Daten.

Die bisherigen Überlegungen führen zu Prinzipien für die oben zitierte „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“, die in den folgenden Abschnitten noch konkretisiert werden.

- Von Phänomenen zur Funktion: Funktionen sind in der Schule kein Selbstzweck, sondern dienen als Modelle für inner- oder außermathematische Probleme (vgl. Abschnitt 2).
- Nicht zu früh systematisieren und automatisieren: Das abstrakte Hantieren mit Funktionen bedarf tragfähiger Grundvorstellungen. Durch einen handlungs- und dialogorientierten Aufbau von funktionalen Vorstellungen können abstrakte Begriffe in konkreten Anschauungen wurzeln (vgl. Abschnitt 3).
- Die Welt auch mit der „funktionalen Brille“ sehen; z. B. „Wie verändert sich A, wenn sich B verändert?“ (vgl. Abschnitt 4).

2 Funktionen

Die wesentliche Sicht auf Funktionen ist heutzutage die als eindeutige Zuordnung von Objekten einer Menge zu Objekten einer anderen Menge. Synonym zur Bezeichnung Funktion gibt es die Bezeichnung *Abbildung;* zwischen Zahlenmengen wird meistens die erste, sonst die zweite Bezeichnung verwendet. Was genau eine *eindeutige Zuordnung* ist, bleibt zunächst etwas vage und muss in der Schule ab Jahrgang 7 anhand einer Vielzahl von Beispielen konkretisiert werden. Fachmathematisch wird mitunter die mengentheoretische Präzisierung einer Funktion als rechtseindeutige und linkstotale Relation vorgenommen. Dies ersetzt die anschauliche dynamische Zuordnung durch eine statische exakte Bedingung, was analog zur *ε-Definition* eines Grenzwerts gesehen werden kann, die das dynamische, aber vage „geht gegen“ präzisiert. Jedoch entspricht das Konzept der Zuordnung der historischen Genese des Funktionsbegriffs, und für das geforderte „funktionale Denken“ sind gerade diese dynamischen Vorstellungen von Bedeutung.

Neben der Entwicklung tragfähiger Vorstellungen sollte der Unterricht darauf zielen, Fehlvorstellungen zu vermeiden, die u. a. durch ungünstige Schreib- und Sprechweisen für Funktionen hervorgerufen werden können. Eine konsistente und übliche Schreibweise für die reinquadratische Funktion ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Es ist sinnvoll, zwischen der Funktion f selbst und dem Funktionsterm $f(x)$ zu unterscheiden. Die zugehörige Sprechweise ist „die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2$“. Gegen die ebenfalls übliche Sprechweise „die Funktion $f(x)$“ spricht, dass suggeriert werden könnte, jede Funktion habe einen Funktionsterm. Gegen „die Funktion $y = x^2$“ spricht, dass es sich hierbei um eine Gleichung mit zwei Variablen, nicht um eine Zuordnung handelt. Hinzu kommen die in der Physik üblichen Schreib- und Sichtweisen, etwa die Verwendung von Termen, wo die Mathematik Funktionen verwenden würde, und die Doppelrolle der Bezeichner: Das Weg-Zeit-Gesetz bei konstanter Geschwindigkeit wird geschrieben als $s = s(t) = v \cdot t$, d. h. dass s hier sowohl als Variable als auch als Funktionsname auftritt. Ein anderes Beispiel für problematische Schreibweisen ist die übliche Methode zur Bestimmung der (falls vorhandenen) Umkehrfunktion durch Vertauschen der Variablen.

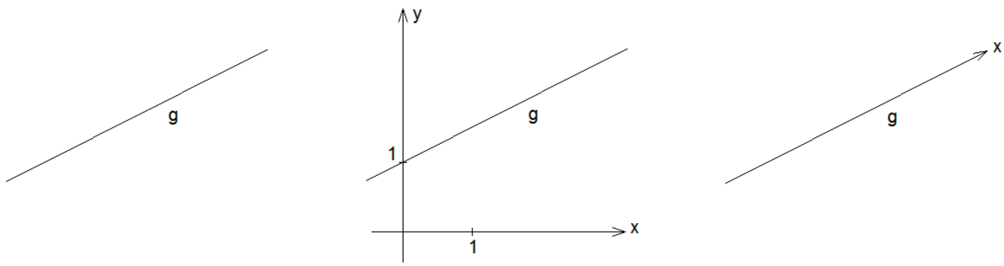
Funktionen sind in der Mathematik und in ihren Anwendungsfeldern u. a. deswegen so erfolgreich, weil mit einem einzigen mathematischen Konzept eine Fülle von Situationen beschreibbar ist. Einige Beispiele sollen dies belegen:

- Funktionen kommen in vielen verschiedenen mathematischen Gebieten vor: Folgen in der Arithmetik, reelle Funktionen in der (reellen) Analysis, komplexe Funktionen in der Funktionentheorie, Operatoren in der linearen Algebra, Abbildungen in der Geometrie, Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Stochastik u. v. m. Die Bildungsstandards fokussieren für die Schule auf eine für die Allgemeinbildung besonders relevante Auswahl davon.
- Funktionen beschreiben Berechnungen unabhängig vom Rechenweg (bspw. beschreiben die Terme in den Funktionen mit $f(x) = 2x + 2$ und $g(x) = 2(x + 1)$ unterschiedliche Rechenwege, aber die Funktionen sind gleich) – dieses Phänomen kann insbesondere zur Förderung der Kompetenzen mathematisch Argumentieren, technisch Arbeiten und mathematisch Kommunizieren verwendet werden.
- Funktionen modellieren Kausalität in der Physik: Ein bestimmter Wert einer verursachenden Größe bewirkt, dass sich ein Wert einer abhängigen Größe einstellt.
- Funktionen geben einen bestimmten Blick auf Relationen. Das Ohm'sche Gesetz $U = R \cdot I$ der Elektrizitätslehre spezifiziert zunächst eine Relation, keine Funktion. Abhängige und unabhängige Variable hängen von der konkreten Versuchsanordnung ab und legen etwa eine Sichtweise als Funktion $I(U, R) = U/R$ nahe.
- Funktionen modellieren beliebige Berechnungsprozesse in der Informatik: Was Computer überhaupt berechnen können, kann man auch als Rechnen mit Funktionen beschreiben (Church'sche These).
- Der Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$ kann als Funktion gedeutet werden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, also $(A, B) \mapsto M$; dadurch wird auch klar, dass man im Zugmodus eines dynamischen Geometrieprogramms nicht an M ziehen kann. Analoge Überlegungen gelten für Tabellenkalkulations-Software.

Diese „Funktionen" von Funktionen können schon in der Sekundarstufe I deutlich werden, wo die Schülerinnen und Schüler Funktionsgraphen und Wertetabellen als Darstellungsformen sowie Terme als Beschreibungsform kennen gelernt und vielfältig angewendet und interpretiert haben. Was bleibt dann noch für die Sekundarstufe II zu tun? Die Leitidee funktionaler Zusammenhang wird in mehreren Dimensionen erweitert. Die Tiefe des Verständnisses wird vergrößert, indem für die in der Schule üblichen Funktionenklassen auch ein formales und damit abstrakteres Begriffsverständnis angestrebt wird. Damit können insbesondere Funktionen als Objekte angesehen werden, auf die man weitere Operationen anwendet. Die Breite wird erweitert, indem neben reellwertigen Funktionen auch Parameterdarstellungen in der analytischen Geometrie betrachtet werden (vgl. den Beitrag von Filler, Kapitel 4 in diesem Band). Die übliche Betrachtung von *Funktionsfamilien mit Parametern* sollte dabei auch verbreitert werden zu Funktionen mehrerer Veränderlicher, deren Graphen im Falle von Funktionen zweier Variablen durch anschauliche Flächen gegeben sind (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 251 ff.). Diese Funktionstypen sind nicht Bestandteil der Standards, aber die Arbeit mit Tabellenkalkulationsprogrammen oder Computeralgebrasystemen erfordert Funktionen mehrerer Variabler. Regelflächen, die aus der Bewegung einer Geraden entstehen, ermöglichen so, die Forderung der Bildungsstandards „Lagebeziehungen von Geraden [beschreiben]" (KMK, 2012, S. 24) in origineller Weise umzusetzen. Hierbei wird auch klar, dass Parameter und Variablen sich nicht grundlegend unterscheiden, sondern nur verschiedene Betrachtungsweisen sind. Funktionen mehrerer Variablen begegnen den Lernenden in der Physik und den anderen Naturwissenschaften. Die Verbreiterung setzt sich fort, wenn geometrische Abbildungen als Funktionen gedeutet werden und stochastische Begriffsbildungen wie Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Zufallsvariablen ebenfalls als Funktionen erkannt werden. Zufallsvariablen müssen funktional gesehen werden, auch um ihnen Kenngrößen wie Erwartungswert und Varianz zuordnen zu können (vgl. den Beitrag von Biehler und Eichler, Kapitel 6 in diesem Band).

3 Funktionen als Gegenstände des Denkens und Argumentierens

Funktionales Denken bedeutet auch, dass Funktionen als Denkobjekte zur Verfügung stehen, die unabhängig von bestimmten Darstellungsformen sind und verschiedene Perspektiven zulassen. Um die geometrische Sicht „Gerade“ und die algebraische Sicht „Graph einer linearen Funktion“ als vernetzte Grundvorstellungen souverän zu erwerben, können Aufgaben wie die folgende in Abbildung 1a hilfreich sein.



(a) Gib eine Gleichung von g an (b1) $y = 0{,}5x + 1$ (b2) $y = 0$

Abb. 1: Gleichung einer Geraden: (a) Aufgabenstellung; (b1) und (b2) Lösungsvorschläge

Manche Schülerinnen und Schüler halten auch zu Beginn der Sekundarstufe II diese Aufgabe (a) für unlösbar, während andere als Lösung dafür wie in (b1) ein (im Sinne einer möglichst einfachen Beschreibung eher ungeschicktes) Koordinatensystem wählen, Einheiten an die Achsen schreiben und daraus eine konkrete Gleichung ableiten. Bei konsequent funktionalem Denken kann dagegen zuerst geschickt koordinatisiert werden (Vorschlag b2). Weitere Vernetzungen von Geometrie und Algebra liefert die Beschreibung von Ebenen durch Gleichungssysteme (vgl. den Beitrag von Filler, Kapitel 4 in diesem Band).

Wenn solche Aufgaben Probleme bereiten, mag das an mangelnder begrifflicher Klarheit und mangelnden Vorstellungen liegen. Die gleichen Gründe kann man bei Problemen im Argumentieren vermuteten. Deswegen ist es u. a. wichtig, dass zwischen Definitionen von Eigenschaften und Kriterien hierfür sorgfältig unterschieden wird. Die Monotonie einer Funktion auf einem Intervall oder Extrempunkte des Graphen sind Eigenschaften, die mit den Mitteln der Sekundarstufe I vollständig verstanden und korrekt definiert werden können. Es erscheint deswegen sinnvoll, solche Begriffe in jedem Fall *vor* dem Einstieg in die Analysis zu behandeln. Sonst besteht die Gefahr, dass Schülerinnen und Schüler die Positivität bzw. das Verschwinden der Ableitung als Definition von strenger Monotonie bzw. von Extrema missverstehen. Didaktisch wichtig ist das Formalisieren der Definitionen, bei dem typische erste Schülervorschläge wie „a ist Maximumstelle von f, wenn $f(x) < f(a)$ für alle erlaubten x gilt“ Anlässe zum Argumentieren geben.

4 Beispiele

Im Folgenden werden konkrete Beispiele für eine *Erziehung zum funktionalen Denken* beschrieben, die exemplarisch zeigen, wie die Leitidee funktionaler Zusammenhang im Unterricht thematisiert werden kann.

Beispiel 1: Der Hauptsatz

Auch mit diesem Beispiel (das die didaktische Zielrichtung bei Aufgaben wie „Bestand und Änderung“ der Bildungsstandards vertieft; s. KMK, 2012, S. 62) soll illustriert werden, dass funktionale Zusammenhänge, insbesondere wenn Grenzwertüberlegungen involviert sind (vgl. auch den Beitrag von Kleine, Kapitel 2 in diesem Band), auf Basis verschiedener Grundvorstellungen gedeutet werden können. Ableitungs- und Integralbegriff erschließen sich über mehrere Grundvorstellungen. Die durch den Hauptsatz gegebene Verbindung beider Begriffe erschließt sich dann optimal, wenn passende Grundvorstellungen aktiviert werden:

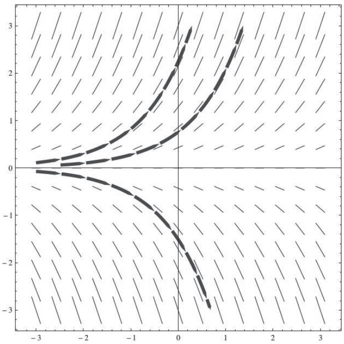


Abb. 2: Richtungsfeld $y = y'$

- Wenn die Ableitung als Steigung der Tangente an einen Funktionsgraphen verstanden wird, dann berechnet das Integral passende Funktionsgraphen aus den gegebenen Steigungen, erstellt also Kurven im Richtungsfeld (s. Abbildung 2; Büchter & Henn, 2010, S. 237). Diese – von den Bildungsstandards nicht geforderte – Sicht führt dazu, dass man zwei zentrale Begriffe der Standards, Steigung und Integral, vernetzend besser verstehen kann.
- Lokale Änderungsrate und Rekonstruktion des „Gesamteffekts“ aus Änderungsraten sind sich ergänzende Grundvorstellungen (insbesondere sind Ableitung und Integral Mittel, um diese zu messen; vgl. den Beitrag von Leuders, Kapitel 3 in diesem Band). Beide können im Unterricht parallel entwickelt werden, so dass sich der Hauptsatz anschaulich erschließt (vgl. Abbildung 3; Büchter & Henn, 2010, S. 99). In Abbildung 3 wird links aus dem Graphen einer Funktion f mit der Schrittweite $\Delta x = 1$ die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ als Näherungswert der lokalen Änderungsrate $f'(x)$ entnommen und hiermit (näherungsweise) der Graph der Änderungsratenfunktion oder Ableitung $g = f'$ von f im mittleren Bild gewonnen. Aus dem Graphen von g im mittleren Bild werden sukzessive die Werte $g(x) \cdot \Delta x$ entnommen und damit (näherungsweise) der Graph der zugehörigen Bestandsfunktion G im rechten Bild rekonstruiert. Bis auf eine eventuelle Verschiebung parallel zur y-Achse stimmen die Graphen von f und von G überein, Ableiten und Integrieren sind also Umkehroperationen zueinander! Mit diesem Verständnis erschließt sich auch die eben genannte Aufgabe „Bestand und Änderung" der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.

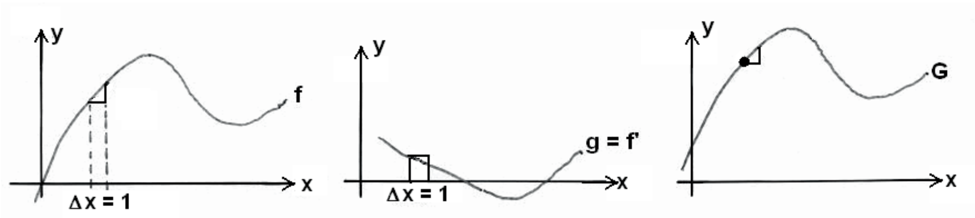


Abb. 3: Ableiten und Integrieren

- Wenn die Ableitung im Sinne der lokalen Approximierbarkeit als Proportionalitätsfaktor zwischen kleinen Änderungen verstanden wird, $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$, dann passt die Vorstellung vom Integral als Kumulation von Änderungen: $y_0 + \Delta y + \dots$
- Grenzwert von Differenzenquotienten und Grenzwert von Produktsummen ergänzen sich.
- Stellt man sich das Integral als Inhalt einer Fläche vor, die durch die Bewegung einer Strecke aufgebaut wird, so ist die lokale Änderungsrate des Flächeninhaltes die Länge dieser Strecke. Diese Vorstellung, die auf Newton zurückgeht, hat ihre Probleme, wenn man sie als rigorose Aussage verstehen will; aber sie erschließt etwa, dass für die Ableitung der Kreisflächenfunktion f mit $f(r) = \pi r^2$ gilt $f'(r) = 2\pi r$, also Ableitung nach dem Radius gleich Kreisumfang, und dass analog die Flächeninhaltsfunktion f des Quadrats mit $f(a) = a^2$ die Ableitung $f'(a) = 2a$ hat.

Beispiel 2: Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit

Eine zentrale Aufgabe des Stochastikunterrichts in beiden Sekundarstufen ist die Klärung der Beziehung von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten (vgl. den Beitrag von Biehler und Eichler, Kapitel 6 in diesem Band). Dabei treten funktionale Zusammenhänge in besonders variantenreicher Form auf. Wenn teilsymmetrische Körper als Spiel-„Würfel“ benutzt werden, ordnet man den Ergebnissen Wahrscheinlichkeiten teils auf Basis von Erfahrung, teils auf Basis von Symmetrieüberlegungen zu. Dabei wird deutlich sichtbar, dass Funktionswerte willkürlich (wenn auch je nach Zweck unterschiedlich gut) gesetzt werden können.

Die Erfahrung der Stabilisierung der relativen Häufigkeiten erweitert das Betrachtungsrepertoire der funktionalen Zusammenhänge um eine neue Sichtweise. Bei den konvergenten Grenzprozessen der Analysis kann garantiert werden, dass für jede vorgegebene positive Grenze ab einer bestimmten Stelle die Abweichungen kleiner sind als diese Grenze. In der Stochastik findet diese Annäherung nur mit hoher Wahrscheinlichkeit statt. Trotzdem kann beispielsweise für binomialverteilte Zufallsvariable X über die Sigma-Regeln $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < r\frac{\sigma}{n}\right) = p_r$ (wobei r die Zahl der Standardabweichungen im betrachteten Intervall ist und die Wahrscheinlichkeiten p_r durch Tabellen zugeordnet werden (z. B. $r = 1{,}96 \mapsto 95\,\% = p_r$)) die Beziehung der relativen Häufigkeiten $\frac{X}{n}$ und der Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden, und je nachdem, welche Variable als funktional abhängige gesehen wird, ergeben sich daraus die üblichen Aufgabentypen.

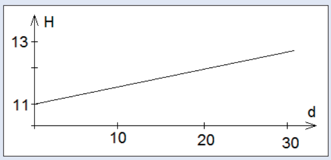
Beispiel 3: Abstände

Im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I werden alle Punkte der Ebene beschrieben, die von zwei gegebenen Geraden denselben Abstand haben. Dies führt zu Mittelparallelen bzw. Winkelhalbierenden. Im Sinne des Spiralprinzips kann in der Sekundarstufe II dieselbe Frage bezogen auf den Raum gestellt werden. Dies führt zunächst zu den entsprechenden Mittelparallelen- und Winkelhalbierenden-Ebenen. Was gilt aber für windschiefe Geraden? Gibt es jetzt überhaupt solche Punkte? „Funktionales Denken" gibt mit Hilfe eines Stetigkeitsarguments die Antwort: Man betrachtet das gemeinsame Lot der windschiefen Geraden g und h und denkt sich eine Gerade f, die parallel zum gemeinsamen Lot ist. Wandert ein Punkt $P \in f$ in die eine Richtung von f, so ist er sicherlich irgendwann von g weiter entfernt als von h (oder anders herum). Wandert P in die andere Richtung von f, so ist er irgendwann von h weiter entfernt als von g. Aus Stetigkeitsgründen muss also irgendwo dazwischen ein Punkt der Geraden f liegen, der von beiden Geraden gleich weit entfernt ist und damit zu den gesuchten Punkten gehört. Dieses Plausibilitätsargument gilt für *jede* Parallele zum gemeinsamen Lot und zeigt, dass es unendlich viele solcher Punkte gibt (vgl. Filler & Henn, 2015, Kapitel 5.5).

Beispiel 4: Die Sonne lacht in Berlin

Aufgabe 1 greift das Thema „Tageslängen" (vgl. die gleichnamige Aufgabe auf der CD) auf. Hier muss einerseits selbständig modelliert werden und andererseits stehen Aspekte der Analysis, vor allem die lokale Linearisierbarkeit differenzierbarer Funktionen im Vordergrund.

Der Graph zeigt den Verlauf der Tageslängen (d. h. der Zeitdauer zwischen Sonnenauf- und Sonnenuntergang) in Berlin für einen bestimmten Monat. Auf der x-Achse ist die Anzahl d der Tage ab Beginn dieses Monats aufgetragen, auf der y-Achse die jeweils zugehörige Tageslänge H (in Stunden). Die Punkte für die einzelnen Tage sind miteinander verbunden.



a) Welchen Monat zeigt das Schaubild?
b) Kann dieser Graph eine Gerade sein? Zeichnen Sie zuerst eine grobe Skizze für ein ganzes Jahr, um diese Frage einfacher beantworten zu können.

Aufgabe 1: Variante der Aufgabe „Tageslängen"

Nachdenken über a) erfordert eine Aktivierung von Kenntnissen aus dem Leben (erste Winter'sche Grunderfahrung, s. Abschnitt 1): Winterpunkt (21. Dezember) mit längster Nacht, Sommerpunkt (21. Juni) mit längstem Tag, Frühlingspunkt (21. März) und Herbstpunkt (21. September) mit Tag-Nacht-Gleiche (Tag und Nacht je 12h). Der gesuchte Monat ist also März oder September. Erst die Information „Berlin" führt zur Nordhalbkugel und damit zum März.
Bevor b) beantwortet werden kann, muss eine Vorstellung vom Graphen im Verlauf eines

Jahres gebildet werden. Bisher sind vom Graphen die beiden Punkte der Tag- und Nachtgleiche bekannt. Schätzen oder Erinnern führt zu $H = 17$ h am Sommerpunkt und $H = 7$ h am Winterpunkt. Damit hat man vier Punkte des gesuchten Graphen (Abbildung 4; Handskizzen sind hier die adäquate Darstellungsart).

Welche Funktion könnte zur Beschreibung geeignet sein? Auf jeden Fall muss sie periodisch mit einer Periode von einem Jahr sein, was in der zweiten Skizze angedeutet ist. Der einfachste Ansatz für das mathematische Modell ist eine (Co-)Sinusfunktion.

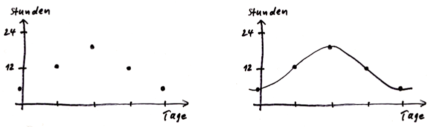


Abb. 4: Skizze für ein Jahr

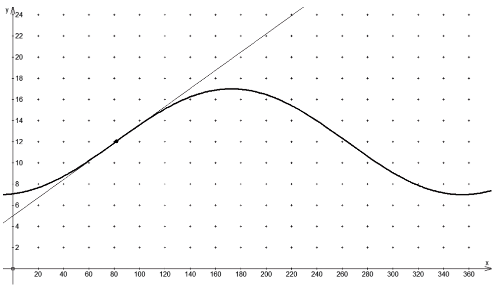


Abb. 5: Lokale Linearisierung rund um den März

Die vorhandenen Kompetenzen im Umgehen mit Funktionen müssen genutzt werden, um ausgehend von der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ eine „passende" Funktion g mit zu $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ modellieren. Hierfür wird die Wirkung von affinen Transformationen auf Funktionsgraphen, als Ganzes gesehen, benötigt, also funktionales Denken aus der Sekundarstufe I im Zusammenhang mit geometrischen Abbildungen. Unter Berücksichtigung der vier ausgezeichneten Punkte erhält man $g(x) = -5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x + 10)\right) + 12$ (mit x in Tagen, $g(x)$ in Stunden). Der mit einem Computertool gezeichnete Graph in Abbildung 5 und die Vorstellung der lokalen Linearisierung beantwortet jetzt die Frage b.: Die Tangente im Frühlingspunkt approximiert den Graphen lokal sehr gut. Betrachtet man dagegen ein Ein-Monats-Intervall um einen Extrempunkt herum, so sieht das ganz anders aus!

Wenn Schülerinnen und Schüler zu diesem Thema das Internet befragen, können sie feststellen, dass die genauen Verhältnisse für die tägliche Sonnenscheindauer an einem Ort der Erde komplizierter sind. Das (Co-)Sinus-Modell ist jedoch für die hier fraglichen Aspekte ausreichend.

Beispiel 5: Qualitative Kurvendiskussion

Neben der üblichen „Kurvendiskussion", bei der stets die Gefahr besteht, dass sie nur syntaktisch und kalkülorientiert abgearbeitet wird, sind zur Förderung des funktionalen Denkens Aufgaben zur „qualitativen Kurvendiskussion" wichtig (vgl. Hußmann, 2010). Funktionen werden zu Objekten, deren Graph als Ganzes gesehen wird. Zwei Beispiele sollen diesen Aspekt klar machen:

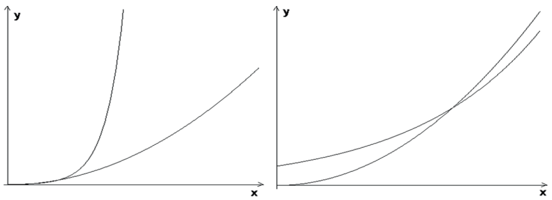


Abb. 6: $g(x)=2^x$ und $f(x) = x^2$

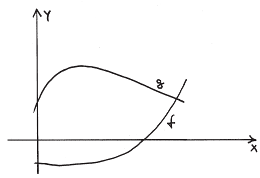


Abb. 7: Krümmung

Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = 2^x$ und f mit $f(x) = x^2$. Die beiden Abbildungen zeigen deren Graphen. Welcher Graph gehört zu g und welcher gehört zu f? Geben Sie auf den Achsen jeweils geeignete Einheiten an. Begründen Sie.

Aufgabe 2: Qualitative Kurvendiskussion (vgl. Abbildung 6)

Für die (zweimal ableitbaren) Funktionen f und g gelte $f(0) = -1$ und $g(0) = 1$. Wenn die Funktion f für $x \geq 0$ linksgekrümmt, die Funktion g für $x \geq 0$ rechtsgekrümmt ist, dann müssen sie sich doch, wie die Skizze andeutet, schneiden, oder?

Aufgabe 3: Qualitative Kurvendiskussion (vgl. Abbildung 7)

Bei Aufgabe 3 findet man mit etwas „funktionalem Nachdenken“ Gegenbeispiele.

Weitere Beispiele zur Schulung funktionalen Denkens sind Aufgaben zu Füllgraphen oder normative Aufgaben rund um den Steuertarif: Welche Eigenschaften sollte die Funktion Jahreseinkommen $\rightarrow$ Steuerbetrag besitzen?

5 Fazit

Schülerinnen und Schüler sollen einen im Sinne der Winter'schen Grunderfahrungen ausgewogenen Mathematikunterricht erfahren, d. h. der Unterricht soll durch eine dynamische Sicht zum Verstehen von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt und zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen, insbesondere auch zum Reflektieren und Problemlösen beitragen. Funktionale Zusammenhänge sind auch außerhalb der Mathematik von zentraler Bedeutung. Ein Beispiel (s. o.): Wie hängt das Steueraufkommen von der Einkommens- und Bevölkerungsentwicklung und der normativen Modellierung der Steuertarife ab? Ein weiteres Beispiel, das auch zur Leitidee Daten und Zufall passt: Wie interpretiert man die Körpergröße des eigenen Kindes im Somatogramm (Darstellung des Medians und weiterer Perzentile zur Körpergröße in Abhängigkeit vom Alter) des Untersuchungsheftes? Zu all solchen Fragen kann die Leitidee funktionaler Zusammenhang einen bedeutenden Beitrag leisten.

Literaturverzeichnis

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Filler, A. & Henn, H.-W. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Hußmann, S. (2010). Veränderung verstehen – aus qualitativer Sicht. *Praxis der Mathematik, 31,* 4–8.

Gutzmer, A. (1908). Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten – Reformvorschläge von Meran 1905. Leipzig: Teubner. Nachdruck in *Der Mathematikunterricht* (1980), 26 (6), 53–62.

KMK (2004) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss vom 04.12.2003*. München: Luchterhand.

KMK (2005) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München: Luchterhand.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10,* 3–37.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Braunschweig: Vieweg.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61,* 37–46.

6. Die Leitidee Daten und Zufall

Rolf Biehler und Andreas Eichler

Im Beitrag werden die Formulierungen der Bildungsstandards für die Sekundarstufe II zur Leitidee Daten und Zufall interpretiert. Die Interpretationen der einzelnen Aspekte dieser Leitidee werden dabei anhand von Aufgaben, die im Text genannt werden, illustriert. Zentrale Gedanken sind dabei die Orientierung an realen Daten und die Beurteilung dieser Daten mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie.

1 Einleitung

Volkszählungen steuern die Verteilung staatlicher Mittel. Medizinischer Fortschritt beruht auf systematisch analysierten Daten. Statistische Daten sind die Grundlage der Wirtschafts- und der Finanzmarktsteuerung. Kurz: Politische, wirtschaftliche und gesellschaftliche Entscheidungsprozesse beruhen häufig auf der Analyse statistischer Daten, deren beurteilende Analyse immer auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung braucht. Daher sind die Statistik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung für alle Schülerinnen und Schüler ein unverzichtbarer Teil der Allgemeinbildung, um kritikfähige Bürgerinnen und Bürger in einem modernen Staat sein zu können. Umgekehrt gilt: „Citizens who cannot properly interpret quantitative data are, in this day and age, functionally illiterate" (Mathematical Science Education Board & National Research Council, 1990, S. 8).

Wie die Grundideen der Statistik und der Wahrscheinlichkeitstheorie als Bestandteil der Allgemeinbildung in der Schule aufgebaut werden können, ist in den nationalen Bildungsstandards skizziert (KMK, 2004 und 2012). Diese geben mit kurzen Formulierungen zur Leitidee Daten und Zufall aber nur eine Richtung vor, die mit Leben gefüllt werden muss. Dies ist für den Bereich der Sekundarstufe I etwa in Biehler und Hartung (2006) oder Eichler und Vogel (2013) geschehen. Für die Sekundarstufe II stellen wir in diesem Kapitel einen an Biehler, Eichler, Engel und Warmuth (2010) orientierten Ansatz vor, wie die in der Mittelstufe angelegten Grundideen hinsichtlich des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sowie dessen Anwendung in der Statistik systematisiert und ausgebaut werden können. Wesentliche Aspekte der Leitidee Daten und Zufall werden mit Ausnahme der Simulation, die in Kapitel 21 dieses Bandes gesondert behandelt wird, exemplarisch anhand von Aufgaben diskutiert. Alle Aufgaben nutzen auch den Rechner als obligatorisches Arbeitsmittel der Sekundarstufe II.

2 Daten als Grundlage der Leitidee

In der Sekundarstufe II soll der Stochastikunterricht darauf basieren, „exemplarisch statistische Erhebungen zu planen und zu beurteilen“ (KMK, 2012, S. 26). Damit wird der Weg der Bildungsstandards für die Sekundarstufe I hin zu einem datenorientierten Stochastikcurriculum weitergeführt. Das hat Implikationen:

- Daten müssen *ernst genommen,* ihre Quellen angegeben und fiktive Daten als solche kenntlich gemacht werden.
- Daten sind zentral bei der *Modellierung:* Sie dienen der Gewinnung und Validierung von Modellen; z. B. sagen Wahrscheinlichkeitsmodelle Strukturen in realen Daten voraus.

Die Anwendbarkeit statistischer Methoden zur Modellierung setzt dabei häufig voraus, dass Daten aus einer Zufallsstichprobe oder einem randomisierten Experiment stammen. Schülerinnen und Schüler sollten dazu bereits in der Sekundarstufe I erfahren haben, dass verzerrte Stichproben (es werden etwa nur Schülerinnen, nur die Leistungsbesten oder nur Internetnutzer berücksichtigt) die Ergebnisse einer Datenanalyse erheblich beeinflussen können. Als Erweiterung in der Sekundarstufe II kann die Erfahrung aufgebaut werden, dass eine auf dem Zufall basierende Stichprobenauswahl Repräsentativität ermöglichen und Verzerrungen vermeiden kann. Wir illustrieren den zuletzt genannten Aspekt anhand einer Umfrage unter Studierenden der Universität Münster, die in einer Vorlesung zur Stochastik für Lehramtsstudierende erzeugt wurde (zu einer ausführlicheren Aufgabenstellung vgl. Eichler & Vogel, 2015; die Daten sind unter
www.leitideedatenundzufall/leitfadenstochastik_index.html erhältlich):

Nehmen Sie die erhobenen 1082 Studierenden der Universität Münster als (virtuelle) Grundgesamtheit. Ziehen Sie zufällige und willkürlich festgelegte Stichproben vom Umfang 100, um relative Häufigkeiten verschiedener Merkmale zu schätzen. Vergleichen Sie die Schätzungen jeweils mit der tatsächlichen Häufigkeit in der Stichprobe.

Aufgabe 1: Studierendenbefragung Universität Münster

Der Vergleich zufälliger und willkürlicher Stichproben wird an einer virtuell als Grundgesamtheit festlegten Menge von Studierenden durchgeführt, da im Gegensatz zur Realität zufällige wie willkürliche Stichproben mit der Grundgesamtheit verglichen werden können (vgl. Eichler & Vogel, 2015). Von den zufällig gezogenen Stichproben ist bei $n = 100$ zu erwarten, dass in etwa 95 % der Fälle die relative Häufigkeit eines Merkmals in der Stichprobe höchstens um 0,1 von der tatsächlichen relativen Häufigkeit in der Grundgesamtheit abweicht (s. den Beitrag von Biehler, Eichler, Löding und Stender, Kapitel 21 in diesem Band). Diese vereinfachte Abschätzung muss Lernenden noch nicht bekannt sein, sondern kann später im Unterricht aufgenommen werden. Gerade die Berechenbarkeit der zu erwartenden Abweichung sollte aber als zentraler Vorteil der Entnahme von Zufallsstichproben betont werden.

Wir nehmen nur eines von vielen möglichen Untersuchungsbeispielen exemplarisch heraus. Mit einer Stichprobe vom Umfang 100 soll der Anteil der „nah“ (weniger als 5 km entfernt) an der Hochschule wohnenden Studierenden geschätzt werden, der in der Grundgesamtheit 62,7 % beträgt.

Die Verteilung der Schätzungen aus 100 zufälligen Stichproben sind in Abbildung 1 dargestellt. Dort sind 3 % mehr als 0,1 von der tatsächlichen Häufigkeit entfernt. Als willkürliche Stichproben sind (1) die ersten 100 weiblichen Studierenden, (2) die ersten hundert Bahnfahrer und (3) die ersten 100 bei den Eltern wohnenden Studierenden ausgewählt worden.

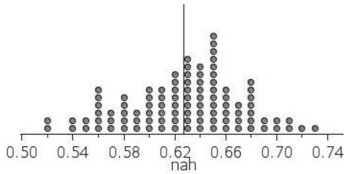


Abb. 1: Schätzung des Anteils der nah wohnenden Studierenden aus 100 Zufallsstichproben vom Umfang n = 100

Im ersten Fall ergibt sich, dass 60 % der (weiblichen) Studierenden der Stichprobe nah zur Hochschule wohnen. Möglicherweise verzerrt also die Beschränkung auf weibliche Studierende die Stichprobe hinsichtlich der Wohnentfernung nicht. Deutlich verzerren dagegen die anderen Einschränkungen die Stichprobe. So wohnen 3 % der Bahnfahrer (in der Stichprobe) und 9 % der bei den Eltern wohnenden Studierenden weniger als 5 km von der Hochschule entfernt. Diese Verzerrung ist zu erwarten gewesen, da Bahnfahren keinen Nutzen hat, wenn man nah zur Hochschule wohnt. Auch hat nur ein geringer Anteil der Studierenden Eltern, die nah zur Hochschule wohnen. Die hier konstruierten Verzerrungen einer Stichprobe sollen in der Realität vermieden werden. Da aber in der Regel nicht alle verzerrenden Merkmale (hier etwa die Bahnfahrer) für eine Schätzung voraussehbar sind, kann die Zufallsstichprobe als sinnvolles Mittel der Stichprobenziehung erarbeitet werden.

Eine sinnvolle Erweiterung im gegebenen Kontext wäre die Thematisierung geschichteter Zufallsstichproben – die zufällige Stichprobenziehung wird gemäß der Verteilung von Studierenden, die bei den Eltern wohnen oder nicht, aufgeteilt. Neben der Planung von Erhebungen ist schließlich die kritische Analyse von Fremderhebungen eine Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler für die Notwendigkeit, gute Daten zu erheben, zu sensibilisieren.

3 Modellieren mehrstufiger zufälliger Vorgänge

Für den Stochastikunterricht sind die Unterscheidung von stochastischer Abhängigkeit und Unabhängigkeit sowie die Unterscheidung von Realität und Modell wichtig. Schulbücher setzen aber bei zweistufigen Zufallsexperimenten oft die Unabhängigkeit voraus, ohne dies zu thematisieren: Weder ist das Wetter am Sonntag vom Wetter am Samstag, noch sind Ampelschaltungen entlang einer Straße gewöhnlich voneinander stochastisch unabhängig. Eine Annäherung an den Begriff der Unabhängigkeit kann gut an einem realen Datensatz untersucht werden. Etwa kann man die Frage nach der Abhängigkeit der Merkmale Computerbesitz und Geschlecht mit „Zeilenprozenten“ der Vierfeldertafel unten qualitativ beantworten (vgl. Biehler, Hofmann, Maxara & Prömmel, 2011). Man bildet bei den absoluten Häufigkeiten aus Abbildung 2 (links) zeilenweise die Prozente für jede Zelle. Während nur 14 % der Jungen keinen Computer haben, sind das bei den Mädchen 32 %. Wann würde man aber sagen, dass der Computerbesitz nicht vom Geschlecht abhängt? Intuitiv wird man das dann sagen, wenn die prozentuale Verteilung auf ja/nein in beiden Geschlechtergruppen (annähernd) gleich ist. Bei gleicher Randverteilung wäre das bei der Tabelle in Abbildung 2 (rechts) der Fall.

	Computer	Kein Computer	Summe
Männlich	69	11	80
Weiblich	75	36	111
Summe	144	47	191

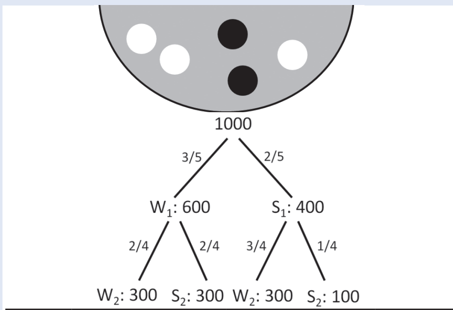
	Computer	Kein Computer	Summe
Männlich	60	20	80
Weiblich	84	27	111
Summe	144	47	191

Abb. 2: Vierfeldertafel für Computerbesitz und Geschlecht (vgl. Biehler et al., 2011); links: reale Daten; rechts: fiktive Daten mit gleicher Randverteilung bei stochastischer Unabhängigkeit.

Ausgehend von solchen Betrachtungen in der *Realität* bzw. in der Datenebene, die qualitativ und beschreibend in der Sekundarstufe I thematisiert werden könnten, sollen in der Sekundarstufe II die gegenseitig vorhandene bzw. nicht vorhandene Abhängigkeit mathematisch in einem *Modell* gefasst und anhand einfacher Beispiele „Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit untersucht" werden (KMK, 2012, S. 26). Eine Betrachtung abhängiger und unabhängiger Teilvorgänge auf der *Modell*ebene kann anhand folgender Aufgabe geschehen.

In einer Urne liegen drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Zeichnen Sie einen Baum zum zweimaligen Zug aus der Urne mit und ohne Zurücklegen der Kugeln.

Aufgabe 2: Zweimaliger Urnenzug



	W_2	S_2	Summe
W_1	$W_1 \cap W_2 : 300$	$W_1 \cap S_2 : 300$	600
S_1	$S_1 \cap W_2 : 300$	$S_1 \cap S_2 : 100$	400
Summe	600	400	1000

Abb. 3: Baum mit natürlichen Häufigkeiten (n = 1000) und Vierfeldertafel beim Ziehen ohne Zurücklegen

Die Urne als Hilfsmodell bietet einen Einstieg, abhängige und unabhängige Teilvorgänge sequentiell anschaulich mit dem Baum zu untersuchen. Weiterhin kann mit dem Baum und zusätzlich einer Vierfeldertafel die Verteilung von natürlichen Häufigkeiten in einem idealisierten Experiment betrachtet werden (Abbildung 3).

Schließlich ist es mit der vom Kontext weitgehend befreiten Aufgabe möglich, die für Schülerinnen und Schüler schwierige Unterscheidung bedingender Ereignisse sowie konjugierter Ereignisse und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten zu diskutieren, in dem Beispiel also etwa zu den unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten $P(S_2|W_1) = \frac{2}{4}$, $P(W_1|S_2) = \frac{3}{4}$ und $P(W_1 \cap S_2) = P(S_2 \cap W_1) = \frac{6}{20}$.

Ein für uns wesentlicher Aspekt ist allerdings die Modellierung der *Realität* hinsichtlich stochastischer Abhängigkeit oder Unabhängigkeit. Beispielsweise könnte man beim zweifachen Münzwurf durch Simulation untersuchen, welche Abweichungen von der idealen Verteilung, bei der alle vier Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ haben, noch mit der Modellannahme der Unabhängigkeit beider Würfe verträglich sind (s. Biehler et al., 2011, S.133ff. und Kapitel 21 in diesem Band). Zwar kann man im Modell von der Unabhängigkeit der beiden Würfe ausgehen; die im Modell prognostizierte Unabhängigkeit zweier Ereignisse mit $P(A|B) = P(A)$ wird in den im Experiment erzeugten Häufigkeiten im Allgemeinen aber nicht exakt, sondern nur annähernd zu beobachten sein. Bei mehrstufigen zufälligen Vorgängen, die sich nicht auf Zufallsgeneratoren wie Münze, Würfel, Urne etc. beziehen, ist es in der Regel diskussionswürdig, von der Unabhängigkeit von Teilvorgängen auszugehen. Im Zweifelsfall ist die Hypothese der Unabhängigkeit anhand realer Daten zu überprüfen (vgl. Abschnitt 3 in Biehler et al., Kapitel 21 in diesem Band).

Die stochastische Unabhängigkeit hat als häufig gewählte Annahme bei mehrstufigen zufälligen Vorgängen für die weitere Entwicklung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe in der Sekundarstufe II eine zentrale Bedeutung. Doch auch Vorgänge mit abhängigen Stufen spielen in der Realität eine wichtige Rolle. Daher hat es für Schülerinnen und Schüler einen erheblichen Bildungswert, „Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln [zu] untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten [zu] lösen“ (KMK, 2012, S. 26), da solche Problemstellungen in der Realität präsent sind und zudem Fehlschlüsse provozieren (Gigerenzer, 2002). Etwa eignet sich eine aktuelle Variante des HIV-Tests (für eine ausführlichere Aufgabenstellung vgl. Eichler & Vogel, 2015), um die Verwechslung von bedingten Wahrscheinlichkeiten wie z. B. von P (infiziert | Test positiv) und P (Test positiv | infiziert) zu thematisieren und zudem die Anwendbarkeit elementarer Stochastik in der Realität hervorzuheben.

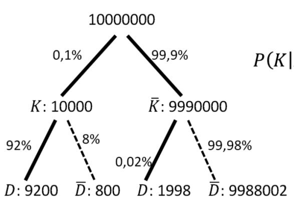
HIV-Schnelltest für zu Hause: Wirkungsvolle Notlösung
Von Irene Berres
Die Arzneimittelbehörde der USA hat einen HIV-Schnelltest für zu Hause zugelassen. Die vereinfachte Methode könnte dazu führen, dass sich mehr Menschen testen lassen. Die fehlende Beratung birgt jedoch auch Gefahren.

(Aus: Spiegel Online vom 04. Juli 2012, http://www.spiegel.de/gesundheit/diagnose/a-842460.html [Stand: 07.07.2014])

In Deutschland kann man von einer Basisrate von 0,1 % an HIV-Infizierten ausgehen. Der Hersteller des Schnelltests gibt an, dass 93 % der infizierten Personen mit dem Test richtig und nur 0,02 % der Nichtinfizierten fälschlicherweise als positiv diagnostiziert werden. Warum wird vor dem Test gewarnt?

Aufgabe 3: HIV-Schnelltest

Insbesondere für diesen Bereich plädieren wir dafür, die in den Bildungsstandards genannten Hilfsmittel des Baumdiagramms und der Vierfeldertafel um das Baumdiagramm mit natürlichen Häufigkeiten und das Einheitsquadrat zu erweitern. Ersteres ermöglicht bereits in der Sekundarstufe I den Einstieg in entsprechende Kontexte (vgl. Biehler & Hartung, 2006; Wassner, 2004) und eignet sich zur schnellen Lösung von Problemstellungen wie der Krankheitsdiagnose. Letzteres eignet sich, um die Strukturen im Rahmen der Anwendung des Satzes von Bayes zu untersuchen (Abbildung 4; Bea, 1995).



$$P(K|D) = \frac{9200}{9200 + 1998} \approx 0{,}82$$

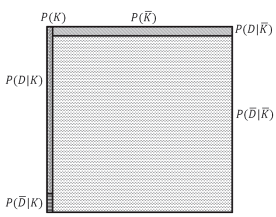


Abb. 4: Baum mit natürlichen Häufigkeiten und Einheitsquadrat zum Diagnose-Kontext

4 Verteilungen

Der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist der zentrale Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie. Das *Denken in Verteilungen* sollte bereits in der Sekundarstufe I beginnen (Biehler, 2007). Hier gehört es zu den aufzubauenden Grundvorstellungen der Stochastik, die Stabilisierung einer Häufigkeitsverteilung zu erleben, die dann im idealisierten Grenzübergang in die Wahrscheinlichkeitsverteilung übergeht. Hierbei spielt die Simulation eine zentrale Rolle (vgl. Biehler & Prömmel, 2011). Ein weiterer zentraler Punkt ist die Auffassung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Modelle, deren Passung mit Hilfe von realen Daten geprüft wird, was auch mit Hilfe einer Simulation beurteilt werden kann (z. B. Biehler, 2005). Beispiele mit realen Daten dazu finden sich bei Biehler et. al. (2011) und bei Eichler und Vogel (2015).

Die Bildungsstandards heben beim Verteilungsbegriff besonders auf den einfachsten denkbaren Fall mehrstufiger zufälliger Vorgänge ab, die aus stochastisch unabhängigen Teilvorgängen bestehen, in denen nur zwei Ereignisse, Erfolg und Misserfolg, betrachtet werden. So sollen Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe II insbesondere „die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen“ (KMK, 2012, S. 26). Dabei muss man beachten, dass es in Schulbüchern viele Aufgaben wie die folgende gibt, in denen, ohne es zu thematisieren und zu hinterfragen, eine Binomialverteilung vorausgesetzt wird:

Von den 100 Beschäftigten eines Betriebes kommen durchschnittlich 40 % mit einem eigenen Auto zur Arbeit.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit genügt ein Parkplatz mit 50 Plätzen?
b) Wie viele Plätze müssen zur Verfügung stehen, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % ausreichen?

Aufgabe 4: Schulbuchaufgabe aus Griesel, Postel und Suhr (2003, S. 131)

Wenn diese Aufgabe im Kapitel Binomialverteilung steht, reduziert sich die Aufgabe für viele Schülerinnen und Schüler darauf, n (hier 100), p (hier 0,4) und k (hier 50) zu finden und $P(X > k|n, p)$ auszurechnen. Man sollte die Aufgabe umkehren und fragen, (1) was in einer Realsituation gelten muss, um diese Binomialverteilungsannahme machen zu können, und (2) welche anderen Annahmen denkbar sind. Zu (1) könnte man dann karikierend antworten: Wenn alle 100 Beschäftigten über ein Auto verfügen und morgens ein Glücksrad drehen mit 40 % grün und genau dann das Auto benutzen, wenn „grün“ erscheint. Zu (2) könnte man annehmen, dass jeden Tag immer genau 40 Personen kommen (dann reicht der Parkplatz immer) oder dass 44 Personen prinzipiell mit dem Auto kommen würden, dies aber im Schnitt nur zu 90 % tatsächlich machen. Letzteres könnte man wieder mit der Binomialverteilung ausrechnen. Komplexere Modelle wären durch Simulation zu behandeln (s. die Flugbuchungsaufgabe in Biehler et al., Kapitel 21 in diesem Band).

In einem ersten Zugang zu den wesentlichen Eigenschaften der Binomialverteilung kann es günstig sein, eine überwiegend vom Kontext befreite Situation zu untersuchen (vgl. auch Biehler & Prömmel, 2013), um die oben genannten Fallen zu vermeiden.

Eine Münze wird n-Mal geworfen ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Die Zufallsgröße X messe die Anzahl der Wappen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wappen sowie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

Aufgabe 5: Verteilung beim Münzwurf

Anhand eines sukzessiv aufgebauten Baums lassen sich anhand dieser Aufgabe einerseits die die Binomialverteilung definierende Berechnungsformel entwickeln und ebenso die Formeln für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Binomialverteilung erarbeiten. In Erweiterung kann die Münzwurfsituation für die systematische Betrachtung von Phänomenen verwendet werden, die in der Sekundarstufe I im Zusammenhang mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen qualitativ beschrieben worden sind (vgl. Biehler et al., 2010).

Das ist rechts durch die Analyse einer Simulation von 10, 40, 160 und 640 Münzwürfen realisiert. In Abbildung 5 ist auf der linken Seite die Vergrößerung der Streuung zu den Anzahlen, auf der rechten Seite die Verringerung der Streuung zu den Anteilen zu sehen, jeweils bei Erhöhung der Versuchsanzahl. Quantifizierend kann sich auf der Basis der Simulationen die Verdopplung/Halbierung der Streuung bei Vervierfachung der Versuchsanzahl ergeben, die sich exakt bei der Berechnung der Standardabweichungen ergibt.

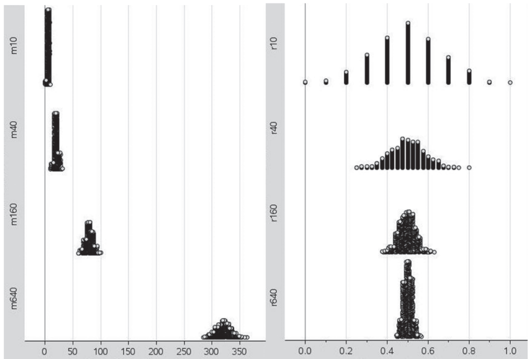


Abb. 5: Steigende Streuung der Anzahlen, sinkende Streuung der Anteile bei Erhöhung der Versuchsanzahl

Als Ergebnis dieser Aufgabe kann das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz für binomialverteilte Zufallsgrößen stehen: Erhöht man die Anzahl der Versuche um den Faktor n, so erhöht sich die Streuung bezogen auf die Anzahl der Erfolge um den Faktor $\sqrt{n}$ und verringert sich bezogen auf den Anteil der Erfolge um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Die Simulationsergebnisse können dann theoretisch erklärt werden, indem man für die Anzahl der Erfolge X und den Anteil der Erfolge Y als Prognoseintervalle mit den Sigma-Regeln ermittelt:

$P(X \in [np - 1{,}96\sigma(X), np + 1{,}96\sigma(X)]) \approx 95\ \%$ bzw. $P(Y \in [p - 1{,}96\sigma(Y), p + 1{,}96\sigma(Y)]) \approx 95\ \%$ wobei $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ und $\sigma(Y) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$. Insbesondere die Zufallsgröße Y ist für die Beurteilung der Abweichung von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten von zentraler Bedeutung. Bei der Behandlung von Konfidenzintervallen sind die Y-Prognoseintervalle wesentliche Voraussetzung und sollten in keinem Unterrichtsgang zur Stochastik im erhöhten Anforderungsniveau fehlen.

5 Schätzen und Testen

Schülerinnen und Schüler sollen in der Sekundarstufe II im grundlegenden Niveau „in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen“ (KMK, 2012, S. 26). Im erhöhten Niveau sollen sie entweder „für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen“ begründen (B1) oder „Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen“ (B2) (KMK, 2012, S. 26). Hier wäre es allerdings

u. E. sinnvoll gewesen, beide Alternativen verbindlich vorzuschreiben, oder wenigstens die Priorität auf die Konfidenzintervalle zu setzen, was besser der Diskussion in den die Statistik anwendenden Wissenschaften entsprechen würde (Biehler et al., 2010). Man findet jedenfalls kaum noch eine Wissenschaft, in der bei Publikationen neben Hypothesentests nicht auch noch Konfidenzintervalle (wenn möglich) angegeben werden sollen. Für die Allgemeinbildung sind eigentlich beide Themen wichtig, denn auch in den Medien wird von *statistischer Signifikanz* gesprochen und werden oft relative Häufigkeiten aus Stichproben hochgerechnet, ohne Genauigkeit und Unsicherheit zu thematisieren.

Die in Alternative B1 der Bildungsstandards formulierte Intervallschätzung baut unmittelbar auf der in der Sekundarstufe I entwickelten Grundvorstellung auf, dass relative Häufigkeiten eines Ereignisses als Punkt-Schätzung der entsprechenden Wahrscheinlichkeit dienen können.

Bei einer Verkehrszählung in Braunschweig wurden 1166 PKW mit Braunschweiger Kennzeichen hinsichtlich ihrer Marke dokumentiert. Gezählt wurden dabei 385 PKW der Marke VW. Ermitteln Sie, welche tatsächlichen Anteile an VWs zu dem empirischen Ergebnis passen könnten.

Aufgabe 6: Verkehrszählung

In dieser Aufgabe (vgl. Eichler & Vogel, 2013 und ähnlich Biehler et al., 2011, S. 146 ff.) wird die in der Sekundarstufe I übliche Punktschätzung zu einer Intervallschätzung erweitert. Für die Ermittlung eines in Frage kommenden Intervalls, das den tatsächlichen Anteil enthalten könnte, kann zunächst eine Simulation eingesetzt werden. Die Grenzen eines Konfidenzintervalls (p_u und p_o) können dabei als Parameter zweier binomialverteilter Zufallsgrößen aufgefasst werden, die *gerade noch* zu dem beobachteten Wert von 385 VW „passen“ (Abbildung 6). Auch wenn die Stichprobe ohne Zurücklegen gezogen wurde, kann man annehmen, dass die Anzahl der VWs in der Stichprobe angenähert binomialverteilt ist, da die Grundgesamtheit gegenüber der Stichprobe hinreichend groß ist.

Als Kriterium wählt man, ob die beobachtete Häufigkeit (hier 385) im 95 %-Prognoseintervall der betrachteten Wahrscheinlichkeit p liegt. Dies geschieht iterativ so lange, bis der Anteil, der über 385 hinausgeht, unter 2,5 % liegt: Für $p_u = 0{,}32$ sind in 26 % von 1000 simulierten Beobachtungen mindestens 385 VW zu beobachten, bei $p_u = 0{,}31$ ist dies bei rund 8 % der Simulationen der Fall, bei $p_u = 0{,}30$ nur noch bei rund 2 %.

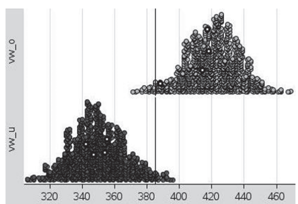


Abb. 6: Bestimmung eines Konfidenzintervalls durch Simulation

Dies ist analog bei $p_o = 0{,}36$ der Fall, es liegen weniger als 2,5 % unter 385. Man kann also sagen, dass für die (annähernd) symmetrisch um die beobachtete Häufigkeit angeordneten Modellwerte $p_u = 0{,}30$ und $p_o = 0{,}36$ Vertrauensgrenzen erreicht sind, da alle diejenigen p enthalten sind, die die Beobachtung im 95 %-Prognoseintervall enthalten. Durch Simulation kann man dann demonstrieren, dass auf solche Art bestimmte Intervalle das „wahre p“ in 95 % aller Bestimmungen von Konfidenzintervallen auch enthalten (vgl. Biehler et al., Kapitel 21 in diesem Band). Ohne Simulation ließe sich die Verteilungen zu p_u und p_o natürlich auch berechnen und es ließe sich auch die Faustformel für ein Konfidenzintervall (vgl. Biehler et al., Kapitel 21 in diesem Band) anwenden. Im letzteren Fall ergäben sich ebenfalls die Grenzen des 95 %-Konfidenzintervalls zu $p_u = \frac{385}{1166} - \frac{1}{\sqrt{1166}} \approx 0{,}30$ und $p_o = \frac{385}{1166} + \frac{1}{\sqrt{1166}} \approx 0{,}36$.

Die Ermittlung eines solchen Konfidenzintervalls enthält den Hypothesentest quasi als „Abfallprodukt“: Angenommen man hat zu einem Anteil ein 95 %-Konfidenzintervall bestimmt. Dann enthält dieses Intervall genau diejenigen Wahrscheinlichkeiten p, die bei einem zweiseitigen Test auf dem 5 %-Signifikanzniveau nicht verworfen würden, wenn man den Anteil h beobachtet hat.

Eine weitere Verbindung von Hypothesentests und Konfidenzintervallen zeigt sich bei der Betrachtung der in vielen Schulbüchern thematisierten Geschmackstests (vgl. auch Riemer & Petzold, 1997). Man testet etwa, ob jemand stilles Mineralwasser von Leitungswasser unterscheiden kann, mit der Nullhypothese „Er rät mit 50 % Trefferwahrscheinlichkeit“ gegen die Alternativhypothese „Die Erkennungswahrscheinlichkeit ist $p \neq 50\ \%$“, indem man z. B. 20 Getränke identifizieren lässt. Mit der Faustformel eines Prognoseintervalls $p \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, also $0{,}5 \pm \frac{1}{\sqrt{20}}$ (s. o.) könnte man die Nullhypothese verwerfen bzw. „statistisch ausschließen“, wenn 15 oder mehr Getränke oder wenn 5 oder weniger richtig identifiziert werden. Eine signifikante Abweichung nach unten deutet auf eine systematische Verwechslung der beiden Getränke hin. Mehr als „$p \neq 50\ \%$“ lässt sich allein auf der Basis des Hypothesentests dann aber nicht sagen (mit entsprechender Kennzeichnung von Irrtumswahrscheinlichkeiten). Ein Konfidenzintervall wäre hier viel informativer: Bei 15 Treffern könnte (mit der Faustformel $\frac{15}{20} \pm \frac{1}{\sqrt{20}}$) ein angenähertes 95 %-Konfidenzintervall für die Identifizierungsrate einer Person von 0,526 bis 0,973 ermittelt werden. Die Anwendung des Konfidenzintervalls setzt allerdings idealisierend voraus, dass die Versuchspersonen stochastisch unabhängig mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit von p richtig erkennen.

Verbreitet ist bei einem Hypothesentest zudem das Missverständnis, dass man bei Ablehnung der Nullhypothese H_0 auf dem Signifikanzniveau von 5 % sagen könnte, dass die Alternativhypothese mit 95 % Wahrscheinlichkeit richtig sei, die Nullhypothese aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 %. Man unterstellt gleichsam unter Verwechslung bedingter Wahrscheinlichkeiten, dass $P(H_0|E) = P(E|H_0) < 0{,}05$. Eine Hypothesenwahrscheinlichkeit $P(H_0|E)$ ließe sich aber prinzipiell nur berechnen, wenn man bereits a priori Wahrscheinlichkeiten für die Hypothesen angenommen hätte. Das geht aber nur im Bayesianischen Ansatz, den man, wie Krauss und Wassner (2001) vorschlagen, kontrastierend zur Vermeidung von Fehlinterpretationen einsetzen könnte.

Im anderen Fall, also falls die Nullhypothese „Raten“ auf dem 5 %-Niveau nicht ausgeschlossen werden kann (z. B. bei nur 13 richtig erkannten Getränken), tendieren viele Schülerinnen und Schüler dazu, positiv zu schließen, dass der Proband „also“ geraten habe (mit gewissen Unsicherheiten in diesem Schluss). Um zu überzeugen, dass man hier nicht von *Annahme,* sondern von *Nicht-Verwerfen* sprechen muss, muss demonstriert werden, dass die Daten (13 richtig erkannte) auch mit anderen Hypothesen als $p_0 = 0{,}5$ verträglich sind, in dem Sinne, dass ein zweiseitiger Hypothesentest die Hypothese $p = p_0$ nicht verwirft (offensichtlich müssen sie mit $p_0 = \frac{13}{20} = 0{,}65$ verträglich sein). Fasst man alle verträglichen p_0 in einem Intervall zusammen, so hätte man wiederum bereits ein Konfidenzintervall.

Wichtig bei beiden Verfahren, beim Schätzen und beim Testen, ist es, das Verständnis für Grundideen dieser Standardverfahren vieler Stochastik anwendender Wissenschaften aufzubauen, während rein algorithmische und formale Abarbeitung von Problemstellungen eher vermieden werden sollten. Weiterhin ist es notwendig, die gegenseitige Abhängigkeit von Sicherheit, Genauigkeit und Stichprobengröße zu thematisieren. Je größer man etwa das

Konfidenzniveau wählt, desto sicherer kann man sich sein, den wahren Parameter in dem einen berechneten Intervall enthalten zu haben, erkauft sich diese Sicherheit aber mit längeren Intervallen. Diese können aber wiederum kürzer werden, wenn die Stichprobe unter der Voraussetzung, dass sie „gute" verzerrungsfreie Daten umfasst, erhöht wird $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\text{-Gesetz}\right)$. Eine durchaus erstaunliche Erkenntnis ist dabei, dass die Sicherheit und Genauigkeit eines Konfidenzintervalls – das Ziehen mit Zurücklegen beim Erzeugen der Stichprobe vorausgesetzt – alleine von der Stichprobengröße, nicht aber von der Größe der Grundgesamtheit abhängt. So bleibt diese gleich, unabhängig ob man ein Merkmal in einer Stadt, in einem Land oder der Welt erhebt (praktisch bleibt hier natürlich das Problem, eine repräsentative Stichprobe in großen Grundgesamtheiten zu konstruieren). Wie bei der Bestimmung eines Konfidenzintervalls wird auch beim Hypothesentest die gegenseitige Abhängigkeit von Genauigkeit, Sicherheit und Stichprobengröße sichtbar.

6 Fazit

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir Aufgaben zur Diskussion gestellt, die Teilaspekte der Leitidee Daten und Zufall in der Formulierung der Bildungsstandards interpretieren. Diese ergeben sicher noch kein gesamtes Curriculum, sondern illustrieren aus unserer Sicht zentrale Bereiche eines Curriculums zur Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe II. Übergreifend repräsentieren die Aufgaben einen datenorientierten Zugang zur Leitidee, wobei Daten im empirischen und simulativen Sinne zu verstehen sind.

Die Simulation als zentrales Bindeglied zwischen realen Daten und abstrakten Wahrscheinlichkeiten haben wir ohne weitere Diskussion verwendet, da eine vertiefte Betrachtung in Biehler et al. (vgl. Kapitel 21 in diesem Band) enthalten ist. Ebenso sind wir bei den Aufgaben davon ausgegangen, dass der Rechner ein obligatorisches Arbeitsmittel der Sekundarstufe II ist (KMK, 2014, S. 12f.; vgl. auch die Beiträge von Elschenbroich, Kapitel 20, und von Barzel und Greefrath, Kapitel 12 in diesem Band). Das können grafikfähige Taschenrechner sein, solche mit integrierter Computeralgebra oder auch der mit entsprechender Software ausgestattete Computer. Die Verwendung von Fathom (Software, in Biehler et al., 2011 enthalten) und dem TI-NSpire CAS (Software/Taschenrechner) in diesem Beitrag ist daher nicht als zwingende, aber zurzeit sehr gut unterstützende Voraussetzung zu verstehen.

Weiterhin haben wir Wert auf Fragen der Modellierung von Daten mit stochastischen Mitteln sowie die für uns wichtige Unterscheidung von Realität und Modell gelegt. Im Gegenzug haben wir einzelne Begriffe oder Methoden in diesem Beitrag formal nicht abschließend ausgearbeitet, sondern diese Betrachtungen teilweise nur als Ergänzungen genannt. Dieses Vorgehen ist damit begründet, dass wir es als wichtig erachten, zunächst die zentralen Ideen zu Begriffen und Methoden im Bereich Daten und Zufall zugänglich zu machen, während formale Systematisierungen zwar wichtig, aber eben nachgeordnet sind. Dieses Vorgehen dient dem Ziel, für Schülerinnen und Schüler Ideen erfahrbar werden zu lassen, die politische, gesellschaftliche oder wirtschaftliche Entscheidungsprozesse in der Realität steuern.

Literaturverzeichnis

Bea, W. (1995). *Stochastisches Denken.* Frankfurt a. M.: Peter Lang.

Biehler, R. (2005). Authentic modelling in stochastics education: The case of the binomial distribution. In G. Kaiser & H.-W. Henn (Hrsg.), *Festschrift für Werner Blum* (S. 19–30). Hildesheim: Franzbecker.

Biehler, R. & Hartung, R. (2006). Die Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 51–80). Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Biehler, R. (2007). Denken in Verteilungen – Vergleichen von Verteilungen. *Der Mathematikunterricht, 53* (3), 3–11.

Biehler, R., Eichler, A., Engel, J. & Warmuth, E. (2010). *Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II – Kompetenzprofile für die Bildungsstandards aus Sicht der Stochastik und ihrer Didaktik.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.stochastik-in-der-schule.de/Dokumente/Leitidee_Daten_und_Zufall_SekII.pdf

Biehler, R. & Prömmel, A. (2011). Mit Simulationen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. *Praxis der Mathematik, 38,* 14–18.

Biehler, R. & Prömmel, A. (2013). Von ersten stochastischen Erfahrungen mit großen Zahlen bis hin zum $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz – ein didaktisch orientiertes Stufenkonzept. *Stochastik in der Schule, 33* (2), 14–24.

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C. & Prömmel, A. (2011). *Daten und Zufall mit Fathom – Unterrichtsideen für die SI und SII mit Software-Einführung und Software Fathom.* Braunschweig: Schroedel.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Eichler, A. & Vogel, M. (2015). *Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gigerenzer, G. (2002). *Das Einmaleins der Skepsis: Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken.* Berlin: Berlin Verlag.

Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (Hrsg.). (2003). *Elemente der Mathematik. Leistungskurs Stochastik.* Hannover: Schroedel

KMK (2004) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss vom 15.10.2004.* München: Luchterhand.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Krauss, S. & Wassner, C. (2001). Wie man das Testen von Hypothesen einführen sollte. *Stochastik in der Schule, 21* (1), 21–26.

Mathematical Science Education Board & National Research Council (Hrsg.). (1990). *Reshaping school mathematics. A philosophy and framework for curriculum.* Washington, D. C.: National Academy Press.

Riemer, W. & Petzolt, W. (1997). Geschmackstests: Spannende und verbindende Experimente. *Mathematik Lehren, 85,* 16–19.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens – kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen.* Hildesheim: Franzbecker.

7. Die Kompetenz mathematisch Argumentieren

Stefan Ufer und Jürg Kramer

Mathematisches Argumentieren beschreibt einen breiten Kompetenzbereich, der von der begründeten Lösung inner- und außermathematischer Probleme über das Bewerten und Konstruieren tragfähiger mathematischer Argumente bis hin zur Untersuchung mathematischer Aussagen auf ihre Gültigkeit hin reicht. Im vorliegenden Beitrag werden spezifische Zielbereiche der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife zur Kompetenz mathematisch Argumentieren herausgearbeitet. Darauf aufbauend werden Möglichkeiten dargestellt, mathematisches Argumentieren im Unterricht zum Aufbau argumentativer Kompetenzen zu nutzen.

1 Einleitung

Ausgangspunkt für die Beschreibung mathematischer Kompetenz in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife sind die drei von Winter (1995) vorgeschlagenen Grunderfahrungen, die allen Lernenden im Mathematikunterricht ermöglicht werden sollen (KMK, 2012, S. 9): Mathematik als Mittel zur Umwelterschließung, Mathematik als „deduktiv geordnete Welt eigener Art" und Mathematik als Mittel zum Erwerb allgemeiner Problemlösekompetenzen (vgl. auch den Beitrag von Blum, Kapitel 1 in diesem Band). Insbesondere die beiden letztgenannten Grunderfahrungen sind eng mit dem Erwerb mathematischer Argumentationskompetenz verknüpft. Selbstverständlich bieten Beweis- und Argumentationsaufgaben die Möglichkeit zur Förderung dieser Kompetenz. Über den Aufbau mathematischer Argumentationskompetenz hinaus wird Argumentationssituationen das Potential zugesprochen, inhaltliches mathematisches Wissen zu vertiefen (Bürger, 2000; Andriessen, Baker & Suthers, 2003). Aber auch in anderen Situationen können Lösungen und Ideen begründet oder Begründungen analysiert und reflektiert werden. Dennoch ist nicht anzunehmen, dass alleine das Einfordern von Begründungen und Argumentationen zum Aufbau mathematischer Argumentationskompetenz im Sinne der Bildungsstandards genügt. Im vorliegenden Beitrag soll analysiert werden, in welchen Bereichen der kumulative Kompetenzaufbau über die in den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2004) beschriebenen Kompetenzen hinausgehen kann und welche spezifischen Unterstützungsmaßnahmen sich anbieten.

Die Bildungsstandards (KMK, 2012, S. 9) verlangen am Ende der Sekundarstufe II wissenschaftspropädeutische Bildung im Fach Mathematik. Die Disziplin Mathematik ist durch eine eigene Argumentationskultur geprägt und grenzt sich insbesondere durch den Aufbau einer kohärenten formal-axiomatischen Theorie von anderen Disziplinen ab (Heintz, 2000). Mit dem Ziel einer vertieften Allgemeinbildung und „allgemeinen Studierfähigkeit“ (KMK, 2012, S. 9) geht der Fokus der Bildungsstandards auch über die Mathematik hinaus auf andere Disziplinen, wie die Natur-, Sozial- und Wirtschaftswissenschaften, die sich wenigstens teilweise mathematischer Modelle und Methoden zur Beschreibung von Zusammenhängen und Fragestellungen bedienen (s. dazu auch den Beitrag von Koepf und Kramer, Kapitel 10 in diesem Band).

Im Folgenden sollen zunächst wesentliche Anforderungen mathematischen Argumentierens beschrieben werden. Anschließend werden wesentliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss und der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife in ihren Zielsetzungen für mathematische Argumentationskompetenz analysiert. Hintergrund sind dabei nicht nur die in den Bildungsstandards exemplarisch aufgelisteten Anforderungen, sondern vor allem die genannten übergeordneten Zielsetzungen der Bildungsstandards. Letztlich wird die Rolle mathematischen Argumentierens im Unterricht der Sekundarstufe II analysiert.

2 Anforderungen mathematischen Argumentierens

Mathematisches Argumentieren im Sinne der Bildungsstandards umfasst „sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen“ (KMK, 2012, S. 15). Mathematisches Problemlösen im Sinne der Bildungsstandards grenzt sich von einem solchen Verständnis von Argumentieren ab: Während das mathematische Problemlösen eher das *Finden* einer mathematischen Lösungsmöglichkeit für ein bestimmtes Problem beschreibt, bezieht sich Argumentieren auf eine *reflektierende Begründung* von Problemlösungen, Algorithmen und allgemeinen Aussagen. Es sind jedoch wie bei fast allen allgemeinen Kompetenzen deutliche Überschneidungen zwischen den Kompetenzbereichen erkennbar; beispielsweise ist das Erkennen und Beschreiben von Strukturen und Mustern typischerweise dem Bereich Problemlösen zugeordnet, dies ist jedoch auch ein wichtiger Teilprozess beim Finden mathematischer Begründungen.

Generell beschreibt mathematisches Argumentieren Tätigkeiten, die in unterschiedliche Kontexte eingebettet sein können. So wird in innermathematischen Situationen über mathematische Objekte, Begriffe und Zusammenhänge argumentiert. Andererseits wird mit Hilfe solcher mathematischer Begriffe über Phänomene der realen Welt argumentiert, beispielsweise darüber, welche Form eine Verpackung haben sollte, welcher unter verschiedenen Wegen der kürzeste oder welches Vorgehen in zufallsbehafteten Situationen vorteilhafter ist. Letztere Bereiche erfordern es, eine reale Situation mit mathematischen Objekten zu beschreiben. Im Folgenden werden diese Aspekte nicht genauer analysiert, da sie im Kompetenzmodell der Bildungsstandards der Kompetenz mathematisch Modellieren zugeordnet sind (s. dazu auch den Beitrag von Kaiser und Stender, Kapitel 8 in diesem Band).

Im Rahmen der Sekundarstufe II gewinnt Argumentieren als zentraler Bestandteil mathematischen Arbeitens an Bedeutung. Die Mathematik nutzt Beweise als spezielle Argumentationen zur logischen Absicherung von Wissen innerhalb einer mathematischen Theorie. Damit rückt das Konstruieren schlüssiger (und im Bereich der Hochschulmathematik dann auch formal-axiomatischer) Argumentationen in den Vordergrund. Auch die Bildungsstandards beschreiben das eigenständige Konstruieren mathematischer Argumente als wesentliche inhaltliche Anforderung mathematischen Argumentierens. Verglichen mit der Hochschulmathematik ergeben sich jedoch zwei wesentliche Unterschiede:

Zunächst beschränkt sich die Kompetenz mathematisch Argumentieren im Sinne der Bildungsstandards nicht auf formal-axiomatische Argumente. Generische Beispiele und inhaltlich-anschauliche Argumente stehen neben strengen, auf eine innermathematische Rahmentheorie bezogenen Formen. Je nach Zielsetzung der Argumentation haben unterschiedliche Formen Vor- und Nachteile. Geht es um die Weiterentwicklung einer klar begrenzten *lokalen mathematischen Theorie* (Freudenthal, 1973; z. B. einer Geometrie der Ebene, die auf intuitiv gebildeten Grundbegriffen, wie Punkt und Gerade, sowie Fundamentalsätzen, wie z. B. den Winkelsätzen, beruht), sind deduktive Argumente mit explizitem Bezug zu dieser Theorie notwendig. Es ist aber für den schulischen Kontext sicher nicht möglich bzw. sinnvoll, jede Aussage der Schulmathematik aus einer (lokalen) Rahmentheorie abzuleiten. Geht es darum, eine Aussage ohne Bezug zu einer solchen Theorie einsichtig zu begründen und Einsicht in die inhaltlichen Zusammenhänge hinter der Aussage zu bekommen oder eine mathematische Situation zu explorieren, so können generische Beispiele oder inhaltlich-anschauliche Argumentationen die tragfähigere Alternative sein, um wesentliche inhaltliche Argumente ohne formal-axiomatische Einbettung zu kommunizieren.

Weiterhin beschränken sich die Bildungsstandards in Bezug auf argumentative Tätigkeiten – wie übrigens auch die Hochschulmathematik – nicht auf die Konstruktion von Argumentationen. Ein breiteres Bild mathematischen Argumentierens beinhaltet auch das Stellen von Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, wie: „Ist das immer so?", „Gibt es ein ..., so dass ...?", „In welchen Fällen passiert eigentlich ...?", „Warum ist das eigentlich so?", „Kann es passieren, dass ...?", „Was macht eigentlich ein ... (z. B. eine irrationale Zahl) aus?", „Warum ist das ein gültiger Lösungsweg?" u. a. m. Zum mathematischen Argumentieren gehört beispielsweise also auch, gegebene mathematische Aussagen daraufhin zu untersuchen, ob sie wirklich allgemein gültig sind oder wenigstens in bestimmten Spezialfällen, und mathematische Begründungen auf ihre Schlüssigkeit hin zu bewerten.

Für den Unterricht bedeutet dies, dass sich mathematisches Argumentieren nicht nur auf die Konstruktion von Beweisen zu gegebenen Aussagen oder das Begründen von Lösungswegen beschränken kann. Neben verschiedenen Formen mathematischen Schließens kann auch das Untersuchen von offenen mathematischen Situationen oder die Bewertung von gegebenen Argumenten wesentlich der Förderung mathematischer Argumentationskompetenz dienen. Auch das begründende Absichern von komplexen Problemlösungen, ebenso wie von Standardroutinen und -argumenten (z. B. *Warum* können wir jetzt schließen, dass die Funktion f bei $x = 7$ ein lokales Maximum hat? *Wieso* funktioniert unsere „Regel"?) gehört zu mathematischer Argumentationskompetenz. Ein ideales Ziel für den Unterricht wäre hier das Etablieren eines argumentativen Klassenklimas (Reiss, 2009), in dem Aussagen ganz selbstverständlich begründet werden. Vor diesem breiten Bild mathematischen Argumentierens als Unterrichtsaktivität, aber auch als Zielbereich von Mathematikunterricht sollen im folgenden Abschnitt die spezifischen Zielsetzungen der Sekundarstufe II in Bezug auf mathematisches Argumentieren analysiert werden.

3 Mathematisches Argumentieren in der Sekundarstufe II

Die Beschreibung mathematischer Argumentationskompetenz in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife ist eine natürliche Fortführung der entsprechenden Beschreibung in den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2004, S. 8). Einige Aspekte aus der Sekundarstufe I werden in den Kompetenzbeschreibungen für die Sekundarstufe II nicht mehr explizit genannt, wie beispielsweise „Lösungswege beschreiben und begründen“ oder „Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und Vermutungen begründet äußern“, verlieren jedoch damit nicht ihre Bedeutung für mathematisches Argumentieren. Wesentliche Weiterentwicklungen, insbesondere in Bezug auf die Grunderfahrung von Mathematik als „deduktivem System“, klingen beispielsweise in der Formulierung „Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln“ an (KMK, 2012, S. 15). Auch darüber hinaus deuten die übergeordneten Ziele der Bildungsstandards auf spezifische Ziele der Kompetenzentwicklung hin, die im Folgenden beschrieben werden sollen.

3.1 Spezifische Zielbereiche in der Sekundarstufe II

Die in den Bildungsstandards zum Ausdruck gebrachten besonderen Zielsetzungen von Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II (s. a. Kramer und Koepf, Kapitel 10 in diesem Band) legen nahe, wie die mathematische Argumentationskompetenz der Lernenden weiterentwickelt werden soll. Aufgebaut werden kann dabei auf den – i.d.R. heterogenen – Vorerfahrungen aus der Sekundarstufe I. Dies soll zunächst an Aufgabe 1 illustriert werden, die bereits im Band zu den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss beschrieben ist (s. Leiß & Blum 2006, S. 37):

Jette behauptet: „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch drei teilbar.“ Hat Jette recht? Wie ist es bei vier, fünf, ... aufeinanderfolgenden Zahlen? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 1: Summe von Nachbarzahlen

Anhand solcher und ähnlicher argumentativer Anforderungen wird das Verständnis mathematischer Argumentationen im Laufe der Sekundarstufe I schrittweise präzisiert sowie die Kompetenz zum Umgang mit ihnen erweitert. Im Folgenden werden exemplarisch wesentliche Bereiche herausgearbeitet, in denen diese Vorerfahrungen während der Sekundarstufe II substantielle Erweiterungen erfahren.

Formalisierungsgrad: Insbesondere in Bezug auf Argumentationen, die die Lernenden selbst entwickeln, stehen in der Sekundarstufe I (Jahnke & Ufer, 2015) Argumentationen, die auf inhaltlichen Repräsentationen und Überlegungen beruhen, zunächst relativ gleichberechtigt neben Argumentationsformen, wie sie für die Hochschulmathematik und ihre Anwendungswissenschaften typisch sind. So ermöglicht die obige Aufgabe vielfältige sinnhaltige Argumentationen, z. B. mit Hilfe geometrischer Argumente (Punktefelder) oder auch mit

Überlegungen zu Resten bei der Division durch 3 (bzw. 4, 5, …). Mit fortschreitender Annäherung an die wissenschaftliche Disziplin Mathematik und ihre Anwendungen nimmt die Rolle formaler Argumentationen allerdings schon alleine deswegen zu, weil diese in der jeweiligen wissenschaftlichen Kultur dominieren. Formalisierung ist dabei kein Selbstzweck. So ist es durchaus als problematisch anzusehen, wenn bereits Lernende der Sekundarstufe I formal abgefasste Beweise (ggf. ohne sie wirklich zu verstehen) für schlüssiger halten als inhaltlich äquivalente Beweise in Form von Fließtext (Healy & Hoyles, 1998; Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009). Formale Darstellungen von Termen, Vektoren, Funktionen etc. sind Ausdruck der *Sprache der Mathematik*. Diese Sprache ist ein zentrales *Hilfsmittel der modernen Mathematik,* das seine Effektivität erst in (vergleichsweise) jüngerer Vergangenheit erlangt hat. Sie ermöglicht es, die Komplexität der verwendeten Darstellungen so weit zu reduzieren, dass rationale und überprüfbare deduktive Schlüsse möglich werden. In der obigen Aufgabe lässt sich die zentrale Beweisidee noch sehr einfach mit Wissen auf dem Niveau der Sekundarstufe I schlüssig begründen, ohne formale Hilfsmittel heranzuziehen, etwa so:

> Jette hat recht. Wenn ich von den drei aufeinander folgenden Zahlen die erste um Eins erhöhe und die dritte um Eins erniedrige, verändert sich die Summe der drei Zahlen nicht (Prinzip des gegensinnigen Veränderns). Alle drei Zahlen sind *danach* gleich der mittleren Zahl, die Summe ist also das Dreifache der mittleren Zahl und damit durch drei teilbar.

Viele Aussagen und Argumentationen im Bereich der Sekundarstufe II und besonders der Hochschulmathematik lassen sich nur noch schwer auf diese Art und Weise inhaltlich beschreiben, ohne wesentliche Informationen zu verlieren bzw. an Klarheit und Prüfbarkeit der Argumentation einzubüßen. Wenn man beispielsweise nach Teilbarkeitseigenschaften der Summe von mehr als drei aufeinander folgenden Zahlen fragt, so steigen die Anforderungen der Aufgabe nicht nur durch die Vielfalt zu betrachtender Möglichkeiten, sondern auch in Bezug auf die klare Abfassung der Frage und von Argumenten bei der Beantwortung (z. B. durch formale Notationen und Nutzung verschiedener Variablen in Existenz- und Allaussagen). Ein weiteres Beispiel sind Grenzwertbetrachtungen in der Differentialrechnung, die erst durch formale Notationen präzise und effektiv handhabbar zugänglich werden. Damit formale Repräsentationen ihr Potential entfalten können, müssen zumindest zwei Bedingungen erfüllt sein: Die Lernenden müssen in der Lage sein, die verwendeten Repräsentationen flüssig zu erstellen, zu manipulieren und zu interpretieren. Mindestens ebenso zentral ist, dass eine formale Argumentation oder eine formale Aussage nicht alleine stehen, sondern in ihrer Bedeutung auf unterschiedliche Arten inhaltlich interpretiert werden. So kann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in Bezug auf die „inverse“ Beziehung von Ableitungs- und Integrationsoperator interpretiert werden, aber auch in Bezug auf die Vorstellung des Integrals als „orientierte Fläche unter einem Graphen“ oder in vielfältigen Kontexten, denen die Vorstellung des Integrals als „kontinuierliches Aufsummieren der Veränderung eines Bestandes“ zugrunde liegt (vgl. die Illustrationsaufgabe „Änderung und Bestand“ in KMK, 2012, S. 62, sowie den Beitrag von Henn und Oldenburg, Kapitel 5 in diesem Band).

Wesentliches Ziel im Bereich der Sekundarstufe II ist also – neben der Vertrautheit mit formalen Darstellungsformen – die Vermittlung von Einsicht in deren Bedeutung für die

Mathematik als zentrales Hilfsmittel für die Absicherung von Argumentationen.

Thematisieren von Akzeptanzkriterien: Ein wesentlicher Teil mathematischer Argumentationskompetenz ist es, mathematische Argumentationen begründet zu bewerten. Die hierzu herangezogene Norm definiert sich im Bereich der Sekundarstufe I durch die Argumentationskultur innerhalb der mathematischen Gemeinschaft in der Klasse bzw. der Schule, bestehend aus den Lernenden und den Lehrkräften. Eine gemeinsame „soziomathematische Norm“ dazu, was als Begründung zu akzeptieren ist und was nicht, erwächst aus der mathematischen Arbeit im Unterricht. Dies geschieht natürlich nicht in beliebiger Art und Weise, sondern wird durch die Lehrkraft als Repräsentant der (wissenschaftlichen) mathematischen Community stark geprägt. Was ein akzeptables mathematisches Argument schlussendlich ausmacht, ist allerdings auch in dieser mathematischen Community nicht unbedingt in klar formulierbare Kriterien zu gießen. Manin (1977, S. 48) umschreibt das mit dem Satz „A proof becomes a proof after the social act of accepting it as a proof“. Jedoch zeichnet sich die wissenschaftliche Mathematik dadurch aus, dass diese Akzeptanzprozesse in der Regel durch einen sehr starken Konsens in der Community geprägt sind, obwohl die dahinterliegenden konkreten Kriterien je nach Zielgruppe eines Arguments und auch je nach Teilbereich der Mathematik variieren können. Dennoch lassen sich drei zentrale notwendige (nicht zwingend hinreichende) Bereiche von Kriterien für die Akzeptanz von mathematischen Argumentationen identifizieren (s. z. B. auch Ufer et al., 2009):

- *Argumentationsschema:* Eine Argumentation bzw. ein Beweis besteht meist aus mehreren Teilschritten bzw. Einzelargumenten. Zentrales Kriterium für die Akzeptanz jedes Teilschritts ist es, dass es sich um deduktive Schlüsse handelt, die aus (als gültig angenommenen Voraussetzungen) zwingend folgende neue Einsichten ableiten. Kurz gesagt soll jeder Teilschritt der Argumentation für sich gesehen akzeptabel sein. Der Formalisierungsgrad des Arguments ist hierbei ein nachgeordnetes Kriterium.
- *Deduktive Kette:* Diese deduktiven Schritte müssen in einer deduktiven Struktur so angeordnet sein, dass sie jeweils von abgesicherten Voraussetzungen bzw. Annahmen und von den bereits in vorherigen Schritten gewonnenen Einsichten ausgehen. Die jeweils abgeleiteten neuen Einsichten können dann für darauf aufbauende Schritte als gegeben angenommen werden. Kurz gesagt soll die Argumentation an jeder Stelle nur von bereits abgesicherten Einsichten ausgehen.
- *Gesamtstruktur:* Argumentationen müssen von klaren Voraussetzungen ausgehen, die entweder Teil der bereits erarbeiteten mathematischen Theorie sind oder explizit herausgestellt werden. Die Einzelargumente verbinden diese Voraussetzungen mit der zu begründenden Behauptung. Kurz gesagt soll die Argumentation zeigen, dass die Behauptung aus den Voraussetzungen und Annahmen folgt.

Auch wenn diese Akzeptanzkriterien bereits im Rahmen der Sekundarstufe I – meist implizit – erarbeitet werden, bereiten sie Lernenden auch nach der Behandlung von Beweisen häufig noch Probleme. Im Sinne eines Verständnisses von Mathematik als deduktivem System, aber auch mit Blick auf eine wissenschaftspropädeutische Grundbildung sollten diese (und ggf. weitere) Akzeptanzkriterien für mathematische Argumentationen für die Lernenden explizit als wesentlicher Aspekt einer mathematischen Argumentationskultur herausgearbeitet und als Referenz zur Bewertung eigener und fremder mathematischer Argumentationen genutzt werden. Auch Lücken, die aus pragmatischen Gründen in unterrichtlichen Begründungen gelassen werden, können unter dieser Perspektive diskutiert werden.

Zentral ist, dass auch die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife keine *alleinige* Dominanz rein axiomatisch-deduktiver Argumentationen vorsehen. Inhaltlich-anschauliche Begründungen und einfache Plausibilitätsbetrachtungen stehen weiterhin neben anderen, strenger in eine Rahmentheorie eingebetteten Beweisen und formal abgefassten Argumentationen. Zeichen mathematischer Argumentationskompetenz ist hier zunächst die Fähigkeit, diese unterschiedlichen Typen von Argumentationen nachzuvollziehen bzw. teilweise selbst zu erstellen. Darüber hinaus erscheint es im Sinne der allgemeinen Zielsetzungen der Bildungsstandards wichtig, die Lernenden für die Potentiale und Einschränkungen der jeweiligen Argumentationsformen je nach Ziel der Argumentation zu sensibilisieren.

Verfügbare Argumentationsschemata: Während die Kriterien *deduktive Kette* und *Gesamtstruktur* in ihren wesentlichen Zügen bereits in der Sekundarstufe I thematisiert werden können, bietet die Sekundarstufe II insbesondere im Bereich der zur Verfügung stehenden *Argumentationsschemata* deutliche Entwicklungsmöglichkeiten. Argumentationen der Sekundarstufe I beziehen sich meist auf die Absicherung von Allaussagen und stützen sich häufig auf die direkte Anwendung bekannter Definitionen und Sätze als Basis für Schlussfolgerungen. Weiterhin treten bereits vereinzelt Widerspruchsbeweise (z. B. bei der Existenz irrationaler Zahlen) oder Fallunterscheidungen (z. B. bei der Lösung quadratischer Gleichungen) auf.

Im Sinne eines Aufbaus funktional nutzbarer Fähigkeiten zum Umgang mit logischen Aussagen erscheint es spätestens in der Sekundarstufe II angebracht, dieses Repertoire an Argumentationsschemata zu erweitern, um den Umgang mit komplexer strukturierten logischen Aussagen zu ermöglichen. So erscheint es unbedingt angebracht, das Beweisen und Widerlegen von Existenz- und Allaussagen und damit auch die Rolle von Beispielen bzw. Gegenbeispielen sowie die Bedeutung von Implikationen an konkreten Aussagen zu thematisieren, wie im folgenden Beispiel illustriert wird:

Im Folgenden geht es darum, wie man das Verhalten einer Funktion f an einer Stelle x_0 mit Hilfe der Ableitungsfunktion untersuchen kann.
Überlegen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Aussage so schlüssig wie möglich!

Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann hat f im Punkt x_0 ein lokales Extremum.

Aufgabe 2: Extrem oder nicht?

Die folgenden drei exemplarischen Schülerlösungen zu „Extrem oder nicht?“ sollen das typische Spektrum argumentativer Kompetenzen aufzeigen.

falsch, es könnte auch ein Sattelpunkt sein, wenn $f''(x_0)=0$

Abb. 1: Schülerlösung zu „Extrem oder nicht?“ mit partiellem Verständnis

An einem Extremum ist der Anstieg $=0$, somit hat die Ableitungsfunktion einen 0-Punkt an dieser Stelle.

Abb. 2: Schülerlösung zu „Extrem oder nicht?“ mit falscher Implikationsrichtung

Ja, wenn man $f(x_0)$ Null setzen kann, hat die Funktion ein lokales Extremum. Das ist eine Regel.

Abb. 3: Schülerlösung zu „Extrem oder nicht?“ mit Fokus auf schematischen Regeln

Die Schülerlösung in Abbildung 1 zeigt partielles Verständnis, wohingegen die Lösung in Abbildung 2 die falsche Implikationsrichtung untersucht. Ein solcher Umgang mit logischen Aussagen sollte in der Sekundarstufe II zunehmend thematisiert werden. Die Lösung in Abbildung 3 illustriert eine Fokussierung auf im Unterricht behandelte, schematisch verstandene Regeln ohne tieferen Einblick in die inhaltlichen Zusammenhänge. Es kann beispielsweise hilfreich sein, auch zu Standardalgorithmen und -argumentationen immer wieder vertiefende inhaltliche Begründungen einzufordern.

Aus wissenschaftspropädeutischer Sicht ergibt sich in der Sekundarstufe II des Weiteren die Möglichkeit, informelle Vorerfahrungen zum Prinzip der vollständigen Induktion zu sammeln, beispielsweise im Kontext der Ableitungsregeln für Potenzfunktionen, oder – vor allem aus formaler Sicht etwas komplexer – im Zusammenhang mit Binomialkoeffizienten. Dieses Prinzip wird – im Sinn eines lokalen Ordnens, s. Abschnitt 4 – aus informellen Vorerfahrungen zu den natürlichen Zahlen bzw. anschaulichen Umsetzungen dieser Vorerfahrungen gewonnen (Domino-Prinzip).

Begründetes Problemlösen: Die bisher genannten Zielbereiche beziehen sich vor allem auf die Produktion, die Bewertung und Reflexion von Argumentationen und Beweisen und betreffen damit vor allem Kompetenzen in den Anforderungsbereichen II und III. Anforderungsbereich I beschreibt insbesondere Kompetenzen zum Umgang mit vertrauten Argumentationsformen in einfachen Kontexten. Dazu zählen rechnerische Begründungen, aber auch die Anwendung einzelner bekannter Zusammenhänge zur Begründung von Aussagen und die Argumentation auf der Basis von Alltagswissen. In diesem Sinn umfasst mathematische Argumentationskompetenz die Fähigkeit, bei Bedarf Begründungen für die Gültigkeit bzw. auch die Grenzen von Problemlöseschritten anzugeben. Welche Schritte in einer Problemlösung sind zwingend? Welche sind lediglich Heuristiken, die sich an der Qualität der letztendlichen Lösung messen lassen müssen? Welche mathematischen Einsichten sichern die jeweiligen Schritte ab? Mit Hilfe von Mathematik Lösungen für gegebene Probleme zu finden, ist ein wesentlicher Teil mathematischer Kompetenz. Die Tragfähigkeit solcher Problemlösungen mit Hilfe mathematischen Wissens abzusichern, stellt einen wichtigen Teilbereich mathematischen Argumentierens dar. Sieht man Mathematik im Allgemeinen als die „Wissenschaft der Strukturen", so besteht mathematisches Arbeiten im Wesentlichen darin, Strukturen zu identifizieren, die es erlauben, bestimmte Probleme zu lösen, z. B. zu erkennen, wie die Struktur einer kombinatorischen Situation genutzt werden kann, um die Anzahl der möglichen Kombinationen zu bestimmen. Mathematisches Argumentieren kann unter dieser Perspektive gesehen werden als das Beschreiben dieser erkannten Muster mit alltags- bzw. umgangssprachlichen Mitteln oder mit Hilfe von Konzepten und Aussagen aus einer mathematischen Rahmentheorie.

3.2 Mathematisches Argumentieren als Unterrichtsaktivität

Die Ansprüche der Bildungsstandards, seien sie nun explizit formuliert oder implizit in den allgemeinen Zielsetzungen enthalten, stellen eine Herausforderung für den Unterricht der Sekundarstufe II dar. Wie kann man neben einer Bewältigung der Stofffülle in der begrenzten Zeit noch den Aufbau von argumentativen Kompetenzen unterstützen? Eine Beobachtung von Reiss, Heinze, Kessler, Rudolph-Albert und Renkl (2007) kann hier wichtige Hinweise geben: Klassen, in denen die Lernenden spontan, ohne Aufforderung, Begründungen für Rechenaufgaben lieferten, schnitten auch bei komplexen mehrschrittigen Beweisaufgaben in der Geometrie besser ab. Vieles spricht dafür, dass der Aufbau einer *argumentativen Unterrichtskultur* ein wesentlicher erster Schritt zum Aufbau argumentativer Kompetenzen sein kann. Gemeint ist hiermit eine Unterrichtskultur, in der Begründungen für Lösungen oder Aussagen selbstverständlich dazugehören, in der Begründungen kritisch betrachtet und ggf. angepasst werden und in der die Lernenden angeregt werden, typische mathematische Fragen zu stellen und selbstständig zu untersuchen.

Im Unterricht hat Argumentieren selbst als Aktivität mindestens drei Ziele, die Andriessen et al. (2003) wie folgt beschreiben:

- *Learning to argue* – Ziel von Argumentieren im Unterricht ist, argumentative Kompetenzen zu erwerben, ggf. unter Nutzung von spezifischen Unterstützungsmaßnahmen.
- *Learning about the debate* – Ziel ist letztlich auch, Wissen über mathematische Argumentationen und deren Rolle für die Mathematik, aber auch für andere Lebensbereiche zu erwerben.
- *Learning from the debate* – Argumentieren im Unterricht dient auch dazu, Wissen über die Inhalte zu erwerben, mit denen argumentiert wird. Das kann ein realer Anwendungskontext sein, wie z. B. die Entwicklung von Populationen, aber auch ein mathematisches Konzept, wie beispielsweise der Begriff der Unabhängigkeit in der Stochastik oder der Begriff des Winkels in der analytischen Geometrie. Entsprechend kann die Förderung mathematischer Argumentationskompetenz im Unterricht immer mit Gelegenheiten für den Erwerb von mathematischem Wissen verknüpft werden.

In Bezug auf den zweiten Bereich *Learning about the debate* bietet eine solche Unterrichtskultur vielfältige Anlässe, die Gültigkeit und Reichweite von Argumenten – seien sie von Lernenden oder von der Lehrkraft eingebracht oder Materialien entnommen – zu bewerten und so Akzeptanzkriterien für mathematische Argumentationen je nach Zielsetzung zu diskutieren. Auch typische mathematische Fragestellungen, wie Existenz- und Eindeutigkeitsfragen, Fragen der Charakterisierung von mathematischen Objekten und Fragen nach generischen Lösungsansätzen für bestimmte Problemklassen können auf diese Weise begleitend thematisiert und ggf. auch explizit herausgehoben werden.

Gerade höhere Anforderungsbereiche mathematischen Argumentierens erfordern häufig den Einsatz von Problemlösestrategien (z. B. Umstrukturieren des Problems, Rückwärtsarbeiten, ...), von denen einige allgemein hilfreich sind, andere aber auch spezifisch für mathematisches Argumentieren sind: So kann es beispielsweise gerade bei der Konstruktion von Argumentationen hilfreich sein, zunächst wesentliche bekannte Einsichten, die mit der zu bearbeitenden Aussage zusammenhängen, zu sammeln. Kennzeichen explorativer Strategien ist es demgegenüber, dass die gegebene Problemsituation mit Hilfe konkreter Beispiele genauer untersucht und strukturiert werden kann. Eine wesentliche Strategie, die besonders bei anspruchsvollen mathematischen Argumentationen immer wieder hilfreich sein kann, ist es, für Voraussetzungen und Behauptungen andere Formulierungen zu finden – entweder in Form anderer inhaltlicher Charakterisierungen (also z. B. Ableitung als Steigung einer Tangente statt als lokale Änderungsrate) oder auch mit Hilfe anderer Darstellungsformen. Um beispielsweise die relative Lage zweier Ebenen begründet anzugeben, kann es elegant sein, beide Objekte in Normalenform darzustellen.

Letztlich hat es sich als tragfähig erwiesen, Lernende für unterschiedliche Phasen des Argumentationsprozesses zu sensibilisieren (Reiss et al., 2007), insbesondere dafür, dass ein nicht unwesentlicher Teil des Argumentierens nicht aus der Zusammenstellung der eigentlichen Argumentation, sondern aus der Erforschung der Ausgangssituation sowie dem Erkennen von kleinen Zusammenhängen besteht, die sich erst mit der Zeit zu einer Kette von Argumenten zusammenfügen.

Zudem ist anzumerken, dass es zwei wesentliche Voraussetzungen für kompetentes mathematisches Argumentieren gibt, die eher mit dem konkreten mathematischen Inhalt als mit allgemeinen Kompetenzen verknüpft sind. Notwendig für die Bewertung von Aussagen, aber auch für die Konstruktion von Argumenten ist reichhaltiges Begriffswissen, das neben den zentralen Definitionen, Eigenschaften und Sätzen vor allem ein Wissen über typische Beispiele für ein Konzept (z. B. differenzierbare Funktionen) beinhaltet, aber auch eine gute Vernetzung dieses Wissens über verschiedene Darstellungsformen hinweg (z. B. Kenntnis des Begriffs „Monotonie“ in Bezug auf die Darstellungen Funktionsterm, Wertetabelle, Graph sowie seine Bedeutung in realen Kontexten).

Weiterhin erfordern insbesondere komplexere Argumentationen, aber auch die Reflexion einfacher Standardargumentationen, dass technische Aspekte mathematischer Tätigkeiten wie das Umformen von Termen oder die Erstellung eines Koordinatensystems bzw. einer Wertetabelle flexibel und flüssig beherrscht werden. Hier sei auf den Beitrag von Bruder, Feldt-Caesar, Pallack, Pinkernell und Wynands, Kapitel 9 in diesem Band, verwiesen.

Abschließend lassen sich wesentliche Aspekte einer Förderung mathematischen Argumentierens zusammenfassen: Mathematisches Argumentieren

(a) lernt man zum Teil dadurch, dass man in argumentative Prozesse eingebunden ist,
(b) setzt Wissen über mathematische Argumentationen voraus,
(c) erfordert häufig selbstreguliertes, problemlösendes Arbeiten, das entsprechende Unterstützung voraussetzt,
(d) setzt sicheres inhaltliches Wissen voraus, kann aber auch dazu beitragen, dieses inhaltliche Wissen weiter zu entwickeln.

4 Ausblick und Implikationen

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife schließen auch im Bereich mathematisch Argumentieren deutlich an die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss an (KMK, 2004, 2012). Auch wenn für die Sekundarstufe II besondere, neue Schwerpunktsetzungen identifiziert werden können, bestehen weiterhin deutliche Unterschiede zwischen schulischer Mathematik und Hochschulmathematik. Auch in der Sekundarstufe II wird nicht der Aufbau einer globalen, rein auf Axiomen aufgebauten mathematischen Theorie angestrebt. Ein solches *globales Ordnen* der Mathematik (Freudenthal, 1973), ausgehend von einem festen Satz von Axiomen, scheint höchstens exemplarisch in Teilbereichen vorgesehen, beispielsweise mit den Axiomen von Kolmogorov, die erarbeitete Vorerfahrungen zum Zufallsbegriff systematisieren. Die Regel ist ein *lokales Ordnen,* das darauf abzielt, die (meist als plausibel angesehenen) Annahmen offenzulegen, aus denen eine mathematische Aussage abgeleitet werden kann, ohne eine feste axiomatische Fundierung anzustreben. Beispielsweise werden in der analytischen Geometrie häufig einzelne Kriterien zur Feststellung der relativen Lage von Ebenen und Geraden im Raum aus der Anschauung gewonnen und zur Ableitung weiterer Kriterien genutzt.

Ebenso unverändert bleibt das Vorgehen beim Bilden von Begriffen, die als Basis für mathematische Argumentationen dienen. Im Bereich der Hochschulmathematik wird die Begriffsbildung im Wesentlichen durch die formale Definition beherrscht. Inhaltliche Vorstellungen zu diesen Begriffen müssen sich an der Passung zu dieser Definition messen lassen. Der Umgang mit einer solchen *formalen Axiomatik* im Sinne Hilberts zählt nicht zu den zentralen Anforderungen, die nach den Bildungsstandards bewältigt werden sollen. Das typische Vorgehen der Sekundarstufe I und auch der Sekundarstufe II geht dagegen von inhaltlichen Vorstellungen zu mathematischen Begriffen aus, beschreibt diese durch Eigenschaften und destilliert daraus charakterisierende, definierende Eigenschaften.

Zusammenfassend zeichnet sich Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II – neben dem Vertrautwerden mit neuen Argumentationsschemata – durch die Fortentwicklung einer mathematischen Argumentationskultur aus, in die zunehmend formalisierende Darstellungen, explizite Akzeptanzkriterien für mathematische Argumente und explizite Begründungen für Problemlöseschritte Eingang finden.

Literaturverzeichnis

Andriessen, J., Baker, M. J. & Suthers, D. (2003). Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions. In J. Andriessen, M. J. Baker & D. Suthers (Hrsg.), *Arguing to Learn: Confronting Cognitions in Computer-Supported Collaborative Learning Environments* (S. 1–25). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bürger, H. (2000). Argumentieren im Mathematikunterreicht. In L. Flade & W. Herget (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen* (S. 31–38). Berlin: Volk und Wissen Verlag.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey.* London: Institute of Education.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien: Springer.

Jahnke, H.-N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. Erscheint in R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 329-354).* Heidelberg: Springer.

KMK (2004) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.* München: Luchterhand.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012.* Zugriff am 31.08.2013 unter www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Leiß, D. & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler Mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Manin, Y. (1977). *A course in mathematical logic.* New York, Heidelberg, Berlin: Springer.

Reiss, K., Heinze, A., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2007). Fostering argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In M. Prenzel (Hrsg.), *Studies on the educational quality of schools. The final report on the DFG Priority Programme* (S. 251–264). Münster: Waxmann.

Reiss, K. (2009). Wege zum Beweisen. Einen „Habit of Mind“ im Mathematikunterricht etablieren. *Mathematik lehren,* 155, 4–9.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30* (1), 30–54.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61,* 37–46.

8. Die Kompetenz mathematisch Modellieren

Gabriele Kaiser und Peter Stender

Mathematisches Modellieren ist eine komplexe Tätigkeit, die viele Teilkompetenzen umfasst und für die Lernenden den Bezug der Mathematik zur Realität herstellt. Nach einer begrifflichen Klärung wird der Stellenwert dieser Kompetenz in den Bildungsstandards diskutiert. Weiter werden Ziele und Gründe für Modellieren im Mathematikunterricht ebenso wie der Modellierungskreislauf als Charakteristikum von Modellierungsprozessen dargestellt. Zentral für den Unterricht sind Modellierungs-Teilkompetenzen und ihre Förderung, die am Beispiel einer Aufgabe zum Thema Flugbuchungen beschrieben werden. Der Beitrag schließt mit der beispielbezogenen Diskussion der Einbindung des Modellierens in den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe, die mit verschiedenen Zugängen möglich ist.

1 Einleitung

Die Bedeutung von Modellieren in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen ist weltweit anerkannt (s. u. a. die ICMI Study zu Mathematical Modelling and Applications, Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007). In vielen nationalen Curricula spielen Modellierungskompetenzen eine wichtige Rolle, ohne dass dies in der Schulpraxis schon im angestrebten Umfang realisiert ist. Dabei bezieht sich Modellieren auf alle Aspekte der Beziehungen zwischen der Mathematik und der „Welt“, wobei insbesondere der Prozess des Anwendens von Mathematik zur Lösung außermathematischer Probleme in den Blick kommt. Modellierung ermöglicht Schülerinnen und Schülern aller Altersstufen die Einsicht in die Kraft mathematischer Methoden in Alltag, Wissenschaft und Technik und entwickelt damit auch Angebote für Lernende, einen Sinn im Lernen von Mathematik zu sehen.

In der Literatur werden je nach Intention unterschiedlich weite Auffassungen zum Modellieren vertreten. Wir verstehen im Folgenden – im Einklang etwa mit der einschlägigen ICMI Study (Blum et al., 2007) – unter *mathematischem Modellieren* den gesamten Prozess vom außermathematischen Problem und dessen Verständnis über dessen innermathematische Bearbeitung bis hin zur Rückinterpretation der Ergebnisse in die Realität und deren Validierung. Diese umfassende Auffassung von Modellieren ist auch in den Bildungsstandards für den Primarbereich und den Mittleren Schulabschluss zu finden (KMK, 2004 und 2005), während sich die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife auf die Übersetzungsprozesse zwischen Mathematik und Realität konzentrieren (KMK, 2012). Die innermathematischen Aktivitäten gehören dort vor allem zu den Kompetenzen mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik Umgehen und mathematisch

Argumentieren, während das Entnehmen von Informationen aus Texten und die strukturierte Darlegung eigener Überlegungen zur Kompetenz mathematisch Kommunizieren gerechnet werden. Wir werden in den folgenden Abschnitten zweckmäßigerweise unsere weitere Auffassung von Modellieren zugrunde legen, da in konkreten Problemsituationen die genannten Aspekte immer alle gemeinsam zum Tragen kommen.

2 Stellenwert des Modellierens für den Mathematikunterricht

2.1 Modellieren in den Bildungsstandards

Modellieren spielt in den Standards für die Allgemeine Hochschulreife eine zentrale Rolle. So wird u. a. formuliert:

> Für den Erwerb der Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern. Aufgaben mit Anwendungen aus der Lebenswelt haben die gleiche Wichtigkeit und Wertigkeit wie innermathematische Aufgaben. (KMK, 2012, S. 11)

Die Modellierungskompetenz wird in den Bildungsstandards der KMK bereits im Primarbereich als eine der zu entwickelnden Kompetenzen genannt und dort folgendermaßen beschrieben:

> Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen, Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen, zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren. (KMK, 2005, S. 8)

Deutlich werden die starken Sachbezüge, die im Mittelpunkt der geforderten Aktivitäten stehen sollen, sowie das Herstellen von Bezügen zwischen Mathematik und Realität, wobei Eigenaktivitäten besonders betont werden.

Diese Anforderungen setzen sich in der Sekundarstufe I konsistent fort. So formulieren die Standards für den Mittleren Schulabschluss für die Kompetenz mathematisch Modellieren:

> Dazu gehört: den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen, in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten, Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen. (KMK, 2004, S. 8)

Bedeutsam ist der hohe Stellenwert von Modellieren über alle Schulformen hinweg. Dabei differenzieren die drei Anforderungsbereiche einen unterschiedlich hohen Grad der Eigentätigkeit, der Komplexität und Vertrautheit der Beispiele sowie ein unterschiedlich hohes kognitives Anspruchsniveau, mit kritischer Reflexion als höchstem Niveau.

In den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife wird die Modellierungskompetenz hinsichtlich der nötigen Übersetzungsprozesse weiter entfaltet:

> Hier geht es um den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (z. B. bei linearen Zusammenhängen) bis zu komplexen Modellierungen. (KMK, 2012, S. 17)

Die Modellierungskompetenz soll im Bildungsgang der Schülerinnen und Schüler von Beginn an bis in die gymnasiale Oberstufe dementsprechend systematisch ausgebildet werden. Dabei werden die drei Anforderungsbereiche, wie sie sich für den Mittleren Schulabschluss finden, in den Standards für die Allgemeine Hochschulreife fortgeführt, d. h. Lernende müssen im untersten Anforderungsbereich beispielsweise nur vertraute Modelle anwenden und im mittleren Anforderungsbereich Ergebnisse von Modellierungen interpretieren oder diese an unterschiedliche Bedingungen anpassen. Im höchsten Anforderungsbereich sollen komplexe Realsituationen modelliert werden und die entwickelten mathematischen Modelle in Realsituationen validiert und bewertet werden. Insgesamt wird damit in den Bildungsstandards aller Schulstufen und -formen mathematisches Modellieren als eine wichtige Kompetenz angesehen, die – im Verbund mit anderen Kompetenzen – allen Lernenden vermittelt werden soll.

2.2. Ziele des Modellierens und Gründe für dessen Integration in den Mathematikunterricht

In der aktuellen didaktischen Diskussion werden im Wesentlichen drei verschiedene *Ziele* des Modellierens unterschieden (vgl. Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013, S. 20 f.):

- Inhaltsorientierte Ziele
- Prozessbezogene Ziele
- Allgemeine Ziele

Die *inhaltsorientierten* Ziele fokussieren auf die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, sich „die Umwelt mit mathematischen Mitteln zu erschließen“ (Greefrath et al., 2013, S. 20 f.). Es soll die Fähigkeit erworben werden, die gelernten mathematischen Kenntnisse nutzbringend auf die Welt zu beziehen und diese Kenntnisse dadurch als hilfreich beim Umgang mit der Welt zu erfahren.

Die *prozessbezogenen* Ziele umfassen die Problemlösefähigkeiten der Schülerinnen und Schüler im allgemeinen Sinne. Dabei sind sowohl die Fähigkeiten zum Lösen von mathematischen Problemen im engeren Sinne gemeint als auch die Übertragung von beim

Modellieren wichtigen heuristischen Strategien auf andere Problemlöseprozesse. Wichtige allgemeine Fähigkeiten, wie beispielsweise das ausdauernde Arbeiten an einer Lösung gepaart mit der Fähigkeit, zum richtigen Zeitpunkt von einem aussichtslosen Weg abzulassen, können beim Modellieren entwickelt werden. Daneben ist die Einsicht in die Nützlichkeit mathematischen Tuns für die Lösung von realen Fragestellungen ein wichtiger motivierender Aspekt für den Unterricht.

Zu den *allgemeinen* Zielen des Modellierens im Mathematikunterricht gehören u. a. die sozialen Ziele, die durch die Durchführung von Modellierungsaktivitäten im Rahmen von Gruppenarbeit gefördert werden. Die Notwendigkeit zum Argumentieren und Kommunizieren in einem Kontext, in der sich die Güte des Arguments im nächsten Prozessschritt zeigt, kann wesentlich zur Bildung von Persönlichkeiten in einer demokratischen Gesellschaft beitragen. Daneben wird der Blick für das Auftreten mathematikhaltiger Sachverhalte in Alltag und Umwelt, zum Beispiel beim Lesen einer Zeitung, geschärft.

In der Diskussion über die Einbeziehung von Modellierung in den Mathematikunterricht werden bereits seit langem unterschiedliche theoretische *Perspektiven* eingenommen, wie z. B. eine stärker auf außermathematische Probleme ausgerichtete „pragmatische" Perspektive versus eine stärker auf die Mathematik als Wissenschaft ausgerichtete „wissenschaftlich-humanistische" Perspektive, die in der aktuellen nationalen und internationalen Diskussion weiter ausdifferenziert wurden (vgl. die genaueren Ausführungen hierzu in Kaiser, Blum, Borromeo Ferri & Greefrath, 2015). Diese unterschiedlichen Perspektiven auf Modellieren fußen insbesondere auf unterschiedlichen Zielsetzungen und Argumenten für die Integration von Modellieren in den Mathematikunterricht und haben dementsprechend unterschiedliche Konsequenzen für die verwendeten Beispiele und für den Stellenwert von Modellieren im Unterricht.

Aktuell lassen sich im Wesentlichen fünf *Argumente* nennen, die für die Integration von Modellieren in den Mathematikunterricht vertreten werden (vgl. Kaiser et al., 2015):

- Das *formative* Argument, das die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen betont;
- Die Förderung des *kritischen Umgangs* mit Mathematik, insbesondere das kritische Reflektieren von mathematisch begründeten Aussagen;
- Die Förderung der Fähigkeit, Mathematik in vielfältigen Zusammenhängen nutzen zu können (*utilitaristisches* Argument);
- Die Vermittlung eines *angemessenen Bildes von Mathematik,* zu der unter anderem das kritische Reflektieren über Anwendungen von Mathematik gehört;
- Das *kognitionspsychologisch* begründete bessere Verstehen und Behalten von mathematischen Inhalten, die unter Bezug auf Sachkontexte gelernt wurden, und die Motivation, die hiervon ausgeht.

Damit wird deutlich, dass eine umfassende Auffassung von Modellieren nötig ist, da alle mit Modellieren verbundenen Aktivitäten, auch innermathematische bzw. auf das Kommunizieren ausgerichtete, beim Modellieren eine besondere Prägung und Ausrichtung erfahren, die es als angemessen erscheinen lassen, diese Aktivitäten dem Modellieren zuzuordnen.

3 Modellierungskompetenzen und ihre Förderung

Ein zentrales Ziel von Modellieren im Mathematikunterricht ist die Förderung der Modellierungskompetenz, d. h. die Förderung der Fähigkeit und der Bereitschaft, Probleme aus der realen Welt mit mathematischen Mitteln zu bearbeiten. Im Folgenden beschreiben wir zunächst die Tätigkeit des mathematischen Modellierens genauer, bevor wir die Modellierungskompetenz weiter ausdifferenzieren.

3.1 Die Tätigkeit des mathematischen Modellierens

Die Art und Weise, wie mathematische Modellierungsprozesse verstanden werden und wie die Beziehung zwischen der Mathematik und der außermathematischen Realität aufgefasst wird, ist ein wichtiger Gesichtspunkt beim mathematischen Modellieren. Entsprechend der unterschiedlichen Perspektiven in Bezug auf mathematische Modellierung (s. Abschnitt 2.2) existieren verschiedene Modellierungskreisläufe mit spezifischen Schwerpunkten; allerdings hat sich heute, trotz einiger Diskrepanzen, ein gemeinsames und weitverbreitetes Verständnis von Modellierungsprozessen entwickelt. In nahezu allen Ansätzen wird der idealisierte Prozess der mathematischen Modellierung als ein Prozess beschrieben, reale Probleme durch die Nutzung von Mathematik zu lösen, dargestellt als ein Kreislauf, der unterschiedliche Phasen unterscheidet. Im Folgenden (s. dazu Abbildung 1) beschreiben wir einen fünfstufigen Modellierungskreislauf, der für die Analyse von Modellierungsprozessen die wesentlichen Arbeitsschritte umfasst und für den didaktischen Einsatz im Unterricht hinreichend vereinfacht ist (vgl. Kaiser & Stender, 2013).

Üblicherweise beginnt der Modellierungsprozess mit einem realitätsnahen, eventuell komplexen *realen Problem,* das mit Hilfe mathematischer Verfahren gelöst werden soll. Dazu muss dieses Problem zunächst in seinen Aspekten verstanden und die Komplexität für die eigentliche Arbeit reduziert werden, wodurch ein *reales Modell* entsteht, das die für das Problem wesentlichen Gesichtspunkte umfasst, jedoch möglichst viele Aspekte der Realität (zunächst) unberücksichtigt lässt. Dabei sind auch Annahmen zu treffen über mögliche Einflussfaktoren und ihre Zusammenhänge. Durch Zuordnung von mathematischen Objekten zu den Objekten im realen Modell entsteht das *mathematische Modell,* das nun vollständig in der Sprache der Mathematik formuliert ist und somit eine mathematische Bearbeitung erlaubt. Die durch mathematische Arbeit erhaltene *Lösung* muss in das *reale Problem* zurückübersetzt und in ihrer Bedeutung für die reale Situation interpretiert werden, so dass eine *reale Lösung* entsteht. Diese *reale Lösung* muss sowohl in Hinblick auf das *reale Modell* als auch in Hinblick auf das reale Ausgangsproblem dahingehend überprüft werden, ob eine sinnvolle Antwort auf das Problem gefunden wurde. Bei komplexen *realen Problemen* werden dann schrittweise weitere Aspekte der Realität in das *reale Modell* integriert, bis eine angemessene Antwort auf das *reale Problem* gefunden ist. Dieser Prozess lässt sich graphisch wie folgt darstellen (s. z. B. Kaiser & Stender, 2013, S. 279):

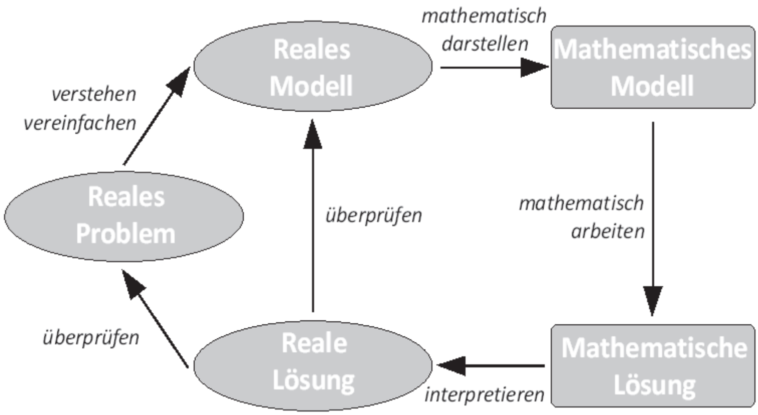


Abb. 1: Modellierungskreislauf nach Kaiser und Stender (2013)

3.2 Teilkompetenzen des Modellierens

Beim mathematischen Modellieren unterscheidet man zwischen einer globalen Modellierungskompetenz und zugehörigen Teilkompetenzen (vgl. u.a. Zöttl, 2010). Die globale Modellierungskompetenz bezieht sich auf die notwendigen Fähigkeiten, den gesamten Modellierungsprozess durchzuführen und über ihn zu reflektieren. Dabei beinhalten die Teilkompetenzen des Modellierens die verschiedenen Fähigkeiten, die notwendig sind, die einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufes adäquat durchzuführen (vgl. Kaiser, 2007; für einen Überblick zur Diskussion s. Blomhøj, 2011).

Basierend auf umfangreichen Vorarbeiten (s.u.a. die umfassende Studie von Maaß, 2004) können die folgenden Teilkompetenzen unterschieden werden: Kompetenz …

a) zum Verständnis eines realen Problems und zum Aufstellen eines realen Modells;
b) zum Aufstellen eines mathematischen Modells aus einem realen Modell;
c) zur Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb eines mathematischen Modells;
d) zur Interpretation mathematischer Resultate in einem realen Modell bzw. einer realen Situation;
e) zur Reflexion und Infragestellung der Lösung und ggf. erneuten Durchführung eines Modellierungsprozesses.

Diese Teilkompetenzen entsprechen also den im Modellierungskreislauf an den Übergängen notierten Arbeitsschritten. Vergleicht man dies mit den weiteren von den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) genannten Kompetenzen, so wird (auch angesichts der Tatsache, dass Modellierungsaktivitäten in der Regel kommunikative Gruppenaktivitäten darstellen) deutlich, dass im so verstandenen Modellierungsprozess alle in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen vorkommen und auch ausgebildet werden können. Insofern kann die so verstandene Modellierungskompetenz als die umfassendste mathematische Kompetenz angesehen werden, die im Mathematikunterricht gefördert werden soll.

3.3 Arten von Modellierungsaufgaben

Mathematisches Modellieren kann wie oben dargestellt auf allen Anforderungsbereichen in allen Klassenstufen des Schulsystems stattfinden. Dementsprechend vielfältig ist die Variationsbreite der möglichen Fragestellungen.

Es lassen sich verschiedene *Kriterien* (s. u. a. Greefrath et al., 2013) für die Charakterisierung und Beurteilung von Modellierungsaufgaben unterscheiden:

- Präzision oder Offenheit der Fragestellung – ist die Fragestellung so klar, dass der Charakter der Antwort von vornherein einsichtig ist, oder muss die genaue Fragestellung erst im Laufe des Modellierungsprozesses herausgearbeitet werden?
- Grad der Überbestimmtheit der Fragestellung – welche vorhandenen Informationen müssen die Schülerinnen und Schüler ignorieren, um zu einer Lösung kommen zu können?
- Grad der Unterbestimmtheit der Fragestellung – welche Informationen müssen die Schülerinnen und Schüler zusätzlich zu den vorhandenen Informationen durch Recherchen oder durch das Treffen von Annahmen erlangen, um zu einer Lösung kommen zu können?
- Grad der Komplexität der Fragestellung – können Schülerinnen und Schüler den Lösungsweg direkt überblicken und somit in einem Durchlauf des Modellierungskreislaufs zu einem befriedigenden Ergebnis kommen oder werden mehrere Durchläufe benötigt?
- Authentizität der Fragestellung – ist für die Schülerinnen und Schüler erkenntlich, dass es eine Personengruppe gibt, für die die Fragestellung so relevant ist, dass diese Personengruppe eine Lösung des Problems benötigt? Authentizität soll dabei ausdrücklich nicht bedeuten, dass die Fragestellung für die Schülerinnen und Schüler unmittelbar bedeutsam ist, sondern nur dass die Relevanz im Rahmen unserer Gesellschaft erkennbar ist.
- Umfang und Art der zur Bearbeitung nötigen mathematischen Verfahren – dieses Kriterium hat u. a. Auswirkungen auf die Frage, in welcher Jahrgangsstufe eine Fragestellung bearbeitet werden kann und wie groß der Zeitaufwand und wie intensiv die erforderliche Betreuung durch die Lehrperson sein muss.

Mit diesen Kriterien kann man unterschiedliche Aufgabentypen betrachten, wobei idealisiert bzw. vereinfacht folgende Typen unterschieden werden können (vgl. Greefrath et al., 2013):

- Eingekleidete Aufgaben: Hierbei handelt es sich um Fragestellungen, bei denen zu einer innermathematischen Aufgabe, die das eigentliche Ziel der Aufgabe darstellt, ein Sachkontext konstruiert wurde. Diese Aufgaben sind in der Regel nicht authentisch und nicht komplex, weder unter- noch überbestimmt und sehr präzise, so dass ein Modellierungsprozess nicht erforderlich ist.
- Textaufgaben: Hier gilt Ähnliches wie bei den eingekleideten Aufgaben, es kann jedoch abhängig von der Textform für die Schülerinnen und Schüler erforderlich sein, dass sie Sinn entnehmend lesen und aus dem Text einen mathematischen Ausdruck entwickeln. Geübt werden mit Textaufgaben neben dem mathematischen Kalkül auch die Modellformulierung und die Ergebnisinterpretation (Antwortsatz) und damit rudimentäre Teilkompetenzen des Modellierens.
- „Fermi-Aufgaben": Solche Aufgaben können als spezielle Aufgabenkategorie von Modellierungsaufgaben angesehen werden; sie sind in der Regel offen, realitätsnah und unterbestimmt mit einem klaren Endzustand aber unklarem Anfangszustand; daher steht die Datenbeschaffung – oft durch Schätzen – im Vordergrund. Sie eignen sich besonders

gut für erste Modellierungsaktivitäten sowie für das Üben von Teilkompetenzen in den Schritten des Modellierungskreislaufes.

- Sachprobleme: Hier steht ein tatsächliches, authentisches Problem aus der realen Welt im Fokus, wobei unterschiedliche Komplexitäts- und Schwierigkeitsgrade möglich sind. Dies wird im folgenden Abschnitt 3.4 exemplarisch ausgeführt.

3.4 Ein Beispiel für eine Modellierungsaufgabe

Der Prozess der Modellierung wird hier beispielhaft an der Aufgabe „Flugbuchung“ aus den Bildungsstandards illustriert (s. KMK, 2012, S. 50 ff.). Aspekte hierzu finden sich auch im Beitrag von Biehler, Eichler, Löding und Stender zum Simulieren (Kapitel 21 in diesem Band) sowie ausführlich im Begleitmaterial (CD). Dabei wird die ursprüngliche Fragestellung zu einer komplexen Modellierungsaufgabe weiterentwickelt.

Das reale Problem ist, wie Fluggesellschaften mit dem Problem kurzfristig frei werdender Sitzplätze in Linienflügen umgehen, die aus Gründen der Wirtschaftlichkeit nicht ungenutzt bleiben sollen. Eine Möglichkeit besteht darin, schon im Vorwege mehr Sitzplätze zu verkaufen als eigentlich vorhanden sind. Mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist abzuschätzen, wie dies wirtschaftlich sinnvoll gehandhabt werden kann, wie also eine Balance zwischen Überbuchung und ungenügender Auslastung der Flüge gefunden werden kann.

Vor dem Formulieren des ersten realen Modells wird eine Recherche durchgeführt, die für eine konkrete Flugverbindung die Flugkosten und die Flugzeuggröße umfasst sowie die Fluggastrechte für den Fall, dass eine Fluglinie einen Reisenden nicht befördern kann. Aufgrund dieser Recherche wird eine Liste relevanter Einflussfaktoren aufgestellt und aus dieser Liste ein möglichst einfaches erstes reales Modell formuliert. Dabei ist es sinnvoll, zunächst den gesamten Kostenaspekt zurück zu stellen und sich nur auf die stochastische Situation zu beschränken, da diese schon komplex genug ist, um die Schülerinnen und Schüler angemessen zu fordern.

Im Folgenden wird ein möglicher Modellierungsprozess exemplarisch beschrieben: Als erstes mathematisches Modell kann eine Binomialverteilung gewählt und die Situation dann analytisch oder mit Hilfe einer Simulation untersucht werden. Dabei kann die Arbeit im mathematischen Modell selbst zu verschiedenen Ansätzen und Lösungen führen, bevor ein zufriedenstellendes erstes Ergebnis vorliegt. Eine erste mathematische Lösung (vgl. Begleitmaterial) liefert dann viele wichtige Einsichten in die Problematik und gegebenenfalls neues Wissen über die Qualität von stochastischen Simulationen, aber ggf. noch keine Antwort auf die eigentliche Fragestellung. Daher werden in einem zweiten realen Modell die Kosten auf Grundlage der Fluggastrechte mit einbezogen. Das darauf basierende zweite mathematische Modell weist mehr Komplexität auf, diese ist jedoch jetzt bewältigbar, da bereits aus dem ersten Durchlauf Teile des Modells gut überblickt werden. Ein erstes Zahlenergebnis für die zu erwartenden Kosten kann berechnet werden. In diesem Prozess wächst auch das Verständnis für die Fragestellung, die jetzt als „Optimierung der erwarteten Kosten-/Einnahmensituation“ ausgeschärft werden kann.

Das Optimieren einer Situation erfordert das Variieren der zentralen Parameter. Dies geschieht im dritten mathematischen Modell. Das neue Ergebnis liefert dann die Information, um wie viele Sitzplätze die Fluggesellschaft die Maschine überbuchen sollte, damit die Differenz von Mehreinnahmen und erwarteten Mehrkosten maximiert wird. Nach diesem Durchlauf durch den Modellierungskreislauf entsteht also erstmals eine angemessene Antwort auf die ursprüngliche Fragestellung. Auch diese Antwort sollte nicht als endgültig angesehen werden, da in dem bisherigen Modell wichtige Aspekte wie unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen von Geschäftsreisenden und Urlaubsreisenden oder die real nicht gegebene stochastische Unabhängigkeit des Erscheinens der Fluggäste nicht berücksichtigt sind.

Diese Aspekte werden in weiteren Durchläufen durch den Modellierungskreislauf in die bisherigen Rechenmodelle eingearbeitet, wobei jetzt stochastische Simulationen unverzichtbar sind. Die Weiterentwicklung des dritten Modells geschieht dabei sinnvollerweise nicht kumulativ, vielmehr wird nacheinander in das ursprüngliche Modell zunächst nur der eine Aspekt (Unterscheidung der Reisenden) und dann nur der andere Aspekt (stochastische Unabhängigkeit) integriert, um die Komplexität der zu entwickelnden Simulation begrenzt zu halten. Erst danach werden alle behandelten Aspekte in einem komplexen Modell integriert.

Die hier durchgeführte Behandlung der Fragestellung verdeutlicht einige Charakteristika des Modellierungsprozesses, wie sie sich in vielen unterrichtlichen Erprobungen inzwischen herauskristallisiert haben:

- Zum Einstieg in eine Modellierungsfragestellung ist oft eine Recherchephase erforderlich, in der die relevanten Parameter ermittelt werden. Oft können nicht alle für die Modellierung erforderlichen Größen ermittelt werden, daher sind dann geeignete Annahmen zu treffen.
- Bei der Bearbeitung einer Modellierungsfragestellung wird der Modellierungskreislauf mehrfach durchlaufen. Beim ersten Durchlauf ist der weitere Arbeitsprozess noch nicht komplett absehbar.
- Die genaue Fragestellung wird oft erst im Verlaufe des Lösungsprozesses ausgeschärft.
- In jedem Durchlauf des Modellierungskreislaufs werden Teilaspekte der Fragestellung geklärt. Die Aspekte werden jeweils durch Annahmen und Vereinfachungen eingegrenzt, die die Gesamtfragestellung zum Teil sehr deutlich vereinfachen.
- Der Umfang eines betrachteten Teilaspektes hängt von den Kompetenzen des Modellierers (bzw. der Modelliererin) ab. Schon beim Aufstellen des jeweiligen realen Modells muss antizipiert werden, welche Eigenschaften im mathematischen Modell realisiert werden können und ob dieses dann auch bearbeitet werden kann. Mit steigender Erfahrung wächst der Antizipationshorizont, so dass gegebenenfalls die komplette Lösung komplexer Fragestellungen in wenigen Schritten gelingt, während Anfängerinnen und Anfänger deutlich mehr Durchläufe durch den Modellierungskreislauf benötigen.
- In Modellierungsaktivitäten können mathematische Verfahren auftreten, die noch nicht beherrscht werden. Dies sollte dann Anlass für entsprechende Lernprozesse sein.
- Der Einsatz von Computern zur Durchführung wiederholter, komplexer oder umfangreicher Rechnungen, mathematischer Experimente oder Simulationen ist in vielen Modellierungsprozessen unerlässlich (vgl. auch Kaiser et al., 2015). Die Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms ist dabei ein Beispiel unter anderen.
- Längere Modellierungsprozesse erfordern eine hohe Frustrationstoleranz, da immer wieder Irrwege auftreten und Teilergebnisse revidiert werden müssen. Der Bearbeitungsprozess verläuft also nicht im Sinne einer monotonen Verbesserung der Lösung, sondern enthält Verzweigungen und Irrwege, die aber oft für das Erreichen des Ziels unverzichtbar sind, da sie tiefere Einsichten in die Situation ermöglichen.

- Die Ergebnisse einer Modellierung sind oft nicht abschließend gültig. Ergebnisse können fast immer noch weiter verfeinert oder durch die Integration weiterer Aspekte erweitert werden.
- Modellieren kann man nur erlernen, indem man es immer wieder selber tut. Die eingesetzten Kompetenzen sind vielfältig und vernetzt und nicht nur in der Mathematik sondern auch in vielen anderen Problembewältigungsprozessen relevant.

3.5 Einstellungen von Schülerinnen und Schülern zum Modellieren

Die Frage, welche Einstellungen Schülerinnen und Schüler zum Modellieren haben, ist aktuell noch nicht umfassend untersucht. Die grundlegende Studie von Maaß (2004) identifiziert empirisch vier Gruppen von Schülerinnen und Schülern, die sich aus den möglichen Kombinationen von zwei grundlegenden Einstellungen ergeben, nämlich der Einstellung zu kontextfreier Mathematik sowie der Einstellung gegenüber Sachkontexten. Maaß (2004) bezeichnet diese als „Typen von Modellierern“:

Tabelle 1: Typen von Einstellungen zum Modellieren nach Maaß (2004)

	Positive Einstellung gegenüber kontextfreier Mathematik	Negative Einstellung gegenüber kontextfreier Mathematik
Positive Einstellung gegenüber Sachkontexten	Reflektierender Modellierer	Mathematikferner Modellierer
Negative Einstellung gegenüber Sachkontexten	Realitätsferner Modellierer	Desinteressierter Modellierer

Die sog. „Typen von Modellierern“ machen deutlich, dass Modellieren weder bei allen Schülerinnen und Schülern auf Akzeptanz und positive Einstellung stößt noch bei allen Schülerinnen und Schülern auf Ablehnung und negative Einstellung. Die zu erwartenden Einstellungen und Reaktionen der Schülerinnen und Schüler sind vielmehr deutlich differenzierter. Diese unterschiedlichen Schülergruppen zeigen bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen ihre Stärken in verschiedenen Phasen des Modellierungskreislaufes (vgl. Abbildung 1 und Tabelle 1): Zum Beispiel agieren die sog. „mathematikfernen Modellierer“ beim Arbeiten stärker im Bereich des realen Modells und der realen Lösung, während die sog. „realitätsfernen Modellierer“ sich mehr bei der Arbeit im mathematischen Modell exponieren. Diese unterschiedlichen Schwerpunkte können bei Modellierungsprozessen in Gruppenarbeit zu positiven Verstärkungen führen und sollten generell bei der Gestaltung von Modellierungsprozessen im Unterricht beachtet werden. Bei der Einstellung zum Modellieren spielen auch weitere Faktoren eine Rolle, auf die aus Platzgründen nur verwiesen werden kann, wie der Umgang mit dem Sachkontext realitätsbezogener Beispiele (Busse, 2009) und mathematische Denkstile (Borromeo Ferri, 2011).

4 Einbindung des Modellierens in den Unterricht

Modellierungskompetenz muss aufgrund der Komplexität der im Modellierungsprozess auftretenden kognitiven Operationen langfristig und gestuft aufgebaut werden. Das bedeutet einerseits, dass im Unterricht immer wieder Modellierungsfragestellungen eingebracht und zunehmend von Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeitet werden müssen. Die in Abschnitt 3.3 aufgeführten Kriterien können dabei handlungsleitend sein. Damit Modellierungsprobleme wirklich sinnstiftend wirken, müssen auch authentische Fragestellungen bearbeitet werden, die den oben genannten Zielen und Argumenten des Modellierens im Mathematikunterricht gerecht werden. Dieses ist einerseits in langfristigeren Unterrichtsprojekten möglich, wie sie in Modellierungswochen und Modellierungstagen realisiert werden (s. dazu Kaiser & Stender, 2013; Kaiser et al., 2015), oder dadurch, dass komplexe Modellierungsaufgaben als roter Faden im Unterricht über einen längeren Zeitraum verwendet werden und dadurch der Modellierungsaspekt im Unterricht immer wieder präsent ist (für einschlägige Beispiele und Erfahrungen s. exemplarisch Henn & Meyer, 2014).

Literaturverzeichnis

Blomhøj, M. (2011). Modelling competency: Teaching, learning and assessing competencies – overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (S. 343–349). New York: Springer.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. & Niss, M. (Hrsg.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. New ICMI Study Series*. New York: Springer.

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens – Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Busse, A. (2009). *Umgang Jugendlicher mit dem Sachkontext realitätsbezogener Mathematikaufgaben*. Hildesheim: Franzbecker.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (S. 11–37). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Henn, H.-W. & Meyer, J. (Hrsg.). (2014). *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1. Istron Schriftenreihe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (S. 110–119). Chichester: Horwood.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Modellieren im Mathematikunterricht. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357-383). Heidelberg: Springer.

Kaiser, G. & Stender, P. (2013). Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-directed Learning Environments. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. Brown (Hrsg.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Teaching and Research Practices* (S. 277–293). Dordrecht: Springer.

KMK (2004) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.* München: Luchterhand.

KMK (2005) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.* München: Luchterhand.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie.* Hildesheim: Franzbecker.

Zöttl, L. (2010). *Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Beispielen.* Hildesheim: Franzbecker.

Teil 2
Konzeptionelle Fragen zu den Bildungsstandards Mathematik

9. Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II

Regina Bruder, Nora Feldt-Caesar, Andreas Pallack, Guido Pinkernell und Alexander Wynands

Ausgehend von einer Reflexion der immer wieder auflebenden Diskussion zu den Erwartungen weiterführender Bildungseinrichtungen an (hilfsmittelfrei) verfügbares mathematisches Wissen und Können werden zunächst verschiedene Zugänge für Entscheidungen diskutiert, was als mathematisches Grundwissen und Grundkönnen am Ende der Sekundarstufe II gelten soll. Daran schließen sich Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung an mit erprobten Lerngelegenheiten zum Wachhalten von Grundwissen und Grundkönnen, auch aus der Sekundarstufe I.

1 Einleitung

> Fast jeder Zweite, 48,4 Prozent der 18- bis 20-Jährigen, haben 2010 das Abi oder Fachabi bestanden – ein Rekord seit der Wiedervereinigung, wie das Statistische Bundesamt in Wiesbaden berichtet. Diese sogenannte Studienberechtigtenquote hatte im Vorjahr noch bei 45,9 Prozent gelegen und 1992 – im Jahr der ersten Erhebung nach der Wiedervereinigung – nur bei 30,8 Prozent. ("Abi-Boom", 2011)

Diesen Abiturientenzahlen stehen jedoch auch hohe Abbrecherquoten insbesondere in MINT-Studiengängen gegenüber.

> 115.800 Studienanfänger begannen 2011 ein ingenieurwissenschaftliches Studium … Jeder zweite … bricht es nach ein paar Semestern wieder ab. … Die häufigsten Gründe … sind Schwierigkeiten mit den Studienanforderungen und fehlende Motivation, ermittelte das HIS (Hochschul-Informations-System). (Lübke, 2013, S. 75)

Inzwischen werden insbesondere auch grundlegende Inhalte der Schulmathematik aus der Sekundarstufe I als defizitär identifiziert und für Schwierigkeiten in der Studieneingangsphase verantwortlich gemacht (vgl. den Beitrag von Koepf und Kramer, Kapitel 10 in diesem Band, sowie u. a. Baumann, 2013; Cramer & Walcher, 2010). Tatsächlich tauchen z. B. Bruchrechnung und Prozentrechnung in der Oberstufe eher versteckt in komplexeren Zusammenhängen auf und werden in der Regel nicht mehr explizit geübt und wachgehalten. Hier muss offensichtlich im Mathematikunterricht beider Sekundarstufen methodisch gegengesteuert werden (vgl. Abschnitt 5), denn nicht umsonst verlangen die KMK-Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012):

> Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen sind unverzichtbare Grundlage für die Arbeit in der Sekundarstufe II. Sie werden dort beständig vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein (S. 10).

Zunächst gilt es jedoch nach Antworten zu suchen, welche mathematischen Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren am Ende der Sekundarstufe II in welcher Weise verfügbar sein sollten, um als notwendige Voraussetzung für erfolgreiches Weiterlernen zu dienen. Anders gefragt: *Was soll zum mathematischen Grundwissen und Grundkönnen am Ende der Sekundarstufe II gehören?* Allerdings können in diesem Beitrag keine Antworten gegeben werden in Form von fertigen Katalogen für Grundwissen und Grundkönnen. Vielmehr geht es um den aktuellen Diskussionsstand und um mögliche Perspektiven auf diese grundlegende Frage.

2 Begriffliche Klärungen

Die Basis der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, wie sie in den Bildungsstandards formuliert sind, bildet ein *ständig verfügbares Grundwissen und Grundkönnen*. So fordert die Klieme-Expertise: „der Erwerb von Kompetenzen muss – wie Weinert (2001) hervorhebt – beim systematischen Aufbau von ‚intelligentem Wissen' in einer Domäne beginnen." (Klieme et al., 2003, S. 22).

Im Sinne von Weinerts „intelligentem Wissen" (Weinert, 2001) umfasst Grundwissen und Grundkönnen sowohl Kenntnisse als auch Fähigkeiten und Fertigkeiten zu solchen zentralen mathematischen Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren, die für erfolgreiches Weiterlernen in nachfolgenden Unterrichtseinheiten oder in der weiterführenden Ausbildung in Studium und Beruf unerlässlich sind. Im Folgenden steht diese Funktion von Grundwissen und Grundkönnen in Verbindung mit einer fachwissenschaftlich-systematischen Perspektive im Zentrum. Andere mögliche Perspektiven mit dem Ziel einer Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen werden in Abschnitt 3 vorgestellt.

Bei der Festlegung von Grundwissen und Grundkönnen geht es also zum einen um die als grundlegend zu identifizierenden mathematischen Inhalte und zum anderen aber auch um deren Aneignungsqualität, die nachfolgend in verschiedenen Ausprägungen von Verfügbarkeit beschrieben werden soll (vgl. auch Sill & Sikora, 2007). Solche grundlegenden Inhalte in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren sind der Kern der in den Bildungsstandards (als Regelstandards) für beide Sekundarstufen unter den fachlichen Leitideen genannten Inhalte, wie z.B. der Funktionsbegriff, Volumen und Flächeninhalt, Methoden zur Aufbereitung und Interpretation statistischer Daten, Rechenregeln oder auch Eigenschaften und Vergleichsmöglichkeiten von geometrischen Figuren und funktionalen Zusammenhängen. Im Sinne von Kompetenzen ist dann das Zusammenspiel verschiedener Kenntnisse in ihrer Verfügbarkeit in konkreten Anforderungssituationen, die beispielsweise mathematisches Modellieren oder Argumentieren erfordern, entscheidend.

Wenn man in der Mittelstufe z.B. gelernt hat, die Funktionsgleichung einer linearen Funktion aus verschiedenen Ausgangssituationen heraus aufzustellen, und entsprechende Vorgehensweisen auch in der Oberstufe noch sicher beherrscht und anwenden kann, verfügt man damit über ein notwendiges Handwerkszeug für bestimmte Themen der Differentialrechnung. In Verbindung mit tragfähigen Grundvorstellungen aus der Mittelstufe wird es dann nicht schwer fallen, bei der Betrachtung der lokalen Änderungsrate oder dem Aufstellen von Tangentengleichungen den Überblick über das Wesentliche der neuen Inhalte zu behalten. Ein ständig verfügbares Grundwissen und Grundkönnen bildet die absolut notwendige, allerdings nicht unbedingt hinreichende Voraussetzung, um in nachfolgenden Unterrichtseinheiten erfolgreich weiterlernen zu können (vgl. wieder Koepf und Kramer, Kapitel 10 in diesem Band).

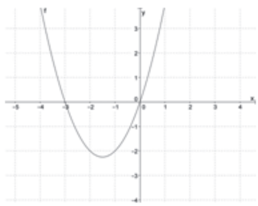
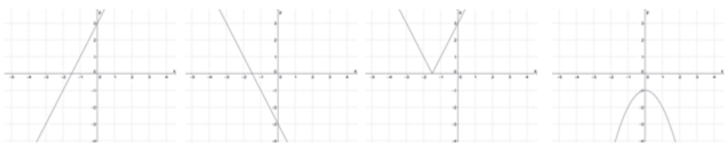
Abb. 1: Stufen der Verfügbarkeit von Kenntnissen

Einmal angeeignete Kenntnisse können zu späteren Zeitpunkten unterschiedliche Verfügbarkeitseigenschaften aufzeigen (vgl. Abbildung 1). So kann auch auf der Verfügbarkeitsstufe des Grundwissens und Grundkönnens weiter unterschieden werden zwischen den sogenannten *Elementarbausteinen* und dem *Sicheren Wissen und Können*. Elementarbausteine zeichnen sich dadurch aus, dass sie nicht nur dauerhaft und situationsunabhängig verfügbar sind, sondern sogar automatisiert verwendet werden können. Natürlich müssen nicht alle Kenntnisse, die eine Schülerin/ein Schüler einmal erworben hat, im späteren Unterrichtsverlauf ständig präsent und ad hoc abrufbar sein. Es ist völlig legitim, wenn bestimmte Kenntnisse einer (Re)Aktivierung durch die Lehrkraft, einem Nachschlagen in der Formelsammlung oder einer Kontrolle durch ein CAS bedürfen *(Verfügbarkeitsstufe des (re)aktivierbaren Wissens und Könnens)*. Ebenso ist es denkbar, für bestimmte Lerngegenstände nur eine episodenhafte Verfügbarkeit *(Stufe des exemplarischen Wissens und Könnens)* zu fordern (vgl. Sill, 2010). Eine Kategorisierung anhand der vorgestellten Verfügbarkeitsskala orientiert sich dabei immer an der *langfristig* geforderten Verfügbarkeit. Kurzfristig betrachtet, d.h. in Hinblick auf die aktuelle Unterrichtseinheit, können bestimmte Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren durchaus auch eine höhere Verfügbarkeit erfordern, auch wenn sie langfristig zum (re)aktivierbaren Wissen und Können zu zählen sind.

Entscheidend ist zu überlegen, für welchen Lerngegenstand welche Verfügbarkeitsstufe gefordert wird. Insbesondere eine Abgrenzung gegenüber dem reaktivierbaren Wissen und Können kann die inhaltliche Festlegung des Grundwissens und Grundkönnens erheblich erleichtern. Abbildung 2 zeigt exemplarisch, wie eine nach den beschriebenen Verfügbarkeitsstufen differenzierte Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen im Bereich der Differentialrechnung aussehen kann.

Die elementaren Ableitungsregeln, wie sie in der Aufgabe 1 in einschrittiger Form gefordert werden, sind Bestandteil vieler weiterer Anforderungen der Differentialrechnung und sollten den Lernenden daher als absolut notwendiges Handwerkszeug automatisiert zur Verfügung stehen. Auch das Verfahren des graphischen Differenzierens – wie in Aufgabe 2 gefordert – sollte dauerhaft und hilfsmittelfrei beherrscht werden. Ein kurzes Nachdenken ist hier jedoch völlig legitim. Zur Bearbeitung von Aufgabe 3 ist von den Autoren die Verwendung von digitalen Hilfsmitteln hingegen ausdrücklich vorgesehen, sodass die entsprechenden Anforderungen dem (re)aktivierbaren Wissen und Können zuzuordnen sind. Für die in Aufgabe 4 geforderten Kenntnisse reicht letztlich eine episodenhafte Verfügbarkeit aus, sodass diese Aufgabe auf der Stufe des exemplarischen Wissens und Könnens eingeordnet werden kann.

Ein solides Grundwissen und Grundkönnen bietet mit der Möglichkeit, auf zentrale Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren jederzeit und möglichst sogar in automatisierter Form zurückgreifen zu können, eine starke kognitive Entlastung (vgl. zur Cognitive Load Theory u. a. Sweller, 2005). Kapazitäten des Arbeitsgedächtnisses, die auf diese Weise frei werden, können für die Aktivierung der je nach Anforderungssituation notwendigen Kompetenzen wie Argumentieren oder Modellieren verwendet werden.

Grundwissen und Grundkönnen	Elementarbausteine	Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen: $f(x) = x^2$ $g(x) = \sin(x)$ $h(x) = 3x^4+0{,}5$
	Sicheres Wissen und Können	Aufgabe 2  Ordnen Sie der gegebenen Funktion f ihre Ableitungsfunktion zu: a b c d  *Quelle: VeMINT Online-Mathematikvorkurs 2013. Vortest*
(Re)Aktivierbares Wissen und Können		Aufgabe 3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -14x + x^2 + x - 1$ Stellen Sie den Graph von f und den Graph von f ' in einem Koordinatensystem dar. *Quelle: Baum, M., Bellstedt, M., u.a. (2012): Lambacher Schweizer, Mathematik Analysis Leistungskurs.*
Exemplarisches Wissen und Können		Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Funktionen f mit der Eigenschaft $f(x) = f'(x)$. *Lösungshinweis*: Sei f eine Lösung der Gleichung $f'(x) = f(x)$. Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ und bilden Sie die Ableitung $h'(x)$.

Quelle: Sill, H.-D., u.a. (2009): Ziele und Aufgaben zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Schwerin : Landesinstitut für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern. (abrufbar unter: http://www.mathe-mv.de/publikationen/gymnasiale-oberstufe/vorschlaege-klasse-10-bis-12-der-ag-gymnasiale-oberstufe-mathematik/) [Stand: 10.03.15]

Abb. 2: Beispielanforderungen für verschiedene Verfügbarkeitsstufen

Ein Weiterlernen wird hierdurch sehr erleichtert bzw. überhaupt erst ermöglicht. Daher muss die Forderung nach einer ständigen Verfügbarkeit der dem Grundwissen und Grundkönnen zugerechneten Inhalte grundsätzlich für *alle* Schülerinnen und Schüler gelten. Es handelt sich bei der Festlegung von Grundwissen und Grundkönnen um eine Art *Minimalstandard* in Hinblick auf die dauerhaft und auch hilfsmittelfrei verfügbaren Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu den grundlegenden Inhalten. Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen soll unter Grundwissen und Grundkönnen Folgendes verstanden werden:
Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen am Ende der Sekundarstufe II bezeichnet jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus den beiden Sekundarstufen, die bei allen Schülerinnen und Schülern in Form von mathematischen Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren langfristig und situationsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen.

3 „Was man an Mathematik wissen und können sollte" – drei Perspektiven

Bei der Festlegung dessen, was als unverzichtbare Grundlage für ein erfolgreiches Weiterlernen notwendig ist, tritt ebenso wie bei der Festlegung von Regelstandards das Problem auf, aus „allgemeinsten Lernzielen" (Winter, 1972) inhaltlich konkretisierte Ziele abzuleiten – eine Problematik, die bereits zu Beginn der siebziger Jahre intensiv diskutiert wurde (vgl. u. a. Teschner, 1972; Winter, 1972). Solche allgemeinen Lernziele, wie sie auch bei Bigalke (1971), Zech (1998) und anderen beschrieben werden, sind zunächst nicht inhaltsfixiert, sondern müssen auf eine inhaltliche Ebene heruntergebrochen werden. Aus diesem Zusammenhang stammt der oft zitierte und in Hinblick auf Grundwissen und Grundkönnen in vielerlei Hinsicht zutreffende Satz von Heinrich Winter „Es gibt kein Stricken ohne Wolle." (Winter, 1972, S. 69).

Die Festlegung des für das Erreichen allgemeiner Lernziele notwendigen Grundwissens und Grundkönnens erfordert letztendlich immer einen Entscheidungsprozess, in dem verschiedene Forderungen und Erwartungen gegeneinander abgewogen werden müssen. Forderungen werden von wissenschaftlicher Seite (z. B. Mathematik, Lernpsychologie, Pädagogik) gestellt, aber ebenso aus gesellschaftlicher bzw. bildungspolitischer Sicht. Schon in den Siebzigern wurde votiert, dass es nicht Aufgabe der Fachdidaktik sei, diesen Aushandlungsprozess zu einem eindeutigen Ergebnis zu führen, sondern ihn vielmehr in jedem Schritt der Entscheidungsfindung zu begleiten (vgl. Teschner, 1972; Vogel, 1973).

Bei einer genaueren Betrachtung solcher Aushandlungsprozesse lassen sich drei unterschiedliche Zielperspektiven auf mathematisches Grundwissen und Grundkönnen ausmachen: Eine *fachwissenschaftlich-systematische Perspektive,* eine *allgemeinbildende-reflexionsorientierte Perspektive* und eine *nützlichkeits- und anwendungsorientierte Perspektive*. Eine Unterscheidung dieser drei Perspektiven erlaubt eine tendenzielle Einordnung bestehender Konzepte und kann so helfen, Unterschiede in ihrer inhaltlichen Konkretisierung und Operationalisierung zu erklären. Es gibt aber auch Gemeinsamkeiten dieser drei Perspektiven. Beispielsweise würde die Zielstellung einer *individuellen Lebensvorbereitung durch Anwendbarkeit der* *verfügbaren Kenntnisse im Alltag* in die Schnittmenge von allgemeinbildender-reflexionsorientierter Perspektive und nützlichkeits- und anwendungsorientierter Perspektive fallen. Im Folgenden sollen einige aktuelle, sich zum Teil auf die Sekundarstufe I beschränkende Konzepte vorgestellt und hinsichtlich der drei Zielperspektiven verortet werden.

Das Konzept der *Basiskompetenzen* wurde von einer Expertengruppe aus der Mathematikdidaktik entwickelt, um schulformübergreifend festzulegen, was jeder Absolvent der allgemeinen Pflichtschulzeit können sollte. Der Fokus liegt auf einer erfolgreichen Bewältigung der Anforderungen aus Alltag und Berufseinstieg. Hierzu wurden mit Unterstützung der Deutschen Industrie- und Handelskammer (DIHK) auch Ausbildungsunternehmen an der Diskussion um Inhalte und Beispielaufgaben beteiligt (vgl. Drüke-Noe et al., 2011). Zielstellung und Vorgehen machen deutlich, dass bei diesem Konzept der Basiskompetenzen eine anwendungs- und nützlichkeitsorientierte Perspektive von elementaren, für die Verwendung und das Weiterlernen im beruflichen und gesellschaftlichen Kontext wichtigen Kompetenzen im Vordergrund stand. Das schließt die Befähigung ein, "als mündige Bürgerinnen und Bürger am gesellschaftlichen und kulturellen Leben" im Sinne von Winter (1995) aktiv teilzunehmen (vgl. Drüke-Noe et al., 2011, S. 10). Die Autorinnen und Autoren empfehlen eine Fortsetzung dieses Kataloges für die Sekundarstufe II und fordern, dass Basiskompetenzen für die Sekundarstufe II bzw. für das Abitur grundsätzlich auch kulturhistorische Aspekte berücksichtigen sollen, keineswegs „formale“ Bildung zu Gunsten vordergründiger Anwendbarkeit vernachlässigen dürfen und die Standards für die Sekundarstufe I beachten und vertiefend fortsetzen sollen. Es liegt nahe, eine Katalogerweiterung vorzusehen, die sich an den Leitideen der Sekundarstufe II orientiert.

Eine Liste von Basiskompetenzen nützt den Adressaten jedoch nur dann, wenn die geforderten Kompetenzen durch exemplifizierende Beispielaufgaben möglichst in einem unterrichtlichen Kontext erläutert werden. Beispielsweise sollten Abiturienten in der Lage sein, (verwandte) Brüche z. B. der Form $\frac{n}{(n-1)}$ und $\frac{(n+1)}{n}$ miteinander vergleichen zu können. Das bedeutet u. a. auch, dass in konkreten Zahlenbeispielen eine solche Struktur erkannt wird. In dieser Basiskompetenz sind verschiedene Elemente von Grundwissen und Grundkönnen, insbesondere Termumformungsregeln, enthalten.

Dieses Konzept der Basiskompetenzen greift damit weiter als das oben definierte Grundwissen und Grundkönnen. Basiskompetenzen beziehen sich auch auf Fähigkeiten und Fertigkeiten im Einsatz von Hilfsmitteln (z. B. Taschenrechner, Tabellenkalkulation) – ganz im Sinne des Weinertschen Kompetenzbegriffs, der Befähigungen und Bereitschaft zum Bewältigen von Problemsituationen in den Blick nimmt, ohne Wege und Werkzeuge vorzugeben.

Im Rahmen des Konzepts des *Sicheren Wissens und Könnens* (vgl. u. a. Sill & Sikora, 2007) wurde von einer Autorengruppe um Hans-Dieter Sill (Universität Rostock) eine Reihe themenspezifischer Inhalts- und Aufgabenkataloge für die Sekundarstufe I und II entwickelt. Diese Kataloge werden allen Lehrkräften durch das Landesinstitut für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern in Form von verschiedenen Broschüren zur Verfügung gestellt (http://www.mathe-mv.de/ [Stand: 25.06.14]). Ziel des Konzepts ist es, mit der Festlegung des Sicheren Wissens und Könnens für jeden Schüler/ jede Schülerin eine inhaltliche Basis zu schaffen, die einerseits das Weiterlernen im Mathematikunterricht ermöglicht (fachwissenschaftlich-systematische Perspektive) und sie andererseits befähigt, die „Anforderungen an jeden Bürger der Gesellschaft außerhalb des Mathematikunterrichts“ (Sill et al., 2005, S. 7) zu bewältigen (allgemeinbildend-reflexionsorientierte Perspektive).

Eine vorwiegend reflexionsorientierte Perspektive ist beim *Grundwissen*-Konzept von Fischer und Peschek zu finden. In Anlehnung an die Idee der „Höheren Allgemeinbildung“ von Fischer (2001) sollen die Lernenden durch die Verfügbarkeit von Grundwissen insbesondere dazu befähigt werden, mit Experten zu kommunizieren (vgl. Peschek, 2011, S. 19 f.). Dieses Konzept ist die Basis der sogenannten *Grundkompetenzen,* die den Kern der künftigen zentralen schriftlichen Reifeprüfung in Österreich (Zentralmatura) bilden sollen (Siller et al., 2012).

Neben den drei genannten gibt es noch Konzepte, in denen die Anschlussfähigkeit des Wissens und Könnens zu weiterführenden (schulischen und universitären) Lernprozessen im Vordergrund steht, sodass hier eine vorwiegend *fachwissenschaftlich-systematische Perspektive* eingenommen wird.

Ein Beispiel für diese Perspektive stellt das Grundwissen-Konzept von Pinkernell und Greefrath (2011) dar, das Grundwissen als „intelligente Wissensbasis“ (S. 110) für ein erfolgreiches Weiterlernen sieht. Hierbei wird der Übergang Schule-Hochschule in den Blick genommen. Ein weiterer Fokus liegt hier auf den Konsequenzen, die sich aus dem Einsatz digitaler Hilfsmittel für die inhaltliche Festlegung von Grundwissen ergeben.

Auch die Arbeitsgruppe, die sich im Rahmen des Projekts „cosh – Cooperation Schule Hochschule“ aus Mathematik-Lehrenden an Hochschulen und beruflichen Schulen in Baden-Württemberg gebildet hat, vertritt in erster Linie eine fachwissenschaftlich-systematische Perspektive. Ziel des Projekts ist die Analyse und Verbesserung des Übergangs zwischen beruflicher Schule und Fachhochschule. Der mit Ausrichtung auf WiMINT-Studiengänge formulierte „Mindestanforderungskatalog“ ist online verfügbar unter https://www.hs-karlsruhe.de/hochschule/lehre/didaktische-weiterbildung-und-austausch/cosh-cooperation-schule-hochschule.html [Stand: 25.6.2014].

Die genannten Konzepte zur Beschreibung von Grundwissen und Grundkönnen kommen zu durchaus unterschiedlichen Ergebnissen in der Operationalisierung und bei den dazu entwickelten Beispielaufgaben, was sich durch die jeweils eingenommene Perspektive auch erklären lässt. Das Zugrundelegen einer Zielperspektive entspricht immer einer normativen Festlegung des Wissens und Könnens, über das alle Schülerinnen und Schüler dauerhaft verfügen sollten.

Eine andere Frage ist die nach dem tatsächlichen Können der Lernenden im Vergleich zu diesen normativen Setzungen, was zum Beispiel mit entsprechenden Tests zu messen versucht wird. Mit solchen Tests wird eine sozialnormorientierte Perspektive eingenommen, welche die normativen Setzungen aus den bereits benannten Perspektiven sinnvoll ergänzen kann, um zu realistischen Zielstellungen im Curriculum zu gelangen und Entwicklungen von Schülerpopulationen in der Zeit aufzeigen zu können.

Im Sinne einer größtmöglichen Transparenz bei der Festlegung von Grundwissen und Grundkönnen sollte der Anspruch bzw. die Perspektive der jeweiligen Konzepte deutlich ausgewiesen werden. Das gilt für die Entwickler von Kerncurricula in den einzelnen Ländern, z. B. bei der Beschreibung von Übergangsprofilen, ebenso wie für die Fachschaften an den Schulen, die tagtäglich Entscheidungen für ihren aktuellen Unterricht und für Leistungsbewertungen treffen müssen. Zwar gibt es bereits viele Materialien zur Sicherung von Basiswissen (u. a. Bruder, 2008, vgl. auch Abschnitt 5.3), allerdings sind diese in der Regel sehr pragmatisch und nicht systematisch nach definierten Kriterien angelegt. Das Auswählen geeigneter Aufgaben zur Beschreibung des erwarteten Grundwissens und Grundkönnens bleibt weiterhin Aufgabe der Lehrkräfte.

Die inhaltliche Konkretisierung von Grundwissen und Grundkönnen wird in den nächsten Jahren Diskussionsgegenstand der Fachdidaktik bleiben (müssen), wobei auch alle anderen betroffenen gesellschaftlichen Gruppen, insbesondere die Lehrkräfte, in die Diskussion einbezogen werden sollten. Die bereits vorliegenden Konzepte bieten hierfür geeignete Ansätze. Im Folgenden werden aktuelle Entwicklungen zur Berücksichtigung von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen in der Abiturprüfung diskutiert.

4 Zur hilfsmittelfreien Verfügbarkeit mathematischen Grundwissens und Grundkönnens

Inzwischen haben mehrere Bundesländer einen länderübergreifenden Prüfungsteil vereinbart. Diese Aufgaben sind ohne Zuhilfenahme von Hilfsmitteln zu bearbeiten, was durch unterschiedliche curriculare Rahmenbedingungen für den Technikeinsatz im Unterricht begründet wird. Gleichzeitig aber zieht man eine Verbindung zwischen diesem Prüfungsteil und grundlegenden mathematischen Kompetenzen, die „mit Blick auf die vielen Schnittstellen innerhalb von Schule und beim Übergang zum Studium oder zur Berufsausbildung“ (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012) nachhaltig verfügbar sein müssen. Ist hilfsmittelfrei verfügbares Wissen und Können automatisch auch grundlegendes Wissen und Können? Und umgekehrt gefragt: Muss grundlegendes Wissen und Können prinzipiell hilfsmittelfrei verfügbar sein?

Einer prinzipiell hilfsmittelfreien Verfügbarkeit mathematischen Grundwissens und Grundkönnens kann man durchaus zustimmen. Eine pragmatische Begründung wie beim länderübergreifenden Abitur 2014 muss aber nicht jeden überzeugen, deshalb wollen wir die hilfsmittelfreie Verfügbarkeit mathematischen Grundwissens und Grundkönnens in Form von drei Thesen mit Blick auf die Definition in Abschnitt 1 diskutieren.

These 1: Dass der Einsatz von Taschenrechnern und anderen digitalen Werkzeugen im Unterricht zu geringeren Fertigkeiten führt, ist das falsche Argument für die Forderung nach hilfsmittelfreier Verfügbarkeit mathematischen Grundwissens.

Wiederholt hört man, dass die wachsende Präsenz mobiler digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht zu schwindenden grundlegenden Fertigkeiten führt (vgl. z. B. Risse, 2009; vom Lehn, 2009). Diese Hypothese mag auf den ersten Blick plausibel sein, empirische Belege hierfür gibt es aber nicht. Gleichzeitig wird gefordert, den Einsatz digitaler Werkzeuge zu reduzieren und insbesondere mobile Geräte wie (graphikfähige) Taschenrechner ganz abzuschaffen. Auch dies spräche angesichts vielfach dokumentierter guter Erfahrungen (Barzel, 2012) gegen die Empirie. Eigentlich wäre angesichts der wachsenden Präsenz mobiler Rechengeräte im Alltag die umgekehrte Begründung zu liefern. Warum soll ich noch einen Funktionsgraphen von Hand ins Heft zeichnen, wenn ich mir das Bild doch leicht digital anzeigen lassen kann?

Offensichtlich kann es bei der Frage, was rechnerfrei beherrscht werden soll, nicht zuerst um die Identifikation einzelner Rechenalgorithmen gehen, die schriftlich durchzuführen wären. Vielmehr muss man sich zunächst fragen, inwieweit eine hilfsmittelfreie Verfügbarkeit einzelner Verfahren oder Begriffe zu einem verständigen Lernen von Mathematik beitragen kann (Gardiner, 2001). In diesem Fall geht es um ein verfügbares „Bildwissen" von Funktionen, das eine notwendige Voraussetzung z. B. für geeignete Modellierungen zu gegebenen Daten darstellt. Deshalb sind z. B. Freihandzeichnungen zu verschiedenen Möglichkeiten, wie drei (vier) gegebene Punkte durch eine analytisch beschreibbare Kurve verbunden werden können, eine legitime Aufgabe u. a. auch zum Wachhalten des Bildwissens über typische Kurven- bzw. Funktionsverläufe.

These 2: Hilfsmittelfrei verfügbares Grundwissen wird auch durch einen sinnvollen Einsatz digitaler Hilfsmittel geprägt.

Der Einsatz digitaler Werkzeuge ist mit der Erwartung verbunden, dass sie das Wissen der Lernenden umfassend und sachgerecht prägen. Zum Beispiel soll das Lernen mit multiplen, dynamisch vernetzten Repräsentationen funktionaler Zusammenhänge dazu führen, dass auch das Wissen über Funktionen sich durch Dynamisierbarkeit und Vernetzung von Term, Wertepaaren und Schaubildern auszeichnet. Weigand und Bichler (2010) weisen darauf hin, dass vorhandene Kompetenzmodelle ggf. um die Aspekte erweitert werden müssen, die der Medieneinsatz mit sich bringt. Auch grundlegendes Wissen und Können würde sich durch entsprechend vernetzte und dynamisierte Inhalte auszeichnen. In Anwendungs- oder gar Prüfungssituationen aber sind digitale Hilfsmittel nicht notwendig, um vernetzte und insbesondere dynamisierte Wissensinhalte abzurufen. Auch an klassischen Papier- und Bleistift-Aufgaben kann sich ein Grundwissen zeigen, das durch den Einsatz dynamischer Mathematiksoftware geprägt ist (Abbildung 3).

Die gestrichelte Linie wird vom Punkt A aus um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Funktionswert von F(x) gibt den Inhalt der grau unterlegten Fläche an, wenn die gestrichelte Linie die Entfernung x vom Punkt A erreicht hat.

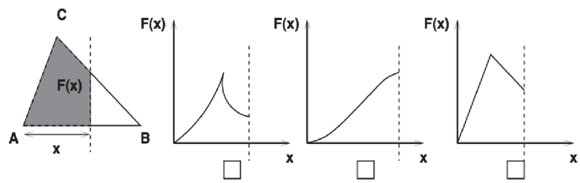


Abb. 3: Item „Welcher Funktionsgraph passt?" (nach Schlöglhofer, 2000, S.17)

These 3: Hilfsmittelfrei verfügbares Grundwissen unterstützt eine fachlich angemessene Absicherung mathematischer Entdeckungen.

Hierin kommt der Anspruch des Faches Mathematik an eine formale Wissenssicherung zum Ausdruck. Zwar mögen digitale Werkzeuge beim Entdecken neuer Zusammenhänge im heuristischen Sinne hilfreich sein. Die fachsystematische Sicherung der entdeckten Zusammenhänge erfolgt dagegen deduktiv, d.h. indem man es auf gesichertes Wissen zurückführt. Das gilt auch beim Einsatz von mathematischer Software in der Schule (Abbildung 4). Dass m und n die Nullstellen des Terms $(x - m)(x - n)$ angeben, ist nicht dadurch begründet, dass Schaubild und Wertetabelle sie für jeden Wert von m und n bestätigen, sondern weil dies zum Beispiel durch den Satz vom Nullprodukt begründet werden kann. Dabei hängt die Entscheidung, ob ein bestimmter Satz zum verfügbaren Grundwissen und Grundkönnen gehören sollte, nicht davon ab, auf welchem möglichen Wege diese Erkenntnis gewonnen wurde.

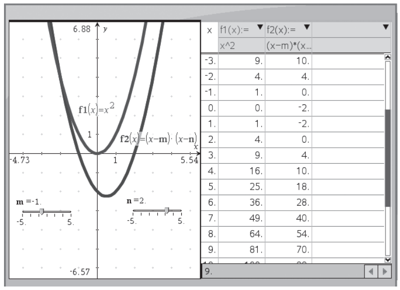


Abb. 4: Entdeckung zu Nullstellen mit dem Satz vom Nullprodukt

Zusammenfassend gilt: Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen sollte prinzipiell *hilfsmittelfrei* verfügbar sein. Diese Forderung lässt sich nicht aus Hinweisen auf vermeintlich schwindende Grundfertigkeiten ableiten, was man auf eine erhöhte Präsenz von neuen Technologien im Unterricht zurückführt, sondern sie folgt zuerst aus dem Merkmal der situationsunabhängigen und flexiblen Verfügbarkeit dieses Grundwissens und Grundkönnens. Hinzu kommt, dass ein produktiver Einsatz digitaler Werkzeuge beim Lernen hilfsmittelfrei verfügbare grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten voraussetzt.

Im nächsten Abschnitt geht es um methodische Möglichkeiten der Unterstützung sowohl des Erwerbs verfügbarer Kenntnisse als auch des langfristigen Wachhaltens von Grundwissen und Grundkönnen. Auf webbasierte Möglichkeiten der Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen und zur Selbsteinschätzung der Lernenden kann hier nur hingewiesen werden.

5 Grundwissen und Grundkönnen ausbilden und wachhalten

5.1 Verständige und aspektreiche Zugänge schaffen

Gerade grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten sollte man nicht nur korrekt wiedergeben können, sondern „verstanden haben“. Theorien des Verstehens gibt es in der mathematikdidaktischen Literatur reichlich, man könnte sie mit Blick auf mathematisches Grundwissen unter folgenden Aspekten des Verstehens zusammenfassen:

- vertieftes Verstehen von Rechenverfahren und Begriffsanwendungen im Sinne des operativen Prinzips (Wittmann, 1981), das sich in einem erfolgreichen Bewältigen von Grund- und Umkehraufgaben und anderen Aufgabenvariationen ausdrückt (Schupp, 2002; Bru-

der, 1990a; Büchter & Leuders, 2005);
- Aktivierung von gängigen Grundvorstellungen zum jeweiligen Begriff oder Verfahren (vom Hofe, 1998, Wartha & Schulz, 2011);
- Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen eines Begriffes oder Verfahrens (vgl. u. a. Malle, 1993);
- Anwenden der betreffenden Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren in inner- und außermathematischen Kontexten.

Zur Realisierung dieser Anforderungen im Unterricht spielt ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben eine entscheidende Rolle. Das Übungskonzept von Schipper (2009) mit Formen des automatisierenden, operativen, struktur- und anwendungsorientierten Übens bietet sich auch für die Oberstufe an, ebenso die Anregungen für eine variationsreiche Aufgabengestaltung von Bruder (1990b), Bruder, Büchter und Leuders (2008) und Büchter und Leuders (2005), aber auch die kompakten Übungssequenzen von Reibis (1998). Nach einem empirisch geprüften Übungsphasenkonzept in der gymnasialen Oberstufe ist eine Anforderungsentwicklung beim Üben, Vertiefen und Anwenden von den „ersten Übungen“ mit Identifizierungs- und Realisierungshandlungen über vielfältige und vertiefende Übungen bis hin zu komplexen, über den aktuellen Inhaltsbereich hinausgehenden Übungen und Anwendungen erfolgreich (vgl. Bruder, 1990b). Dabei wird in den ersten Übungen bereits eine entscheidende Grundlage gelegt für ein Beherrschen und verständiges Anwenden von Grundwissen und Grundkönnen (vgl. Bruder, 2001).

Zum Nachschlagen und Erinnern im Sinne eines Wissensspeichers, den man möglichst sogar selbst angelegt haben sollte, eignen sich vernetzte Darstellungen von Grundwissen und Grundkönnen (vgl. Bruder, 2001) sehr gut. Zum Aufnehmen von Wissen in Form von „etwas auswendig lernen“ eignen sich solche Übersichten jedoch nicht, weil auf diese Weise nichts verstanden (vernetzt) wird und viele Lernende schon an dem großen Umfang scheitern würden.

5.2 Ausgewählte Inhalte transparent machen

Nicht alles, was im Unterricht thematisiert wird, muss auch langfristig und umfassend behalten werden. Im Kompetenzebenenmodell von Sill und Sikora (2007) wird zwischen mehreren Ebenen der Verfügbarkeit unterschieden (vgl. auch Abschnitt 2), darunter ist die Ebene der sicheren Verfügbarkeit nur eine von drei. Die logistische Funktion zum Beispiel wird häufig im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen thematisiert. Sie reichert gewissermaßen den Fundus an möglichen Modellfunktionen an, aus dem beim Modellieren differenziert und begründet ausgewählt werden muss. Lernziel ist hier die Ausbildung von Modellierungskompetenz. Der Begriff „logistische Funktion" dient dem Erreichen dieses Lernziels und muss nicht auf Dauer im Sinne von Grundwissen und Grundkönnen verfügbar sein. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass auch für Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren, die langfristig betrachtet dem (re)aktivierbaren Wissen und Können zugerechnet werden, zum Zeitpunkt des Erwerbs durchaus eine höhere Verfügbarkeit, gefordert werden kann. Welche Inhalte nur momentan wichtig sind und welche nicht, das können die Schülerinnen und Schüler allein nicht entscheiden. Hier ist die Lehrkraft aufgefordert, Transparenz zu schaffen. Hierzu gibt es in den Phasen einer Unterrichtseinheit vielfach Gelegenheit (vgl. Bruder & Reibold, 2010):

- Zu Beginn einer Unterrichtseinheit relevante mathematische Grundlagen thematisieren *(Ausgangsniveausicherung):* Das Erlernen eines neuen mathematischen Begriffs oder Verfahrens knüpft sinnvollerweise an vorhandene Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten an. Damit ihre Reaktivierung die Erarbeitungsphase des neuen Begriffs nicht überlagert, ist es sinnvoll, diese vor der Einführungsstunde etwa in Form einer vorbereitenden Hausaufgabe vorzuziehen oder im Rahmen von Wiederholungen in den Übungen und Anwendungen langfristig vorzubereiten.
- *Rückblick* auf den Kern des in den ersten Stunden Gelernten: Bruder und Reibold (2010) bezeichnen dieses diagnostische Element als „Lernprotokoll". Damit ist eine kurze Folge von Grund- und Umkehraufgaben gemeint, die gezielt typische Fragestellungen und Anwendungssituationen sowie wichtige Grund- und Fehlvorstellungen zum neuen Inhalt in den Blick nimmt, vgl. auch Hasenbank-Kriegbaum (2008). Abbildung 5 zeigt beispielhaft ein Lernprotokoll zur lokalen Änderungsrate einer Funktion.

Lernprotokoll zur lokalen Änderungsrate einer Funktion (Ableitungsbegriff)

1. Beschreiben Sie verschiedene Möglichkeiten, wie man die Steigung einer Geraden im Koordinatensystem bestimmen kann.
2. Erläutern Sie an einem Beispiel, was man unter der lokalen Änderungsrate einer Funktion versteht.
3. Erläutern Sie anhand einer Skizze die geometrische Bedeutung des Differenzenquotienten $D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
4. Was berechnet ein CAS bei der Eingabe $\frac{d}{dx}(x^2 + 1, -1)$?
5. Was bedeutet die Ableitung eines zeitabhängigen Zusammenhangs – z. B. bei einer chemischen Reaktion, für die Holzmenge des Waldes oder für die Temperatur einer Kaffeetasse?

Abb. 5: Lernprotokoll zur lokalen Änderungsrate einer Funktion

- Am Ende der Einheit erfolgt die *Vorbereitung auf eine Lernkontrolle,* in der z. B. Checklisten Transparenz für Lehrkräfte und Lernende schaffen und Gelegenheit geben, das grundlegende Wissen und Können zu diagnostizieren. Die in dieser Liste angesprochenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sollten immer die „Basics" der Einheit enthalten, die dann auch langfristig verfügbar sein sollten. Zum Umgang mit Lernprotokoll und Checkliste vgl. z. B. Wehrse und von Kosak (2010).

5.3 Situationsunabhängige, langfristige und hilfsmittelfreie Verfügbarkeit schaffen

Insbesondere die langfristige (permanente) Verfügbarkeit grundlegenden Wissens und Könnens ist immer ein offensichtliches Problem gewesen: „Selbst meine Leistungskursschüler können keine Prozentrechnung mehr …" Wie sollen sie auch, wenn sie seit Langem keine Gelegenheit hatten, Prozentrechnung einzusetzen?

Die langfristige und situationsunabhängige Verfügbarkeit ist durch geeignete methodische Ideen bewusst in den Blick zu nehmen, wie etwa durch die im Folgenden beschriebenen regelmäßigen Übungen, die – wenn sie im Kopf zu lösen sind – auch die geforderte Hilfsmittelunabhängigkeit einlösen.

Damit das zu einem bestimmten Zeitpunkt Gelernte auch auf Dauer verfügbar bleibt, muss es regelmäßig ins Gedächtnis gerufen werden. Hierfür bieten sich sogenannte „regelmäßige Kopfübungen" (auch 10-Minuten-Übungen) oder tägliche Übungen an (vgl. Bruder, 2008; Lämmel & Sill, 2013). Das sind regelmäßige, methodisch präzise organisierte und insbesondere kurze Übungen, die das Grundwissen und Grundkönnen der vergangenen Schuljahre in aspektreichen Aufgabenstellungen wiederholen. Allerdings kann in diesen kurzen Übungssequenzen nur etwas wach gehalten werden, das schon einmal verstanden wurde. Verständnislücken können auf diese Weise nicht gefüllt werden. Im Projekt CAliMERO konnte die Wirksamkeit dieser regelmäßigen hilfsmittelfreien Kopfübungen in Verbindung mit einem CAS-Einsatz in der Sekundarstufe I bestätigt werden (vgl. Pinkernell & Bruder, 2011).

Abbildung 6 zeigt ein Beispiel für eine Kopfübung. Weitere erprobte Beispiele für Kopfübungen in den beiden Sekundarstufen werden zum Beispiel in der Aufgabendatenbank www.madaba.de bereitgestellt.

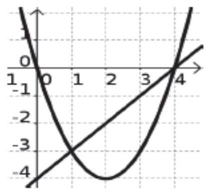
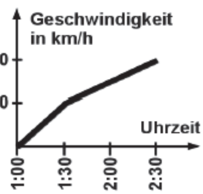
	Aufgabe	Ergebnis
1	Welcher Bruch ist größer: $\frac{411}{412}$ oder $\frac{412}{413}$?	
2	Ein Preis einer Ware ist um ein Drittel angehoben worden. Um wie viel Prozent war die Ware vorher billiger?	
3	Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung: $4 + 2 \cdot x^2 = 36$. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg.	
4	Die Graphik zeigt die Lösung einer quadratischen Gleichung: Welche Gleichung passt dazu? A: $4 - x = x(x - 4)$ B: $-x + 4 = x(4 - x)$ C: $x - 4 = x^2 - 4x$ (Mehrere Antwortkreuze sind möglich.) 	☐ A ☐ B ☐ C ☐ keine
5	Es sei $f(x) = x^3 - x$. Nennen Sie die Nullstellen.	
6	Lösen Sie das folgende Gleichungssystem: $\left\vert\begin{matrix} 2x + y = 2 \\ 4x - y = 7 \end{matrix}\right\vert$ Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg.	
7	Ein Rechteck hat die Seitenlängen 8 cm und 6 cm. Berechnen Sie die Länge der Diagonalen.	
8	Es sei f mit $f(x) = x^4 + 2x - 5$. Geben Sie den Term der ersten Ableitung an.	
9	Es sei f mit $f(x) = x^2 + 5$. Geben Sie eine Stammfunktion zu f an.	
10	Die Graphik zeigt, wie ein Versuchsfahrzeug bewegt wird.  Wie lang ist die Strecke, die das Fahrzeug in der ersten halben Stunde zurückgelegt hat?	

Abb. 6: Beispiel für eine Kopfübung in der Sekundarstufe II aus dem Projekt CAliMERO

6 Entwicklungspotentiale und schulische Rahmenbedingungen

Eine vollständige oder gar „endgültige“ Festlegung, was das mathematische Grundwissen und Grundkönnen aus den im Abschnitt 2 beschriebenen drei verschiedenen Perspektiven umfassen soll, kann dieser Beitrag grundsätzlich nicht liefern. Und selbst wenn es möglich wäre, einen verbindlichen Katalog festzulegen, wäre es immer noch die Lehrkraft, die wichtiges Grundwissen und Grundkönnen im Unterricht betonen muss. Das fällt schwer, wenn die Lernenden zu Beginn eines Schuljahres mit vielfältigen Defiziten im Bereich des Grundwissens und Grundkönnens starten.

Viel wichtiger ist es deswegen, dass die Fachgruppe einer Schule einen solchen Katalog gemeinsam akzeptiert. In diesem Zusammenhang ist die Geschichte von Sisyphos – übertragen auf die Schule – hilfreich: Für die fehlende Einigung werden alle Lehrkräfte zu Beginn des Schuljahres damit bestraft, dass der Stein, der im Schuljahr mühsam den Berg heraufgerollt wurde, sich wieder im Tal befindet und die Arbeit von neuem beginnt.

Wir plädieren dafür, an Schulen einen verbindlichen und realistischen Katalog von Grundwissen und Grundkönnen festzulegen, der von allen Fachlehrern eingefordert und regelmäßig trainiert wird. Die größte Herausforderung für Fachschaften ist es wohl festzulegen, was zu einem bestimmten Zeitpunkt für das Weiterlernen wirklich wichtig ist. Die Beteiligten haben so die Chance, im Unterricht einen spürbaren Nutzen zu erfahren. Lehrkräfte müssen dabei primär auf ihre eigene Expertise zurückgreifen, da eine breite empirische Basis noch fehlt.

Ziel fachdidaktischer Entwicklungsarbeit sollte es sein, frei zugängliche Testbausteine zum ständig verfügbaren Grundwissen und Grundkönnen (mit den unterschiedlichen Perspektiven aus Abschnitt 3) an den Übergängen Sekundarstufe I zur Sekundarstufe II und Sekundarstufe II zur Hochschule für Lernende und Lehrkräfte bereit zu stellen.

Literaturverzeichnis

Abi-Boom: Jeder zweite Schüler schafft die Hochschulreife (2011, März). *Spiegel Online.* Zugriff am 25.06.2014 unter http://www.spiegel.de/schulspiegel/wissen/abi-boom-jeder-zweite-schueler-schafft-die-hochschulreife-a-748622.html

Baumann, A. (2013). Mathe-Lücken und Mathe-Legenden. *Die neue Hochschullehre, 5,* 150–153.

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert – aber wann?* Münster: Waxmann.

Bigalke, H.-G. (1971). Zur Situation der Mathematikdidaktik in der Bundesrepublik Deutschland. *In Mathematisch-physikalische Semesterberichte* (Bd. XVII, S. 225–245). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bruder, R. (1990a). Orientierung auf das Wesentliche im Mathematikunterricht mit Hilfe von „Grundaufgaben“ für jedes Stoffgebiet. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule Potsdam, 34,* 155–159.

Bruder, R. (1990b). Ein Gestaltungsmodell für Übungen und Anwendungen im Mathematikunterricht. *Math. Schule, 28* (12), 847–853.

Bruder, R. (2001). Mathematik lernen und behalten. *Pädagogik, 53* (10), 15–18.

Bruder, R. (2008). Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen. *mathematik lehren, 147,* 12–14.

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. & Reibold, J. (2010). Weil jeder anders lernt. Ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung. *mathematik lehren, 162,* 2–7.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern, Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen.

Cramer, E. & Walcher, S. (2010). Schulmathematik und Studierfähigkeit. *Lehren und Lernen, MDMV, 18* (2), 110–114.

Drüke-Noe, C., Möller, G., Pallack, A., Schmidt, S., Schmidt, U., Sommer, N. & Wynands, A. (2011). *Basiskompetenzen Mathematik für den Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht* (mit CD-ROM). Berlin: Cornelsen.

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In A. Fischer (Hrsg.), *Situation und Ursprung von Bildung* (S. 151–161). Leipzig: Universitätsverlag.

Gardiner, T. (2001). Education or CAStration?. *Micromath, 17,* 6–8.

Hasenbank-Kriegbaum, E. (2008). Momentaufnahme. Lernen begleiten mit dem Lernprotokoll. *Mathematik lehren, 147,* 15–16.

Hofe, R. von (1998). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13,* 345–365.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Rost, J., Tenorth, H. & Vollmer, H. (2003). *Expertise zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards.* Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF).

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Lämmel, P. & Sill, H.-D. (2013). Sicheres Wissen und Können in täglichen Übungen ausbilden. *Praxis der Mathematik, 55* (51), 22–26.

Lehn, B. vom (2009, November 10): Das Leid mit den Zahlen. *Welt am Sonntag.*

Lübke, F. (2013, 28. Februar). Haltet die Ingenieure. *Die ZEIT,* S. 75.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Wiesbaden: Vieweg.

Niedersächsisches Kultusministerium (2012). Vorwort des Niedersächsischen Kultusministeriums zur niedersächsischen Ausgabe der Musteraufgaben für das Fach Mathematik zur Vorbereitung auf die länderübergreifende Abiturprüfung 2014, hrsg. v. Bayerischem Staatsministerium für Unterricht und Kultus, der Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg, dem Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern, dem Niedersächsischen Kultusministerium und dem Sächsischen Staatsministerium für Kultus und Sport, & Ministerium für Bildung und Kultur Schleswig-Holstein.

Peschek, W. (2011). Zentralmatura Mathematik: Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen für alle. *Internationale Mathematische Nachrichten, 216,* 15–30.

Pinkernell, G. & Bruder, R. (2011). CAliMERO (2005–2010): CAS in der Sekundarstufe I – Ergebnisse einer Längsschnittstudie. *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 627–630). Münster: WTM.

Pinkernell, G. & Greefrath, G. (2011). Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 64* (2), 109–113.

Reibis, E.(1998). Aufgabenfolgen. *Mathematik lehren, 89,* 49–53.

Risse, T. (2009). *Save the World – ban pocket calculators in schools. International Workshop Mathematical Education of First-Year Engineering Students* (April 6–7, 2009). Technische Universität Berlin. Zugriff am 25.6.2014 unter: http://www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/Matheon09SEFI/

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel.

Schlöglhofer, F. (2000). Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *Mathematik lehren, 103,* 16–17.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Sill, H.-D. (2010). Probleme und Erfahrungen mit „Mindeststandards". *GDM-Mitteilungen, 88,* 5–11.

Sill, H.-D., Kowaleczko, E., Kretzschmar, H., Lindstedt, E., Müller, V. & Sabelus, H. (2005). *Sicheres Wissen und Können, Geometrie im Raum, Sekundarstufe I.* Zugriff am 25.6.2014 unter: http://www.math.uni-rostock.de/~didaktik/sichertxt-Dateien/SWK_raeumliche_Geometrie.pdf

Sill, H.-D. & Sikora, C. (2007). *Leistungserhebung im Mathematikunterricht. Theoretische und empirische Studien.* Hildesheim: Franzbecker.

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J. & Schodl, M. (2013). Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II. In G. Greefrath, Fr. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 950–953). Münster: WTM.

Sweller, J. (2005). Implications of cognitive load theory for multimedia learnning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 19–30). New York: Cambridge University Press.

Teschner, W.-P. (1972). Wissenschaftliche Zielanalyse als Kern der Curriculumsentwicklung. In Kultusminister des Landes NRW (Hrsg.), *Beiträge zum Lernzielproblem* (S. 12–44) Ratingen: Henn.

Vogel, D. (1973). Zum Problem der Lernzielbestimmung in der Mathematikdidaktik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1,* 23–31.

Wartha, S. & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.* Kiel: IPN Kiel.

Wehrse, T. & von Kossak, W. (2010). Selbstständigkeit fördern. Lernen begleiten mit Lernprotokollen und Checklisten. *Mathematik lehren, 162,* 22–24 und 41–43.

Weigand, H.-G. & Bichler, E. (2010). Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics lessons: the case of functions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 42,* 697–713.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17–31). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Winter, H. (1972). Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In Kultusminister des Landes NRW (Hrsg.), *Beiträge zum Lernzielproblem* (S. 67–95). Ratingen: Henn.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37–46.

Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Weinheim, Basel: Beltz.

10. Der Beitrag der Bildungsstandards zum Übergang Sekundarstufe II – Universität

Wolfram Koepf und Jürg Kramer

In diesem Kapitel soll der Beitrag thematisiert werden, den die Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife zur Bewältigung des Übergangs von der Sekundarstufe II an die Hochschule im Rahmen eines mathematikaffinen Studiums aus unserer Sicht leisten können. Dabei werden wir im ersten Teil ausgehend von den gültigen KMK-Beschlüssen die Anforderungen von Seiten der Universitäten diskutieren, die sie an ihre Erstsemesterstudierenden stellen. Im zweiten Teil unseres Beitrags sollen die Chancen aufgezeigt werden, welche durch die Bildungsstandards gegeben werden, um die Wünsche von Hochschulseite zu erfüllen. Dabei wird sich zeigen, dass in den Bildungsstandards noch nicht alle Aspekte befriedigend Berücksichtigung gefunden haben, mögliche Defizite aber im Rahmen der länderspezifischen Ausgestaltungen der Bildungsstandards behoben werden können.

1 Einleitung

In diesem Beitrag formulieren wir unsere Erwartungen und Hoffnungen aus der Sicht der Hochschule, d.h. als Hochschullehrer und erfahrene Lehrerbildner, entlang der Ziele, die die Kultusministerkonferenz (KMK) in ihrem Beschluss vom 09.02.2012 für die gymnasiale Oberstufe vorgibt und, unter Berücksichtigung der Kompetenzorientierung, wie sie mit den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012 (KMK, 2012) ihren vorläufig abschließenden Rahmen gefunden hat.

Kompetenzorientiert nennen wir einen Unterricht, der das Ziel verfolgt, dass Schülerinnen und Schüler „kognitiv verankerte (weil wissensbasierte) Fähigkeiten und Fertigkeiten [erwerben], die eine erfolgreiche Bewältigung bestimmter Anforderungssituationen ermöglichen“ (Lersch, 2010, S. 7). Die Kompetenzorientierung umfasst neben fachlichem Wissen und Können auch Interessen, Werthaltungen sowie soziale Bereitschaften und Fähigkeiten (überfachliche Kompetenzen).

Die von der KMK (2012, S. 9) in den Bildungsstandards formulierten Ziele für die gymnasiale Oberstufe lauten:

- Vertiefung der Allgemeinbildung
- Wissenschaftspropädeutik
- Entwicklung einer allgemeinen Studierfähigkeit.

Im Folgenden werden wir diese drei Aspekte im Hinblick auf den Übergang von der Sekundarstufe II an die Universität genauer erörtern.

2 Anforderungen von Hochschulseite

Wie einleitend dargelegt, sollen in diesem Abschnitt, angelehnt an die von der KMK formulierten Ziele für die gymnasiale Oberstufe, die Anforderungen von Seiten der Hochschule an Studierende des ersten Semesters, die ein mathematikaffines Studium (z. B. ein Studium der MINT-Fächer) aufnehmen, ausführlicher diskutiert werden.

2.1 Vertiefung der Allgemeinbildung

Nach Winter (1995) ist Mathematikunterricht dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht (ausführlicher s. im einleitenden Beitrag von Blum, Kapitel 1 in diesem Band):

(G1) Mathematik als für das Weltverstehen nützliche Disziplin
(G2) Mathematik als geistige Schöpfung und Welt eigener Art
(G3) Mathematik als Schule des Denkens und Mittel zur Fähigkeitsentwicklung.

Wir betonen aus der Perspektive der Anforderungen der Universität, dass erst das Zusammenspiel aller drei Grunderfahrungen ein adäquates Bild von Mathematik bei den Schülerinnen und Schülern hervorbringen kann, das es ihnen einerseits ermöglicht, sich bewusst für ein mathematikaffines Studium zu entscheiden, und sie andererseits zusammen mit den noch zu diskutierenden überfachlichen Kompetenzen auch befähigt, sich den Anforderungen eines solchen Studiums zu stellen.

Wir präzisieren nun die Erwartungen der Universität und ordnen sie schwerpunktmäßig den allgemeinen mathematischen Kompetenzen K1 bis K6, den Leitideen L1 bis L5 der Bildungsstandards[1] sowie den Winter'schen Grunderfahrungen G1 bis G3 zu.

[1] Die Abkürzungen entsprechen denen in den Bildungsstandards (KMK, 2012): K1: mathematisch Argumentieren; K2: Probleme mathematisch lösen; K3: mathematisch Modellieren; K4: mathematische Darstellungen verwenden; K5: mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik Umgehen; K6: mathematisch Kommunizieren; L1: Algorithmus und Zahl; L2: Messen; L3: Raum und Form; L4: funktionaler Zusammenhang; L5: Daten und Zufall. Zu den Bezeichnungen s. ebenfalls den einleitenden Beitrag von Blum.

Wir erwarten von Schülerinnen und Schülern, die ein mathematikaffines Studium an einer Universität aufnehmen:

- Sprachlich-logische Fähigkeiten (K1, K6; G3);
- Solide formale Rechenfertigkeiten, insbesondere in Bruchrechnung, Prozentrechnung, Termumformungen und Potenzrechnung (K5; G2);
- Die Fähigkeit, Beweisnotwendigkeiten zu erkennen und Beweise führen zu können (K1, K2; G2, G3);
- Wissen und Können zu elementaren Funktionen, d. h. Potenzfunktionen, ganzrationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen (K3, K4; L4; G1, G2);
- Grundwissen und -können zu Approximationsverfahren, insbesondere zu reellen Zahlen, Nullstellenberechnungen, Flächeninhaltsberechnungen (K5; L1, L2; G2);
- Grundwissen und -können zur mathematischen Modellierung, insbesondere von zufälligen Erscheinungen (K3; L1 bis L5; G1, G2, G3);
- Elementargeometrisches Grundwissen und -können darüber, wie man geometrische Probleme algebraisiert und umgekehrt algebraische Probleme geometrisiert (K2, K4; L2, L3; G2, G3).

2.2 Wissenschaftspropädeutik

An der Universität ist die Beherrschung des Kalküls die Basis für ein erfolgreiches Studium mathematikaffiner Fächer. Dazu tritt aber unverzichtbar das tiefe Verständnis für Begriffe und Konzepte sowie die Fähigkeit, mit diesen Begriffen und Konzepten umgehen zu können und Beziehungen zwischen ihnen herstellen zu können. Begründen und Beweisen spielen dabei eine zentrale Rolle (s. den Beitrag von Ufer und Kramer, Kapitel 7 in diesem Band). Der Mathematikunterricht muss Schülerinnen und Schüler hierauf vorbereiten, indem er ihnen ermöglicht, tragfähige und vielfältige Grundvorstellungen zu den Unterrichtsgegenständen zu erwerben und diese durch Verknüpfung der Leitideen beim Modellieren, Problemlösen und Beweisen wirksam werden zu lassen. Nur bedeutungshaltiges Wissen ist auf die Dauer lebendiges Wissen. Schrittweise muss eine Vernetzung des Basiswissens erfolgen und sich so zu einer mathematischen Welt im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler aufbauen. Erfahrung und Sicherheit im Umgang mit diesem Wissen entstehen vor allem durch selbstständiges Anwenden in inner- und außermathematischen Zusammenhängen. Gleichzeitig sollen Schülerinnen und Schüler an geeigneten Beispielen erfahren, dass die Mathematik eine lebendige Wissenschaft ist, in der es noch viele ungelöste Probleme gibt, die sich ständig weiterentwickelt und immer neue Anwendungen erfährt, die ihrerseits Impulse zu innermathematischen Entwicklungen geben.

Auf ein spezielles Problem möchten wir an dieser Stelle noch eingehen. Bekanntlich beobachten wir in Deutschland eine extrem breite Streuung der schulischen Leistungen im Sekundarbereich (Autorengruppe Bildungsberichterstattung, 2008). Zugleich zeigen nicht nur die Ergebnisse von TIMSS, PISA und ähnlichen Studien, dass die 25 % Leistungsstärksten eines Jahrgangs nicht das Spitzenniveau besitzen, das wir brauchen, um in Forschung und Technik langfristig international konkurrenzfähig zu sein. In diesem Zusammenhang wäre sicherlich eine verstärkte und systematische Förderung von mathematisch Interessierten und/oder Begabten fruchtbar. Diesen Ansatz legt auch eine Feststellung aus dem Bericht

„Bildung in Deutschland 2010" nahe, wonach die Fächergruppe Mathematik, Naturwissenschaften bei der Wahl der Studienberechtigten Anteile verloren hat und bei dieser Fachwahl die gewählten schulischen Schwerpunkte (Leistungskurse) eine wichtige Rolle spielen (Autorengruppe Bildungsberichterstattung, 2010).

2.3 Entwicklung einer allgemeinen Studierfähigkeit

Der Mathematikunterricht soll u. E. einen Rahmen und Impulse dafür bieten, dass Schülerinnen und Schüler
- der Mathematik positiv begegnen,
- offen sind auch für spielerische und ästhetische Komponenten mathematischen Tuns sowie
- bereit sind, sich auf mathematische Probleme mit Beharrlichkeit und Selbstvertrauen einzulassen.

Während die ersten beiden Punkte eher motivationale Aspekte überfachlicher Kompetenzen ansprechen, beinhaltet der letzte Punkt Bereitschaften und Fähigkeiten, die gerade zu Beginn eines mathematikaffinen Studiums von erheblicher Bedeutung sind und nicht selten über Abbruch oder Weiterführung des Studiums entscheiden (s. Dieter, 2011). Dazu gehören weiterhin
- Selbstorganisation,
- Selbsteinschätzung,
- Anstrengungsbereitschaft und
- Durchhaltevermögen.

Dies sind erfahrungsgemäß keine trivialen Forderungen. Inzwischen wurden an vielen Hochschulen Programme etabliert, die (teilweise von Studierenden höherer Semester durchgeführt) den Studienanfängerinnen und -anfängern helfen sollen, die aufgezählten Kompetenzen zu erwerben. Da diese Kompetenzen keineswegs nur für Studienanfängerinnen und -anfänger, sondern ebenso für Auszubildende bedeutsam sind, sehen wir es als allgemeinbildenden Auftrag der Schule an, dem Erwerb dieser Kompetenzen hinreichende Beachtung zu schenken. Überfachliche Kompetenzen können sehr gut im Kontext fachlicher Lehr- und Lernprozesse erworben werden. Herausfordernde Aufgabenstellungen sind dafür ebenso ein Beispiel wie Gelegenheiten zur Selbstreflexion über das eigene Wissen und Können in mündlicher oder schriftlicher Form.

3 Die Chance der Abiturstandards

Von Seiten der Hochschulen wird die Etablierung von Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife begrüßt, da bei konsequenter Implementierung an den Schulen und entsprechender Bezugnahme darauf durch die Hochschulen die Hoffnung besteht, dass sich die Diskrepanz zwischen den Erwartungen der Hochschulangehörigen und den Fähigkeiten der Studienanfängerinnen und -anfänger verringert. Die Chance der neuen Bildungsstandards Mathematik besteht also darin, dass bei deren Umsetzung in den einzelnen Ländern der Bildungsabschluss Abitur im Fach Mathematik in Deutschland auf eine möglichst einheitliche und verlässliche Basis gestellt wird. Es ist nun Aufgabe der Länder, die zum Teil offen gehaltenen Bildungsstandards in ihren Lehrplänen oder Kerncurricula möglichst konkret auszugestalten. Dabei ist es hilfreich, dass die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife unmittelbar an die Bildungsstandards zum Mittleren Bildungsabschluss anknüpfen:

> Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife sind eine direkte und organische Fortführung der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss. Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen sind unverzichtbare Grundlage für die Arbeit in der Sekundarstufe II. Sie werden dort beständig vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein. (KMK, 2012, S. 10)

3.1 Aspekte der Konkretisierung der Bildungsstandards

Aus Sicht der Mathematik-Kommission Übergang Schule – Hochschule der drei Fachverbände Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und Deutscher Verein zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) bieten die Bildungsstandards prinzipiell eine gute Ausgangslage für diese noch weitergehende Konkretisierung der zu erwerbenden inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen im Fach Mathematik, insbesondere im Hinblick auf die folgenden Aspekte:

a. Im Rahmen der Leitideen ist eine Unterscheidung zwischen den auszubildenden Grundvorstellungen und den zu erwerbenden kalkülhaften Könnenselementen hilfreich. Eine solche Differenzierung, die in den länderspezifischen Rahmenlehrplänen festgeschrieben werden sollte, erleichtert den Lehrkräften die Unterrichtsgestaltung.
   Beispiel: In der Leitidee funktionaler Zusammenhang werden wichtige Grundvorstellungen wie
   - die Ableitung als lokale Änderungsrate (grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau) oder
   - die Ableitung als lokale lineare Approximation (erhöhtes Anforderungsniveau)

   gleichgewichtig in einer Reihe mit kalkülhaften Könnenselementen aufgezählt wie z. B.
   - die Produktregel zum Ableiten von Funktionen verwenden.
b. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen können nur in Verbindung mit den in den Leitideen formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzen erworben werden. Daher muss bei der Implementierung der Bildungsstandards neben einer separaten Auflistung der beiden Kompetenzdimensionen der Synthese zwischen diesen eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.
   Beispielsweise tritt die allgemeine mathematische Kompetenz mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik Umgehen in allen Leitideen konkret auf. Aber z. B. auch die allgemeine mathematische Kompetenz mathematisch Modellieren sollte in allen Leitideen ebenso ihre Konkretisierung finden.
c. Der Winter'schen Grunderfahrung „Mathematik als Schule des Denkens“ (G3) sollte bei der Implementierung der Bildungsstandards besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. So sind etwa Beweisen und Begründen mathematische Kerntätigkeiten, die in allen Leitideen prägnant verankert werden sollten.
d. Die Leitideen sind auf der Ebene der Bildungsstandards noch nicht ausreichend miteinander vernetzt. Dies sollte in den Lehrplänen der Länder deutlicher geschehen.

Beispiel: Der propädeutische Grenzwertbegriff ist zwar in der Leitidee „Algorithmus und Zahl" erwähnt, findet aber keine explizite Berücksichtigung in der Leitidee funktionaler Zusammenhang, wo er z. B. im Zusammenhang mit dem Ableitungsbegriff unabdingbar ist.

e. Die Übergänge zwischen grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau müssen bei der Implementierung der Bildungsstandards sinnhaft ausgestaltet werden. In den Bildungsstandards ist dies noch nicht durchgängig nachvollziehbar.
Beispiel: In der Leitidee Messen ist beispielsweise sehr subtil im grundlegenden Anforderungsniveau der Abstand Punkt/Punkt thematisiert und findet seine genetische Fortsetzung im erhöhten Anforderungsniveau durch den Abstand Punkt/Gerade bzw. Punkt/Ebene im Raum. Demgegenüber wird in der Leitidee funktionaler Zusammenhang die Logarithmus-Funktion im erhöhten Anforderungsniveau sowohl als Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ als auch als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion behandelt, während sie im grundlegenden Anforderungsniveau gar nicht vorkommt. (Man könnte die Logarithmusfunktion im grundlegenden Anforderungsniveau im Rahmen der Integration von Funktionen mittels Stammfunktionen einführen und im erhöhten Anforderungsniveau weitere Eigenschaften wie z. B. den Zusammenhang zur Exponentialfunktion behandeln.)

f. Sowohl für die Lehrkräfte an den Schulen als auch für die Hochschulseite ist eine möglichst umfassende Konkretisierung der verpflichtenden Inhalte in den Bildungsstandards von großer Bedeutung. Beispielsweise muss auf beiden Seiten bekannt sein, welche Funktionenklassen in der Sekundarstufe II verpflichtend zu unterrichten sind. Wie bereits gesagt, erwartet die Hochschulseite Wissen und Können zu elementaren Funktionen, d. h. Potenzfunktionen, ganzrationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen. Diese Funktionenklassen sollten in den länderspezifischen Ausgestaltungen der Bildungsstandards verpflichtend verankert werden.

g. Digitale Werkzeuge bieten vielfältige Potenziale, die in den Bildungsstandards (KMK 2012, S. 12 f.) genannt werden. Beispielsweise können reale Daten stärker in den Unterricht einbezogen und umfangreiche Kalküle vom Werkzeug übernommen werden. Es besteht aber auch die Gefahr, dass händische Fertigkeiten und das Verständnis für die ausgeführten Algorithmen verloren gehen. Während wir den intelligenten Einsatz digitaler Mathematik-Werkzeuge begrüßen (vgl. Barzel und Greefrath sowie Elschenbroich, Kapitel 12 und Kapitel 20 in diesem Band), möchten wir jedoch betonen: Digitale Mathematik-Werkzeuge ersetzen nicht das händische Rechnen, sondern ergänzen dies in geeigneter Weise.

3.2 Aspekte der schriftlichen Abiturprüfung

Die Einheitlichen Prüfungsanforderungen (EPA), die durch die Bildungsstandards abgelöst wurden, sollen die Ausgestaltung der Abiturprüfung gemäß den Ideen und Zielen der Bildungsstandards regeln; hier muss sichergestellt werden, dass die Prüfungsanforderungen die Bildungsstandards nicht aushebeln. In den Bildungsstandards ist geregelt:

> Die Prüfungsaufgabe bezieht sich auf mindestens zwei der in den Bildungsstandards genannten mathematischen Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra & Analytische Geometrie und Stochastik. Mindestens ein Drittel der Anforderungen muss sich auf Analysis beziehen. Keines der beiden anderen Sachgebiete wird über mehrere Jahre von den Prüfungsaufgaben ausgeschlossen. (KMK, 2012, S. 30)

Prinzipiell ist es somit weiterhin möglich, dass trotz der großen Bedeutung der Stochastik für Fach, Allgemeinbildung und Arbeitswelt dieses Thema im Abitur nicht vorkommt. Aus Hochschulsicht wäre es demgegenüber sehr wichtig, dass alle drei oben genannten Sachgebiete des Mathematikunterrichts gleichwertig in der schriftlichen Abiturprüfung behandelt werden, weil alle drei Gebiete wichtige Voraussetzungen in allen mathematikaffinen Studiengängen sind. Es ist zu hoffen, dass alle Bundesländer bei ihren Ausgestaltungen der Abiturprüfungen diese Einschätzung berücksichtigen und damit dem von Hochschulseite geäußerten Wunsch einer gleichwertigen Behandlung von Analysis, linearer Algebra und analytischer Geometrie sowie von Stochastik nachkommen. Insgesamt würde sich damit durch die Ablösung der EPA durch die Bildungsstandards ein zusätzlicher Fortschritt ergeben.

Literaturverzeichnis

Autorengruppe Bildungsberichterstattung (2008). *Bildung in Deutschland 2008. Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zu Übergängen im Anschluss an den Sekundarbereich I.* Im Auftrag der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland und des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Bielefeld: W. Bertelsmann Verlag.

Autorengruppe Bildungsberichterstattung (2010). *Bildung in Deutschland 2010. Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zu Perspektiven des Bildungswesens im demografischen Wandel*. Im Auftrag der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland und des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Bielefeld: W. Bertelsmann Verlag.

Dieter, M. (2011). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren.* Dissertation, Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Lersch, R. (2010). *Wie unterrichtet man Kompetenzen? Didaktik und Praxis kompetenzfördernden Unterrichts.* Wiesbaden: Hessisches Kultusministerium, Institut für Qualitätsentwicklung.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, 37–46.

11. Klausuren kompetenzorientiert analysieren und weiterentwickeln

Christina Drüke-Noe

Nach einem kurzen Überblick über die Aufgabenkultur in der Sekundarstufe II wird ein Vorgehen zur kognitiven Analyse von Klausuren vorgestellt. Am Beispiel einer Klausur wird gezeigt, wie deren Aufgaben zunächst analysiert werden können, bevor die Ergebnisse einer solchen Analyse zusammenfassend betrachtet werden und in eine zielgerichtete Weiterentwicklung der Klausur münden. Ziel ist es, Klausuren so zu konzipieren, dass diese neben inhaltsbezogenen Kompetenzen insbesondere auch prozessbezogene Kompetenzen sowie unterschiedliche Anforderungsbereiche ausgewogen(er) abbilden.

1 Einleitung

In der Sekundarstufe I gelten Klassenarbeiten als zentrales Instrument der schulinternen schriftlichen Leistungsmessung (z. B. Ingenkamp & Lissmann, 2008). Als noch größer darf wohl die Bedeutung der in der Sekundarstufe II geschriebenen Klausuren eingeschätzt werden, da die in diesen erzielten Leistungen nicht nur in die Zeugnisnoten am Ende eines Schul(halb)jahres, sondern zudem kumulativ in die Abiturnote eingehen. Wegen dieser offenkundigen Relevanz überrascht es, dass es bislang speziell in der Sekundarstufe II kaum empirische Untersuchungen zu den Merkmalen von Klausuraufgaben gibt, die geeignet wären, diese Aufgabenkultur empirisch fundiert zu charakterisieren.

Dabei stehen im Fach Mathematik Aufgaben, die in Situationen des Lernens (also im Unterricht), und Aufgaben, die in Situationen des Leistens (in Klassenarbeiten bzw. in Klausuren) eingesetzt werden, in einem engen Zusammenhang. Dieser erklärt sich darüber, dass Lehrkräfte Klassenarbeiten bzw. Klausuren selbst konzipieren und somit auf beide „Arten“ von Aufgaben dieselben Einflussgrößen wirken. Zu diesen zählt insbesondere das für die Zusammenstellung von Klassenarbeiten als Aufgabensammlung fungierende Schulbuch (u. a. Sträßer, 2008). Als weitere Einflussgrößen gelten der Lehrplan und schulrechtliche Vorgaben, Unterrichtsziele, lerntheoretische Orientierungen der Lehrkräfte (u. a. Dubberke, Kunter, McElvany, Brunner & Baumert, 2008) sowie die Aufgaben zentral gestellter Abschlussprüfungen (u. a. Kühn, 2010; vgl. hierzu auch den Beitrag von Heintz, Drüke-Noe und Greefrath, Kapitel 14 in diesem Band). Sacher (2000, 2009) schreibt Klassenarbeitsaufgaben sogar einen Abbildcharakter zu, was bedeutet, dass diese die unterrichtliche Aufgabenkultur abbilden und sich daher mit Blick auf die Aufgabenmerkmale Unterrichts- von Klausuraufgaben im Allgemeinen höchstens graduell unterscheiden, wie etwa hinsichtlich ihres Grades der Offenheit und Komplexität. Im Folgenden wird die Aufgabenkultur genauer diskutiert, beginnend mit einem Blick auf den Unterricht.

2 Zur Aufgabenkultur im Unterricht und in Prüfungen

2.1 Aufgabenkultur im Unterricht der Sekundarstufe II

In Übereinstimmung mit Charakterisierungen der unterrichtlichen Aufgabenkultur in der Sekundarstufe I formulieren Borneleit, Danckwerts, Henn und Weigand (2001) für die Aufgabenkultur der Sekundarstufe II zwei zentrale Problemfelder. Diese sind, vor allem in der Analysis und in der linearen Algebra, eine einseitige Orientierung an der Winter'schen Grunderfahrung der Strukturorientierung sowie eine zu einseitige Orientierung am Kalkül. Dabei ist es in Grundkursen „verbreitete Praxis, … [sich] weitgehend auf die Behandlung inhaltsleerer Kalküle zu beschränken“ (S. 32), was sich bei den Lernenden in einem eher statischen Bild von Mathematik niederschlägt. Die Autoren führen eine solche Kalkülorientierung jedoch nicht auf ein einseitiges Mathematikbild der Lehrenden zurück, sondern auf deren Absicht „bei den Lernenden … Sicherheit in der Durchführung der mathematischen Methoden zu erreichen“ (S. 38), wie sie mit Verweis auf Untersuchungen von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) darlegen. Damit wird ein wesentlicher Kritikpunkt an einer in der Sekundarstufe I ebenfalls bestehenden Kalkülorientierung – die Trennung von Syntax und Semantik – auch mit Blick auf die Sekundarstufe II formuliert (vgl. u. a. Baptist & Winter, 2001; Danckwerts & Vogel, 2006; Hefendehl-Hebeker, 2004; Herget, 1993; Hußmann & Prediger, 2010). Eine empirische Fundierung dieser Kritik findet sich bei Baumert et al. (2000), die mit den Ergebnissen der im Rahmen von TIMSS III durchgeführten Befragungen der Schülerinnen und Schüler zur Wahrnehmung des Unterrichts belegen, dass bei insgesamt nur geringen Kursspezifika Fertigkeiten in Grundkursen im Vergleich zu Leistungskursen sogar eine noch höhere Bedeutung zukommt.

2.2 Aufgabenkultur in Klassenarbeiten und in Klausuren

Vor dem Hintergrund einer weitgehend fehlenden empirischen Grundlage werden aus normativer Perspektive für beide Sekundarstufen zahlreiche gleichlautende Forderungen an die Aufgabenkultur von Klassenarbeiten bzw. Klausuren formuliert, die damit implizit diese Aufgabenkultur charakterisieren: In der Sekundarstufe I wird beklagt, dass vor allem zu viele kalkülorientierte Aufgaben bzw. formale Berechnungsaufgaben gestellt werden, die rein mechanisch auf einem zuvor eingeübten Weg gelöst werden können (u. a. Bruder & Weigand, 2001). Weitere Kritik zielt auf das Fehlen von Vernetzungen zu (länger) zurückliegenden Inhalten (u. a. Sill & Sikora, 2007), von Anwendungsbezügen und Begründungen (u. a. Baptist & Raab, 2007), von offen gestellten Aufgaben (Blum & Wiegand, 2000), von Interpretationen und Darstellungswechseln (u. a. Althoff, 2001) sowie von Reflexionen (u. a. Büchter & Leuders, 2005; Schupp, 2002). Dass diese Forderungen durchaus treffend auf Einseitigkeiten in der Aufgabenkultur von Klassenarbeiten hinweisen, belegen die Ergebnisse einer empirischen Untersuchung von Drüke-Noe (2014) zur Aufgabenkultur von Klassenarbeiten neunter und zehnter Klassen im Fach Mathematik. Anhand eines im Rahmen des COACTIV-Projekts 2003/04 erhobenen deutschlandweit repräsentativen Datensatzes (vgl. Jordan et al., 2006; Kunter et al., 2011) sowie eines weiteren, jüngeren Datensatzes aus hessischen Klassenarbeiten belegt Drüke-Noe, dass eine Bearbeitung der in gymnasialen sowie in nicht-gymnasialen Klassen gestellten Klassenarbeitsaufgaben nur zu sehr geringen Anteilen Modellierungen verlangt, dass Argumentieren nahezu nicht gefordert ist und dass weniger als ein Drittel der Aufgaben ein Umgehen mit Darstellungen verlangt. Zudem beschränken sich diese Tätigkeiten fast ausschließlich auf Standardaktivitäten. Hingegen ist die Bearbeitung unterschiedlich komplexer Kalküle in faktisch allen Klassenarbeitsaufgaben von zentraler Bedeutung, so dass der Anspruch an ein Umgehen mit Kalkülen nahezu alleinig den kognitiven Anspruch von Klassenarbeiten prägt (vgl. Drüke-Noe, 2014). Althoff (1993) und Pallack (2008) formulieren für die Sekundarstufe II eine nahezu gleichlautende Kritik an einer Fokussierung auf Kalküle.

2.3 Normative Überlegungen zur Klausurgestaltung

In einem von normativen Überlegungen geleiteten Diskurs um die Aufgabenkultur von Klausuren wird in diesem Beitrag anhand einer exemplarischen Klausur vorgestellt, wie diese zunächst analysiert und dann zielgerichtet verändert werden kann (siehe Abschnitt 3). Diese Vorgehensweise kann gleichsam auf eine Serie von Klausuren übertragen werden, die im Verlauf eines Schuljahres geschrieben werden. Ziel einer solchen Analyse und – bei Bedarf – zielgerichteten Veränderung ist es, eine einzelne Klausur bzw. eine Serie von Klausuren kompetenzorientiert zu gestalten. Dabei soll eine (Serie von) Klausur(en) dann als *kompetenzorientiert* gelten, wenn alle enthaltenen Aufgaben bei gemeinsamer Betrachtung ein ausgewogenes Spektrum aller prozessbezogenen Kompetenzen abdecken und zudem alle drei Anforderungsbereiche in erkennbarer Quantität berücksichtigt sind.

Ein derartiges Aufgabenspektrum leistet einen wesentlichen Beitrag dazu, die drei Winter'schen Grunderfahrungen der Anwendungs-, der Struktur- und der Problemorientierung (vgl. den Beitrag von Blum, Kapitel 1 in diesem Band) zu berücksichtigen, wobei mit Blick auf *einzelne* Grunderfahrungen sowie unter Beachtung des Kursniveaus (grundlegend oder erhöht) natürlich Schwerpunktsetzungen möglich sind. Im vorgenannten Sinne kompetenzorientierte Klausuren sollen gemäß Bildungsstandards in einem Kurs des erhöhten Niveaus die Grunderfahrung der Strukturorientierung deutlicher umsetzen als etwa die Klausuren eines Kurses des grundlegenden Niveaus. Auch sollen anteilig mehr Aufgaben mit kognitiven Anforderungen im Anforderungsbereich III gestellt werden, wobei auch in einem Kurs des grundlegenden Niveaus derartige Aufgaben keinesfalls fehlen dürfen (vgl. auch KMK, 2012, S. 12). Ziel ist es vielmehr, in Kursen beider Niveaus alle drei Winter'schen Grunderfahrungen angemessen zu berücksichtigen.

Dabei wäre es sicherlich unangemessen, derartige Ansprüche allein an Klausuraufgaben zu stellen, ohne gleichzeitig Unterrichtsaufgaben und den Unterricht als Ganzes in den Blick zu nehmen. So bedarf es zunächst der Implementation eines solchen Aufgabenspektrums im Unterricht und zudem der adäquaten unterrichtlichen Behandlung solcher Aufgaben. Weiterhin bedarf es Begleitmaßnahmen für Lehrkräfte, etwa in der Form von Fortbildungen, um Lehrkräfte bei der Umsetzung veränderter Anforderungen im Unterricht sowie bei deren Überprüfung und Bewertung in Klausuren zu unterstützen. Dass es für Lehrkräfte der Entwicklung einer solchen Souveränität im Unterricht und in der Folge auch beim Überprüfen von Leistungen bedarf, und dass beides keine Automatismen sind, zeigen beispielsweise schon Senk, Beckmann und Thompson (1997) in einer Untersuchung an US-amerikanischen High Schools.

Abschließend sei hier wenigstens ergänzend angemerkt, dass Klausuraufgaben den klassischen Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität genügen sollten. Die Einschätzungen dazu, inwieweit dies gelingt, sind uneinheitlich. Für einen Überblick über diese Diskussion sei auf Drüke-Noe (2014, S. 29 ff.) verwiesen.

3 Klausuren analysieren und weiterentwickeln

Der Weiterentwicklung einer Klausur hin zu einer im obigen Sinne kompetenzorientierten, die eine möglichst ausgewogene Berücksichtigung aller sechs prozessbezogenen Kompetenzen und eine adäquate Berücksichtigung aller Anforderungsbereiche zum Ziel hat, geht notwendig eine Analyse der neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen bislang berücksichtigten prozessbezogenen Kompetenzen voraus. In den folgenden Abschnitten wird vorgestellt, wie eine solche Analyse erfolgen kann, um dann von deren Ergebnis ausgehend eine Klausur zielgerichtet weiterzuentwickeln.

3.1 Kognitive Analyse der Teilaufgaben

Im Vergleich zu Klassenarbeitsaufgaben sind Klausuraufgaben vielfach komplexer formuliert. Insbesondere mit Blick auf die schriftliche Abiturprüfung bestehen sie oft aus mehreren Teilaufgaben, die verschiedene explizite Aufforderungen (Anweisungen) enthalten, die vielfach durch Operatoren eingeleitet werden. Eine differenzierte Analyse der zur Aufgabenbearbeitung erforderlichen prozessbezogenen Kompetenzen sollte daher ausgehend von den einzelnen in einer Teilaufgabe enthaltenen Anweisungen erfolgen. Dabei wird eine *Anweisung* als eine Aufforderung an die Schülerinnen und Schüler verstanden, eine Handlung auszuführen (Neubrand, 2002, S. 119). Beispielsweise umfasst die in Abbildung 1 gezeigte Aufgabe insgesamt fünf Anweisungen („Geben Sie…“, „Skizzieren Sie…“, „Tragen Sie…“, „Überprüfen Sie…“, „Ergänzen Sie…“).

Aufgabe 4:

Bei der Übertragung eines Fußballendspiels wird für Zuschauer, die nicht ins Stadion gehen können, eine rechteckige Großbildleinwand installiert.

In einem kartesischen Koordinatensystem haben drei der Eckpunkte folgende Koordinaten:
A(12|0|3), B(–12|0|3), C(–12|0|13) {Angaben in Meter!}

Geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes D an und skizzieren Sie die Projektionsfläche in einem geeigneten Koordinatensystem (1 cm ≙ 2 m).

Ein Beobachter sieht das Spiel aus der Position P(8|24|5).

Ein Nachrichtensender zeichnet die Ereignisse beim Public Viewing auf und hat dafür eine ferngesteuerte Kamera an einem Kran aufgehängt. Die Tragkonstruktion beeinträchtigt nicht die freie Sicht auf die Projektionsfläche.
Die Kamera befindet sich auf der Position K(6|12|9).

Tragen Sie die Punkte P und K in das Koordinatensystem ein.

Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die freie Sicht des Beobachters auf die Projektionsfläche durch die Kamera beeinträchtigt wird.

Ergänzen Sie die Skizze durch Ihre Rechnungsergebnisse.

Abb. 1: Aufgabe aus einer Klausur (grundlegendes Niveau) zur analytischen Geometrie

3.2 Der kognitive Anspruch einer Klausur ab

Im Weiteren wird dargelegt, wie im Sinne einer rationalen Aufgabenanalyse (Resnick & Ford, 1981), die Schülerbearbeitungen nicht mit einbezieht, alle Anweisungen einer Klausur analysiert werden können, um so den kognitiven Anspruch einer Klausur zu erfassen. Als Ergebnis einer solchen Analyse erhält man ein *Kompetenzprofil* (vgl. Drüke-Noe, 2014), das Auskunft darüber gibt, in welchem Maße eine Klausur (bzw. eine Serie von Klausuren) als kompetenzorientiert gelten kann. Ein Kompetenzprofil bildet zudem die Grundlage für eine zielgerichtete Weiterentwicklung der in einer Klausur enthaltenen Aufgabenzusammenstellung.

Die Ergebnisse dieser Analyse werden zur besseren Übersicht in eine Tabelle eingetragen, die hier als Heuristik dient (vgl. Tabelle 1). In der Tabelle wird zum einen für jede einzelne Teilaufgabe erfasst, welche prozessbezogenen Kompetenzen zur Bearbeitung benötigt werden, und zum anderen wird berücksichtigt, in welchem Anforderungsbereich die einzelnen Kompetenzen jeweils erforderlich sind. Das sich ergebende Kompetenzprofil gibt dann zusammen mit seiner Bilanzierung differenziert Auskunft über den kognitiven Anspruch einer Klausur.

Tabelle 1: Analyse der Anweisungen (Teilaufgaben) einer Klausur

Kompetenz(en)	mathematisch Argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch Modellieren			mathematische Darstellungen Verwenden			formal-technisch Arbeiten			mathematisch Kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Anweisung 1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Anweisung 2	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
…	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3.2.1 Erstellung eines Kompetenzprofils

Die Erstellung eines Kompetenzprofils erfolgt in mehreren Schritten:

Im *ersten Schritt* werden alle Anweisungen innerhalb einer Klausur identifiziert und dann verkürzt in der ersten Spalte der Tabelle notiert.

Den *zweiten Schritt* bildet die kognitive Analyse der einzelnen Anweisungen, die entlang eines gedachten idealisierten Aufgabenbearbeitungsprozesses erfolgt. Dabei überlegt man zunächst, welche prozessbezogenen Kompetenzen die Bearbeitung einer Anweisung erfordert, bevor man – noch tiefergehend – überlegt, welchem kognitiven Anforderungsbereich (kurz: AB) diese zuzuordnen sind. Die Ergebnisse dieser Analysen werden in den betreffenden Spalten vermerkt und man setzt je Kompetenz, sofern benötigt, ein Kreuz links, mittig bzw. rechts, wenn diese im Anforderungsbereich I (AB I), im Anforderungsbereich II (AB II) bzw. im Anforderungsbereich III (AB III) erforderlich ist.

Im abschließenden *dritten Schritt* erfolgt eine Bilanzierung aller Einträge. Diese liefert Hinweise auf Schwerpunkte in den Anforderungen und zeigt somit Ansatzpunkte für eine zielgerichtete Veränderung einer Klausur auf. Natürlich geht es bei einer solchen eher qualitativen Bilanz *nicht* darum „Kreuzchen zu zählen". Vielmehr soll eine globale Bilanz mit ihrer gleichzeitigen Betrachtung aller Aufgaben zeigen, wie ausgewogen die kognitiven Anforderungen innerhalb einer Klausur realisiert sind. Dieses Vorgehen wird im folgenden Abschnitt am Beispiel der in Abbildung 1 gezeigten Aufgabe demonstriert.

3.2.2 Exemplarische Analyse einer (Teil-)Aufgabe

In Tabelle 2 sind die einzelnen Anweisungen der in Abbildung 1 wiedergegebenen Aufgabe 4 vermerkt. Um in der ersten Anweisung („Geben Sie…") die Koordinaten des vierten Punktes D der rechteckigen Großbildleinwand (Projektionsfläche) zu ermitteln, sind zunächst die Informationen über den Kontext zu lesen (Kommunizieren, AB I), um dann die Lagen der gegebenen Punkte, die sich alle in der x-z-Ebene befinden, miteinander in Beziehung setzen zu können (formal-technisch Arbeiten, AB I). Hierbei kann das Anfertigen einer informativen Figur helfen (Probleme lösen, AB I); diese ist jedoch nicht explizit gefordert.

Die zweite Anweisung („Skizzieren Sie…") verlangt die Anfertigung einer Standarddarstellung, in die alle vier Punkte bzw. die Projektionsfläche einzutragen sind (Darstellungen Verwenden und formal-technisch Arbeiten, jeweils AB I).

Zur Bearbeitung der dritten Anweisung („Tragen Sie…“) sind weitere Kontextinformationen zu lesen (Kommunizieren, AB I), um dann die zwei Punkte P und K in die Darstellung einzutragen (Darstellungen verwenden, AB I).

Erst in der vierten Anweisung („Überprüfen Sie …“) ist intensiver mit dem Kontext zu arbeiten, um gemäß Aufgabenstellung „durch Rechnung“ zu ermitteln, ob die Kamera die freie Sicht des Beobachters auf die Projektionsfläche einschränkt. Dabei liegt eine Modellierung dieser Realsituation in der Weise nahe, dass der als Punkt P gedachte Beobachter zusammen mit den vier Eckpunkten A, B, C und D der Großbildleinwand eine Pyramide bildet, und es ist zu prüfen, ob die ebenfalls als ein Punkt K gedachte Kamera innerhalb dieser (gedachten) Pyramide liegt (Kommunizieren, AB I; Modellieren, AB II). Diese Überprüfung kann strategiegestützt erfolgen (Probleme lösen, AB II), um die mehrschrittigen Rechnungen (formal-technisch Arbeiten, AB II) zu koordinieren, bei denen die Lage des Punktes K hinsichtlich zweier Ebenen, in denen zwei Seitenflächen der Pyramide liegen, untersucht wird. Das Ergebnis dieser rechnerischen Abstandsuntersuchungen ist wiederum im Kontext zu deuten – ein weiterer Teilschritt des Modellierens –, um Aussagen über eine potentielle Sichteinschränkung für den Beobachter treffen zu können.

Gemäß der fünften Anweisung sind schließlich noch die vorhergehenden Rechnungsergebnisse in die Darstellung einzutragen (Darstellungen verwenden, AB I).

Als Kompetenzprofil dieser Aufgabe ergibt sich somit das in Tabelle 2 wiedergegebene.

Tabelle 2: Kompetenzprofil der Aufgabe Nr. 4

Kompetenz(en)	mathematisch Argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch Modellieren			mathematische Darstellungen Verwenden			formal-technisch Arbeiten			mathematisch Kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Geben Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐
Skizzieren Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐
Tragen Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐
Überprüfen Sie	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	X	☐	☐
Ergänzen Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3.2.3 Auswertung eines Kompetenzprofils

Eine Ausweitung des im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Vorgehens auf eine gesamte Klausur liefert deren Kompetenzprofil. Dessen Bilanzierung gibt mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen deutliche Hinweise, in welchen Bereichen der kognitive Anspruch einer Klausur – genauer: bei welchen prozessbezogenen Kompetenzen bzw. in welchen Anforderungsbereichen – Schwerpunkte oder etwaige Defizite aufweist. Wie bereits erwähnt, geht es beim Erstellen einer derartigen Bilanz keinesfalls darum schlicht nur „Kreuzchen zu zählen“. Dennoch wird beim Bilanzieren bewusst vereinfachend in Kauf genommen, dass einzelne Anweisungen zumeist nicht gleichwertig sind. Ziel ist es vielmehr, mit einem solchen Kompetenzprofil Lehrkräften ein – im Sinne einer Heuristik – gut handhabbares Instrument zur Verfügung zu stellen, das einerseits einen differenzierteren und nicht (mehr) rein inhaltsbezogenen Blick auf das kognitive Anspruchsniveau einer Klausur oder auch einer Serie von Klausuren gewährt und das andererseits gleichzeitig Ansatzpunkte für eine zielgerichtete Weiterentwicklung bietet.

Abbildung 2 zeigt die übrigen Aufgaben der hier betrachteten Klausur des grundlegenden Niveaus (vgl. Abb. 1), in denen Gleichungssysteme zu lösen, Lagebeziehungen von Geraden zu untersuchen und Koordinatisierungen im Raum vorzunehmen sind. Im Weiteren wird das Kompetenzprofil dieser Klausur (vgl. Tabelle 3) ausgewertet.

Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an!

a) $\left| \begin{array}{r} x - 3y + 2z = -4 \\ -x + y + 3z = 11 \\ -x - 2y + 2{,}5z = -2{,}5 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{r} 3x + 9y - 3z = 15 \\ -8x - 19y + 3z = -30 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{array} \right|$

Aufgabe 2:

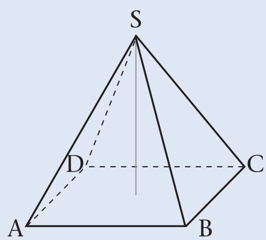
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der angegebenen Geraden. Geben Sie ggf. die Koordinaten des Schnittpunktes an.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Gegeben ist eine Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundseite wie in der Abbildung rechts.



a) Drücken Sie die Kantenvektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{CD}$ durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$ aus!

Die Koordinaten A (–4 | –1 | 7), B (2 | –1 | 7), C (2 | 5 | 7) und D (–4 | 5 | 7) sowie die Höhe der Pyramide h = 5 LE seien nunmehr vorgegeben.

b) Geben Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze S an!
c) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden $\overline{DS}$ an!
d) Berechnen Sie die Längen $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BS}|$ sowie $|\overrightarrow{SA}|$!

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe):

Gegeben sind die Punkte A (6 | 3 | 3), B (5 | 5 | –2) und C (3 | 6 | 3).

a) Bestimmen Sie für das Viereck ABCD den Punkt D so, dass ein Parallelogramm entsteht.
b) Handelt es sich bei dem entstandenen Parallelogramm sogar um eine Raute?

Abb. 2: Klausuraufgaben (grundlegendes Niveau) zur analytischen Geometrie/ linearen Algebra

Tabelle 3: Kompetenzprofil der Klausur (grundlegendes Niveau) zur analytischen Geometrie/linearen Algebra

Kompetenz(en)	mathematisch Argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch Modellieren			mathematische Darstellungen Verwenden			formal-technisch Arbeiten			mathematisch Kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1a …	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐
1b	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐
2a …	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐
2b	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐
3a	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐
3b	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐
3c	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐
3d	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐
4 Geben Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐
4 Skizzieren Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐
4 Tragen Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐
4 Überprüfen Sie	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	X	☐	☐
4 Ergänzen Sie	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5a	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐
5b	X	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	X	☐	☐	☐	☐
Bilanz	**x**	☐	☐	**X**	☐	☐	☐	**x**	☐	**X**	☐	☐	☐	**X**	☐	**x**	☐	☐

Die Bilanz des Kompetenzprofils dieser Klausur macht deutlich, dass bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben vor allem die beiden prozessbezogenen Kompetenzen formal-technisch Arbeiten und mathematische Darstellungen Verwenden von zentraler Bedeutung sind. Die Kompetenz Probleme mathematisch lösen spielt in dieser Klausur immerhin eine erkennbare Rolle. Insgesamt entfällt der überwiegende Teil der kognitiven Anforderungen auf die Anforderungsbereiche I und II. Höhere kognitive Anforderungen werden vor allem an das formal-technische Arbeiten gestellt, und damit an jene Kompetenz, die auch aus theoretischer Perspektive als die üblicherweise dominierende herausgestellt wird (vgl. Abschnitt 1.2).

Gleichzeitig fehlen in dieser Klausur Aufgaben, die den höchsten Anforderungsbereich III abdecken, was bedeutet, dass weder kognitiv komplexe noch verallgemeinernde oder reflektierende Aktivitäten verlangt sind. Die Kompetenzen mathematisch Argumentieren sowie mathematisch Modellieren sind nur marginal erforderlich. Diese „Lücken" im Kompetenzprofil bilden die Ansatzpunkte für Überlegungen zur zielgerichteten Weiterentwicklung dieser Klausur, die Gegenstand des nächsten Abschnittes sind.

3.3 Zielgerichtete Weiterentwicklung einer Klausur

Das Kompetenzprofil einer Klausur bildet den Ausgangspunkt für deren zielgerichtete Veränderung. Diese sollte in dem Sinne zielgerichtet erfolgen, dass erstens die prinzipielle inhaltliche Ausrichtung der Klausur erhalten bleibt und im Wesentlichen die bislang schon realisierten inhaltsbezogenen Kompetenzen auch in der veränderten Klausur Gegenstand sind. Zweitens sollte die Veränderung in eine deutlicher kompetenzorientierte Klausur münden (vgl. Definition in Abschnitt 2.3), die anhand der bislang berücksichtigten inhaltsbezogenen Kompetenzen verschiedene prozessbezogene Kompetenzen ausgewogen(er) erfordert und verschiedene Anforderungsbereiche angemessen umsetzt. Natürlich obliegt es einer Lehrkraft auszuloten, wie „ausgewogen" hier zu verstehen ist. Zumindest sollte jedoch einem vorrangig über das formal-technische Arbeiten definierten kognitiven Anspruch einer Klausur (vgl. Abschnitt 2.2) bewusst entgegengewirkt werden, ohne dass dabei die Anforderungen an diese Kompetenz selbst notwendig reduziert werden müssen. Eine Umsetzung dieser Ziele soll nicht in eine vollständig neu zusammengestellte Klausur münden. Vielmehr sollten einzelne Aufgaben modifiziert oder ersetzt werden und eine solche Weiterentwicklung muss auch die zeitlichen Rahmenbedingungen einer Klausur berücksichtigen.

Eine zielgerichtete Veränderung könnte beispielsweise von den folgenden Intentionen geleitet sein:

- Stärkere Berücksichtigung der Kompetenzen mathematisch Argumentieren und mathematisch Modellieren
- Reduzierung des relativen Anteils der Kompetenz formal-technisch Arbeiten
- Realisierung des Anforderungsbereichs II bei *verschiedenen* Kompetenzen
- Aufnahme einer Aufgabe mit kognitiven Anforderungen im Anforderungsbereich III

Um diese Intentionen zu realisieren, können auf der Ebene einzelner Aufgaben beispielsweise die von Schupp (2002) benannten Veränderungsstrategien angewendet werden. Wie eine zielgerichtete Veränderung der hier exemplarisch betrachteten Klausur eines Kurses des grundlegenden Niveaus (vgl. Abbildungen 1, 2) konkret aussehen kann, wird im Folgenden an drei Beispielen dargelegt.

Ein Blick auf die inhalts- sowie auf die prozessbezogenen Kompetenzen zeigt, dass die in den Aufgaben 1 und 2 enthaltenen Teilaufgaben jeweils nahezu identische kognitive Anforderungen stellen. Man könnte daher je eine dieser Teilaufgaben streichen, um Raum für andere Aufgaben zu schaffen. Ergänzt man stattdessen z. B. die Aufgabe „Einbeschriebene Pyramide" (vgl. Aufgabensammlung auf beiliegender CD), so würde in dieser Klausur der relative Anteil der Kompetenz formal-technisch Arbeiten reduziert, indem zusätzliche Kompetenzen – speziell: Mathematische Darstellungen verwenden und Probleme mathematisch lösen – gefordert würden und zudem ein Argumentationsanlass geschaffen würde.

Will man der Intention folgen, verstärkt den Anforderungsbereich II zu realisieren und vielleicht zusätzlich digitale Mathematikwerkzeuge in Teilen dieser Klausur zulassen, so könnte man in Aufgabe 4 nach der Anweisung „Überprüfen Sie …" die in Abbildung 3 formulierte Anweisung stellen. Diese neue Anweisung kehrt die Bearbeitungsrichtung der davor stehenden Anweisung („Überprüfen Sie …") um, ist also eine Umkehraufgabe dazu (Schupp, 2002), deren Bearbeitung u. a. ein mehrschrittiges strategiegestütztes Vorgehen verlangt (Probleme mathematisch lösen, AB II).

Geben Sie für denselben Zeitpunkt für zwei weitere Beobachter möglichst realistische Koordinaten ihrer Standpunkte so an, dass ein Beobachter uneingeschränkt durch die Kamera die Großbildleinwand sehen kann und der andere Beobachter die Kamera in seinem Blickfeld hat.

Abb. 3: Mögliche Ergänzung zu Aufgabe 4 (Fokus: Probleme lösen)

Für denselben Zeitpunkt sollen für zwei weitere Beobachter möglichst realistische Koordinaten ihrer Standpunkte so angegeben werden, dass ein Beobachter uneingeschränkt durch die Kamera die Großbildleinwand sehen kann und der andere Beobachter die Kamera in seinem Blickfeld hat. Beschreiben Sie ein mögliches Vorgehen zur Bearbeitung dieser Problemstellung. Nehmen Sie dabei Bezug zum Sachkontext.

Abb. 4: Mögliche Ergänzung zu Aufgabe 4 (Fokus: Probleme lösen, Kommunizieren)

Sollen die Koordinaten nicht konkret angegeben werden, könnte man alternativ die in Abbildung 4 gezeigte Anweisung stellen, die den Fokus weg von einer rechnerischen Lösung hin zu einer Beschreibung des Vorgehens richtet. Diese Alternative stärkt ebenfalls den mittleren Anforderungsbereich und verlangt zudem den darlegenden Teil der Kompetenz mathematisch Kommunizieren, die in der ursprünglichen Klausur nur marginal Berücksichtigung findet.
Anregungen für weitere Aufgaben, die man ebenfalls mit dem Ziel einer ausgewogeneren Realisierung der prozessbezogenen Kompetenzen wie auch der Anforderungsbereiche heranziehen könnte, um eine in stärkerem Maße kompetenzorientierte Klausur zu gestalten, sind der beiliegenden CD zu entnehmen.

4 Schlussbemerkungen

In diesem Beitrag sollte deutlich werden, dass Klausuraufgaben nicht allein unter inhaltlichen Aspekten betrachtet werden sollten, sondern dass zusätzlich auch die zur Aufgabenbearbeitung erforderlichen prozessbezogenen Kompetenzen und deren jeweiliger kognitiver Anspruch, das heißt der Anforderungsbereich, in den Blick rücken sollten. Das vorgestellte Vorgehen hat zum Ziel, Lehrkräften eine Heuristik an die Hand zu geben, die es ihnen erlaubt, einen breiteren und nicht nur inhaltsbezogenen Blick auf (Klausur-)Aufgaben zu richten und diese vielfältig zusammenzustellen, so dass nicht zuletzt die drei Winter'schen Grunderfahrungen nicht nur im Unterricht, sondern auch in Klausuren eine adäquate Berücksichtigung finden und somit die Philosophie der Bildungsstandards nicht nur im Unterricht, sondern auch in Klausuren bzw. auch in der Abiturprüfung (vgl. auch Heintz u.a., Kapitel 14 in diesem Band) zum Ausdruck kommt.

Literaturverzeichnis

Althoff, H. (1993). Überlegungen zur Leistungsbewertung bei einer Klausur. *Der Mathematikunterricht, 1,* 38–58.

Althoff, H. (2001). Prüfungsaufgaben – Analysieren, Interpretieren und Argumentieren. *mathematik lehren, 107,* 47–51.

Baptist, P. & Raab, D. (2007). *Auf dem Weg zu einem veränderten Mathematikunterricht.* Bayreuth: Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Universität Bayreuth.

Baptist, P. & Winter, H. (2001). Überlegungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Oberstufe des Gymnasiums. In H.-E. Tenorth (Hrsg.), *Kerncurriculum Oberstufe. Mathematik – Deutsch – Englisch* (S. 54–76). Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Baumert, J., Bos, W., Brockmann, J., Gruehn, S., Klieme, E., Köller, O. et al. (2000). *TIMSS/III-Deutschland. Der Abschlussbericht. Zusammenfassung ausgewählter Ergebnisse der Dritten Internationalen Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie zur mathematischen und naturwissenschaftlichen Bildung am Ende der Schullaufbahn.* Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Blum, W. & Wiegand, B. (2000). Offene Aufgaben – wie und wozu?. *mathematik lehren, 100,* 17–22.

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W. & Weigand, H.-G. (2001). Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In H.-E. Tenorth (Hrsg.), *Kerncurriculum Oberstufe. Mathematik – Deutsch – Englisch* (S. 26–53). Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Bruder, R. & Weigand, H.-G. (2001). Leistungen bewerten – natürlich! Aber wie?. *mathematik lehren, 107,* 4–8.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Zentrale Tests und Unterrichtsentwicklung … bei guten Aufgaben und gehaltvollen Rückmeldungen kein Widerspruch. *Pädagogik, 5,* 14–18.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten.* Berlin: Springer-Verlag.

Drüke-Noe, C. (2014). *Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik. Empirische Untersuchungen in neunten und zehnten Klassen.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Dubberke, T., Kunter, M., McElvany, N., Brunner, M. & Baumert, J. (2008). Lerntheoretische Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. Einflüsse auf die Unterrichtsgestaltung und den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 22* (3–4), 193–206.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik, 19,* 3–45.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). *Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht.* Duisburg: Universität Duisburg-Essen.

Herget, W. (1993). Mathe-(Klausur-)Aufgaben – einmal anders? In H. Hischer (Hrsg.), *Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Fragen zu Zielen eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatorischer Methoden* (S. 58–69). Hildesheim: Franzbecker.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2010). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und in Prüfungen. *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 31* (52), 35–38.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008). *Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik* (6. Aufl.). Weinheim: Beltz Verlag.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M. & Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt.* Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Kühn, S. M. (2010). *Steuerung und Innovation durch Abschlussprüfungen?.* Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften.* Münster: Waxmann.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Pallack, A. (2008). Abitur: solving by clicking? Verständnis- und prozessorientierte Aufgaben in Klausuren. *mathematik lehren, 146,* 54–58.

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Sacher, W. (2000). Tests und Klausuren in der Schule – Wie mache ich das? In S.-I. Beutel & W. Vollstädt (Hrsg.), *Leistung ermitteln und bewerten* (S. 63–74). Hamburg: Bergmann + Helbig Verlag.

Sacher, W. (unter Mitarbeit von S. Rademacher) (2009). *Leistungen entwickeln, überprüfen und beurteilen. Bewährte und neue Wege für die Primar- und Sekundarstufe* (5. Aufl.). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Senk, S. L., Beckmann, C. E. & Thompson, D. R. (1997). Assessment and Grading in High School Mathematics Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education 28* (2), 187–215.

Sill, H.-D. & Sikora, C. (2007). *Leistungserhebungen im Mathematikunterricht. Theoretische und empirische Studien*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Sträßer, R. (2008). Das Mathematikbuch als Instrument des Lehrens. In E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 225–228). Münster: Martin Stein Verlag.

12. Digitale Mathematikwerkzeuge sinnvoll integrieren

Bärbel Barzel und Gilbert Greefrath

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife erwähnen explizit die Unterstützung der Entwicklung mathematischer Kompetenzen durch einen sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge. Digitale Werkzeuge ermöglichen Veränderungen beim Lernen und Lehren von Mathematik nicht nur auf der Ebene der Aufgaben, sondern auch im Unterrichtsaufbau und in der Unterrichtsorganisation. Dabei sind die Chancen ebenso zu sehen wie Gefahren und Grenzen beim Einsatz digitaler Werkzeuge in Unterricht und Prüfungen. Das Ziel ist eine sinnvolle Integration digitaler Mathematikwerkzeuge zum nachhaltigen Kompetenzaufbau im Sinne der Bildungsstandards. Hierzu werden im Folgenden einige grundsätzliche Überlegungen angestellt und konkrete Beispiele gegeben.

1 Grundlagen

Im Mathematikunterricht werden Medien – ob nun traditionell als Schulbuch, Modelle geometrischer Körper, Tafel oder digital in Form von Rechnern und Computern – zu sehr unterschiedlichen Zwecken verwendet. Medien sind „Mittler“, sie ver-Mittel-n bei der Entwicklung mathematischer Kompetenzen und dem Verstehen mathematischer Begriffe und Zusammenhänge. Dies geschieht beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge beim Problemlösen, beim Systematisieren von Erkenntnissen, insbesondere durch die Verfügbarkeit verschiedener mathematischer Darstellungen, oder beim Modellieren durch die Reduktion schematischer Abläufe und die Verarbeitung großer Datenmengen. Immer müssen sich Medien daran messen lassen, welchen Beitrag sie zum Erwerb mathematischer Kompetenzen leisten können, und allgemeiner, welchen Mehrwert sie für den Lernprozess haben.

Die Rolle, die diese Medien im Unterricht übernehmen, ist vielschichtig. Schülerinnen und Schüler können beispielsweise Medien im Mathematikunterricht verwenden, um etwas über die Medien selbst zu lernen (*Lerngegenstand*). Das ist zum Beispiel der Fall, wenn im Mathematikunterricht die Funktionsweise einer dynamischen Geometriesoftware thematisiert wird. Medien können aber auch den Unterricht unterstützen, indem sie den Schülerinnen und Schülern eine Rückmeldung über die Korrektheit gelöster Aufgaben geben. Dann übernehmen sie eine *Lehrfunktion*. Dies ist insbesondere bei Lernumgebungen der Fall, die sehr spezifisch auf ein enges thematisches Feld begrenzt sind („specific purpose tools“; Barzel, Drijvers, Maschietto & Trouche, 2006). Man findet solche als Applets oder interaktive Arbeitsblätter unter anderem zum Download im Internet. Besonders häufig werden Medien als *Lernwerkzeuge* („general purpose tools“; Barzel et al., 2006; Barzel, Hußmann & Leuders, 2005) zum Bearbeiten von Aufgabenstellungen benutzt (Steinmetz, 2000, S. 816 f.). Das ist beispielsweise der Fall, wenn Schülerinnen und Schüler mit Hilfe eines Taschenrechners Grafiken erstellen oder mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware die Bewegung eines Baggers simulieren, um dieses Modell anschließend mit der Realität zu vergleichen. Werkzeuge sind universell einsetzbare Hilfsmittel zur Bearbeitung einer breiten Klasse von Problemen. Die Einteilungen der für den Mathematikunterricht relevanten Medien nach Lernumgebungen und Werkzeugen ist keineswegs disjunkt, sondern allenfalls eine hilfreiche Klassifizierung. So entstehen viele Lernumgebungen als Einbettung in Werkzeuge, wie zum Beispiel interaktive Arbeitsblätter; umgekehrt können auch Werkzeuge in digitale Lernumgebungen oder digitale Schulbücher eingebunden werden.

Wir konzentrieren uns hier auf die Rolle digitaler Lernwerkzeuge, egal in welcher äußeren Form sie erscheinen, als Computer oder Handhelds (z. B. Grafiktaschenrechner, Taschencomputer, Tablets). Es soll gezeigt werden, wie diese Geräte im Sinne der Bildungsstandards den Mathematikunterricht bereichern können. Zu diesen digitalen Werkzeugen gehören Genres wie dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulation, Statistiktools, Funktionenplotter oder Computeralgebrasysteme, die durch die zugehörigen Funktionalitäten definiert werden können. Geometriesoftware ermöglicht die Konstruktion geometrischer Objekte auf einem digitalen Zeichenblatt, wobei diese Objekte variabel manipuliert und vermessen werden können. Tabellenkalkulation dient der Erfassung von Daten in Tabellen und Diagrammen. Ein Statistiktool erweitert die Tabellenkalkulation um interaktive Möglichkeiten in Tabellen und Diagrammen. Funktionenplotter erlauben das schnelle Erstellen von Funktionsgraphen nach Eingabe des Funktionsterms, und Computeralgebrasysteme zeichnen sich aus durch die Möglichkeit des exakten Rechnens sowie der symbolischen Manipulation algebraischer Ausdrücke.

Diese Genres und bestimmte Produkte auf dem Markt ließen sich lange Zeit eindeutig zuordnen. Das ist heute nur noch mit einigen digitalen Werkzeugen möglich (z. B. Excel ist eindeutig eine Tabellenkalkulation und Cabri-Géomètre eindeutig eine dynamische Geometriesoftware). Tabelle 1 (Seite 147) zeigt den Versuch einer Zuordnung einiger digitaler Mathematikwerkzeuge zu zentralen Funktionalitäten.

Viele der heutigen digitalen Werkzeuge enthalten mehrere Funktionalitäten, die teilweise oder vollständig als Applikationen miteinander interaktiv vernetzt sind. Diese sogenannten Multi-Repräsentationssysteme sind aus didaktischer Sicht sehr zu begrüßen, da damit die gleichzeitige Verfügbarkeit der unterschiedlichen Tools im Unterricht ermöglicht wird. Beispielsweise kann man dann im Funktionenplotter einen Funktionsgraph verschieben und die Veränderung des Funktionsterms beobachten.

Tabelle 1: Digitale Mathematikwerkzeuge (Auswahl) und ihre zentralen Funktionalitäten

	Daten erfassen und darstellen (TK)	Geometrische Objekte konstruieren, manipulieren und messen (DGS)	Funktionsgraphen durch Eingabe des Funktionsterms erzeugen (FP)	Exaktes, symbolisches Rechnen und Arbeiten (CAS)	Daten interaktiv darstellen und manipulieren (ST)
Excel, Calc	X				
Cabri-Géomètre		X			
Maple, Maxima			X	X	
TI-Nspire Non-CAS, CASIO FX-CG20	X	X	X		X
MRS (z. B. Geogebra, TI-Nspire CAS, Casio Class Pad II FX-CP400)	X	X	X	X	X

Anmerkungen: TK = Tabellenkalkulation; DGS = Dynamische Geometriesoftware; FP = Funktionenplotter; CAS = Computeralgebrasystem; ST = Statistiktool; MRS = Multi-Repräsentationssysteme.

Grundsätzlich ist es neben den Funktionalitäten ein wichtiges Kriterium, ob die Medien für Schülerinnen und Schüler verfügbar bzw. zugänglich sind. Es stellt einen großen Unterschied dar, ob die Geräte den Schülerinnen und Schülern dauerhaft im Unterricht und auch zu Hause zur Verfügung stehen oder nur zeitweise und begrenzt im Unterricht genutzt werden. Entscheidend für die Verfügbarkeit ist zum einen die Art der Hardware; so ermöglichen Handhelds eine breitere Verfügbarkeit als feste Geräte. Zum anderen hängt die Verfügbarkeit auch von der Kostenfrage der Programme und der technischen Kompatibilität mit den lokalen Gegebenheiten ab. Inhaltlich ist der ständige Einsatz von Multi-Repräsentationssystemen anzustreben. Er bietet gegenüber Geräten mit weniger Funktionalitäten und damit kürzeren Einsatzzeiten mehr Möglichkeiten, da die Funktionalitäten alle Themenbereiche der Schulmathematik betreffen, von der Algebra und Analysis über die Geometrie bis zur Stochastik, und das vor allem in Wechselbeziehung zueinander. Gerade dieses Wechselspiel kann das Verständnis in besonderer Weise fördern, wenn zum Beispiel das Definieren einer Variablen in der Tabellenkalkulation auch für die begleitende Konstruktion in der Geometrie oder das Bearbeiten der Terme in der Computeralgebra gilt. Trotz der umfangreicheren Möglichkeiten sind die Prinzipien und Überlegungen, wie eine sinnvolle Integration in den Unterricht gelingen kann, häufig die gleichen wie bei einfacheren Werkzeugen, die nur eine der in Tabelle 1 genannten Funktionalitäten besitzen. Es kommt im Wesentlichen darauf an, die vorhandenen Möglichkeiten zu nutzen, so dass sie eine Bereicherung für das Lernen und Lehren darstellen.

2 Ebenen der Veränderung beim Lernen und Lehren

Medien können dann als Mittler im Lernprozess dienen, wenn sie bestimmte kognitive Tätigkeiten unterstützen. Wie dies geschieht, steht im Fokus der Theorie der „instrumentalen Genese“ (Drijvers & Trouche, 2008). Es geht darum, in welcher Art und Weise das Medium zum Instrument im Lern- oder Gedankenprozess des Nutzers wird. Die Beeinflussungen im Rahmen dieser Genese sind wechselseitig (Hoyles & Noss, 2003). Einerseits beeinflusst der Nutzer als Subjekt mit seinem Wissen und seinen Überzeugungen das Medium („instrumentation“), wenn zum Beispiel die Software individuell eingerichtet wird, bestimmte Definitionen vorgenommen oder Makros erstellt werden. Andererseits kann sich durch die Arbeit mit dem Medium das Denken des Nutzers und damit dessen Wissen und Überzeugungen verändern („instrumentalization“). So hat beispielsweise Drijvers (2003, S. 263) gezeigt, dass das Variablenverständnis beim Nutzen eines Computeralgebrasystems positiv beeinflusst werden kann, da Variablen in den unterschiedlichen Grundvorstellungen (z. B. Gegenstand, Platzhalter, Veränderliche; siehe Malle, 1993) in den digitalen Werkzeugen verwendet werden. Auch wenn diese Theorie sehr allgemein erscheint, so zeigt sie doch fundamental auf, dass die Wirkung eines Mediums entscheidend davon abhängt, wie es genutzt und wie es in den Arbeits- und Gedankengang integriert wird.

Deshalb ist es wichtig, das Potenzial digitaler Werkzeuge für den Mathematikunterricht zu klären. Dies machen Pierce und Stacey (2008), indem sie verschiedene Bereiche möglicher Veränderungen durch den Werkzeugeinsatz kategorisieren. Sie sehen die Veränderungen sowohl auf der Ebene der Aufgaben als auch auf der Ebene des Unterrichtsaufbaus und der Unterrichtsorganisation.

2.1 Veränderungen auf der Ebene der Aufgaben

Digitale Werkzeuge bieten durch ihre Funktionalitäten (s. Tabelle 1) unterschiedliche Möglichkeiten, Lernprozesse anzuregen oder sogar erst zu ermöglichen. Dieses Potenzial kann sich nur bei der Arbeit an geeigneten Aufgaben entfalten.

Eine dieser Möglichkeiten ist die Förderung des mathematischen *Experimentierens* oder *Explorierens* (vgl. Hischer, 2002, S. 116 ff.; KMK, 2012, S. 12). Die Aufgabe 1 regt beispielsweise dazu an, den Computer als Experimentierwerkzeug zu verwenden (vgl. Henn, 2004, S. 15):

> f sei eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit den Nullstellen $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 5$. Zeichnen Sie den Graphen von f und die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3|f(3))$. Welche Besonderheiten haben Graph und Tangente? Gilt dies für jede solche Tangente?
>
> **Aufgabe 1: Entdecken und Begründen**

Die Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe bearbeiten, zeichnen häufig zunächst den Graphen für $f(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$ und die Tangente im Punkt (3|2) (s. Abbildung 1). Sie entdecken, dass die Tangente an der Nullstelle $x = 5$ die x-Achse schneidet. Die Vermutung, dass eine solche Tangente die x-Achse in einer Nullstelle schneidet, wird an weiteren Funktionen mit den gegebenen Bedingungen bestätigt, während die Lage der Tangente systematisch verändert wird. Dies wiederum führt dann zur Vermutung, dass die Tangente an der Stelle, die genau zwischen zwei Nullstellen liegt, den Graphen an der dritten Nullstelle schneidet. Dies kann dann auch bei anderen ganzrationalen Funktionen dritten Grades mit drei beliebigen Nullstellen geprüft werden. Es können auch Sonderfälle betrachtet werden, wenn beispielsweise zwei Nullstellen zusammenfallen. Diese Experimente führen schließlich zu einer Behauptung, für die nun mathematische Begründungen erforderlich sind. Auch für die dazugehörigen algebraischen Berechnungen ist ein Computeralgebrasystem ein geeignetes Werkzeug (Henn, 2004).

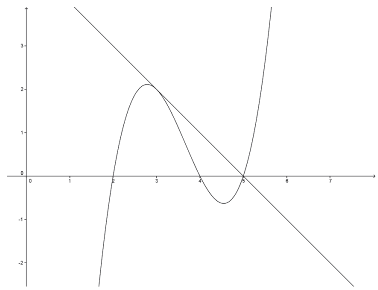


Abb. 1: Tangente an $f(x)$ in (3|2)

Eine sehr ähnliche Tätigkeit wie das Experimentieren ist das *Simulieren*. Simulationen sind Experimente mit Modellen, die Erkenntnisse über die im Modell dargestellte reale Situation oder das Modell selbst liefern sollen (Greefrath & Weigand, 2012). So sind beispielsweise Voraussagen über die Population einer bestimmten Tierart bei unterschiedlichen Umweltbedingungen mit Hilfe einer Simulation möglich (vgl. dazu auch den Beitrag von Biehler, Eichler, Löding und Stender, Kapitel 21 in diesem Band).

Eine verbreitete Verwendung von digitalen Werkzeugen, speziell Computeralgebrasystemen, ist das *Berechnen* (bzw. Kalkulieren, vgl. Hischer, 2002, S. 122 ff.) von numerischen oder algebraischen Ergebnissen, die Schülerinnen und Schüler ohne diese Werkzeuge nicht oder nicht in angemessener Zeit erhalten können. Ein bekanntes Beispiel ist die Berechnung zur Optimierung komplexer Verpackungsprobleme, wie etwa einer Milchverpackung (Böer, 1993). Wird dieses Problem mit Hilfe von Funktionsgleichungen und Differenzialrechnung bearbeitet, so kommt man leicht auf gebrochen-rationale Funktionen, bei denen die Nullstellen der ersten Ableitung mit Methoden der Schulmathematik nicht mehr zu bestimmen sind.

Zum Berechnen im Rahmen von Modellierungen oder Problemlösungen gehört auch das Erstellen von Termen und Gleichungen aus gegebenen Informationen, z. B. bei der Aufgabe „Cityräder“[1], bei der aus gegebenen Informationen zu einem Leihrad-System eine Kostenfunktion ermittelt werden soll. Wenn wie im Beispiel eine Funktionsgleichung aus realen Daten, hier Erfahrungswerten und Mietpreisen bei Leihrädern, ermittelt wird, dient das digitale Medium ebenfalls als Rechenwerkzeug. Eine *Verarbeitung größerer Datenmengen* (KMK, 2012, S. 13) ist dadurch charakterisiert, dass reale Daten in den Computer oder Handheld eingegeben werden, mit dem Ziel einer algebraischen Darstellung wie z. B. bei der Model-

1 Hamburger Zentralabitur 2012, Kurs auf grundlegendem Niveau, Haupttermin CAS-Schulen, erhältlich über http://bildungsserver.hamburg.de/alte-abituraufgaben-mathematik (letzter Zugriff am 25.08.2014).

lierung des Wachstums einer Bakterienkultur in unterschiedlichen Phasen. In einer dieser Phasen vermehren sich die Bakterien immer schneller, bis dann schließlich die Nährstoffe erschöpft sind und sich Stoffwechselprodukte im Nährmedium angesammelt haben. Stellt man solche Daten in einem Diagramm dar, so kann man erkennen, dass sich das Bakterienwachstum am Anfang gut durch eine Exponentialfunktion beschreiben lässt. Mit Hilfe des digitalen Werkzeugs lässt sich auch direkt eine passende Funktionsgleichung erstellen. Aus den realen Daten wird also eine algebraische Darstellung ermittelt. Das verwendete funktionale Modell kann allerdings nicht allein durch die Passung der Daten gerechtfertigt werden, sondern muss auch im verwendeten Kontext hinterfragt werden (Greefrath, 2010). Beispielsweise muss bei der Aufgabe „Atemvolumen“ eine Funktion gefunden werden, die die gegebenen Daten gut beschreibt (man vergleiche zu dieser Aufgabe auch den Beitrag von Schmidt, Kapitel 19 in diesem Band). Nimmt man auch das Ausatmen in den Blick, so ist in diesem Kontext ein anderes funktionales Modell sinnvoll als nur für das Einatmen.

Digitale Werkzeuge bieten die Möglichkeit, mathematische Repräsentationen flexibel zu nutzen, und können damit die Aufgabe des *Visualisierens* im Unterricht übernehmen (Barzel et al., 2005, S. 58; Hischer, 2002, S. 284 ff.; Weigand & Weth, 2002, S. 36 f.). In verschiedenen Studien wurde festgestellt, dass gerade die Verbindung symbolischer und visueller Repräsentationen die Konstruktion mathematischer Strategien und Ideen unterstützt (Clements et al., 2008, S. 142). Beispielsweise können gegebene Daten mit Hilfe eines Computeralgebrasystems oder einer Statistikanwendung in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Im Analysisunterricht ist die Darstellung von Funktionsgraphen ein zentraler Punkt. So bietet die grafische Darstellung einen guten Überblick über den Einfluss der unterschiedlichen Parameter auf das Wachstumsverhalten, z. B. bei der Untersuchung von Wachstumsprozessen, die durch Exponentialfunktionen modelliert werden können. Gerade bei Funktionen mit Parametern ist ein Funktionenplotter ein wichtiges Werkzeug zur Visualisierung, da die unterschiedlichen Funktionsgraphen ohne Computer nur mit erheblichem Aufwand sichtbar gemacht werden können. Insbesondere können Multi-Repräsentationssysteme durch die interaktive Vernetzung der unterschiedlichen Darstellungsformen Grafik, Tabelle und Term die Charakteristika von Funktionen verstehen helfen. In den vielfältigen *Darstellungsmöglichkeiten* (KMK, 2012, S. 13) wird ein besonderes Potenzial digitaler Werkzeuge gesehen. So werden etwa Variationen an Variablen, Termen und Gleichungen im Algebra-Fenster (s. Abbildung 2) im Geometrie- und im Tabellen-Fenster sichtbar. Verschiebungen oder andere Veränderungen im Geometrie-Fenster bewirken Veränderungen der entsprechenden Terme im Algebra- und im Tabellen-Fenster, und eine Manipulation der Daten im Tabellen-Bereich kann im Algebra- und im Graphik-Fenster große Auswirkungen haben (Greefrath, Schelldorfer & Schmidt, 2013).

Im *Kontrollieren* bzw. Überprüfen (Barzel, Hußmann & Leuders, 2005, S. 58; KMK, 2012, S. 13) finden digitale Werkzeuge ebenfalls eine sinnvolle Verwendung. So können sie etwa bei der Bestimmung von Funktionen zu gegebenen Eigenschaften im Sachkontext auf unterschiedliche Weise Kontrollprozesse unterstützen. Wird beispielsweise im Rahmen einer typischen Schulbuchaufgabe eine Funktionsgleichung gesucht, die die Flughöhe eines Ballons mit gegebenen Daten in Abhängigkeit von der Flugdauer beschreibt, so kann das entsprechende Ergebnis – unabhängig davon, ob es mit oder ohne digitale Werkzeuge bestimmt worden ist – algebraisch, numerisch oder grafisch kontrolliert werden (Greefrath & Weitendorf, 2013). Die entsprechenden Berechnungen können nämlich sowohl durch algebraisches Nachvollziehen der Rechnungen mit Hilfe des Computers als auch durch Einsetzen der Daten in die erhaltene Funktionsgleichung sowie durch Vergleich des Funktionsgraphen mit den gegebenen Daten kontrolliert werden.

Verwendet man im Mathematikunterricht Tablets oder Computer mit Internetanschluss, so können diese auch zum *Recherchieren* von Informationen (vgl. Barzel, Hußmann & Leuders, 2005, S. 51), beispielsweise im Zusammenhang mit den Anwendungskontexten, verwendet werden. Auf diese Weise können die realen Probleme zunächst besser verstanden und schließlich vereinfacht werden.

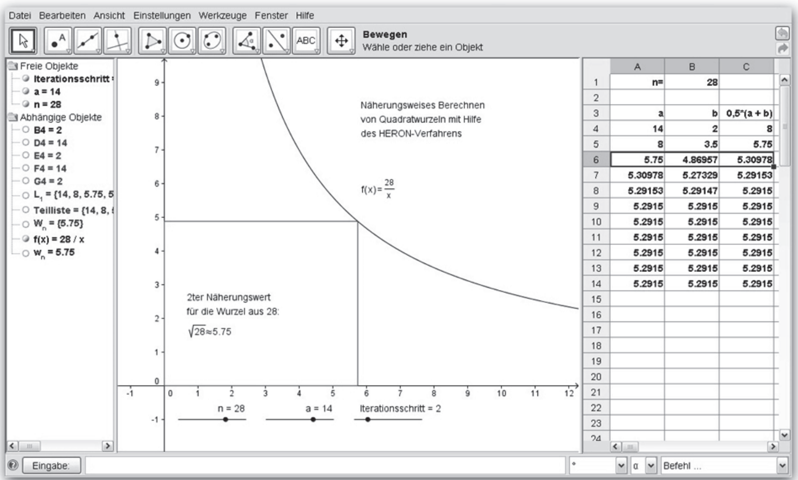


Abb. 2: Mögliche Darstellungswechsel am Beispiel des Heron-Verfahrens (s. Greefrath, Schelldorfer & Schmidt, 2013, S. 3)

2.2 Veränderungen in Unterrichtsaufbau und -organisation

Die technischen Möglichkeiten digitaler Werkzeuge und das Potenzial auf Aufgabenebene schaffen auch neue Möglichkeiten im Bereich der Unterrichtsorganisation. So können allein durch die Möglichkeit der Kontrolle Schülerinnen und Schüler stärker eigenverantwortlich arbeiten. Auch Möglichkeiten des Experimentierens und Erkundens, wie sie oben beschrieben wurden, entfalten ihr Potenzial besonders in individuellen und kooperativen Arbeitsphasen. So verwundert es nicht, dass gerade ständig verfügbare digitale Werkzeuge im Unterricht zu mehr kooperativen Sozialformen führen und die Lehrkräfte entlasten können (Barzel, 2012; Clark-Wilson & Oldknow, 2009).

Didaktisch interessant ist die Frage, zu welchem Zeitpunkt und wozu im Lernprozess die digitalen Werkzeuge eingesetzt werden. Als zwei Pole der Möglichkeiten werden der *White-Box-Black-Box-* und der *Black-Box-White-Box-Weg* angesehen (Heugl, Klinger & Lechner, 1998). Der Begriff *Box* bezieht sich dabei sowohl auf einen mathematischen Inhalt als auch auf die digitalen Werkzeuge (vgl. auch Lehmann, 1999). Beim Weg von der White Box zur Black Box erfolgt der Einsatz der digitalen Werkzeuge erst, wenn die dazugehörige Mathematik einschließlich der Durchführung der entsprechenden Berechnungen ohne Werkzeuge verstanden ist (White Box). Die digitalen Werkzeuge werden also tendenziell von den Schülerinnen und Schülern eher am Ende einer Unterrichtssequenz genutzt; von der Lehrperson allenfalls zu Visualisierungen auch bereits zu Beginn der Sequenz. Dieser Weg passt zu einem systematischen Aufbau des Unterrichts, der an der fachlichen Hierarchie der Inhalte orientiert ist. Bei diesem Weg ist das Werkzeug nur ein Additum am Ende und steht in der Gefahr, als verzichtbares Anhängsel wahrgenommen und dann auch tatsächlich weggelassen zu werden. Beim Black-Box-White-Box-Weg werden die digitalen Werkzeuge dagegen genutzt, um neue mathematische Inhalte zu erlernen oder neue Erkenntnisse zu gewinnen. Werden beispielsweise als genetischer Zugang zur Integralrechnung (vgl. Schmidt, Kapitel 19 in diesem Band) Daten und Grafiken zu Änderungsraten vorgegeben, um selbstständig die Idee des Schließens auf die Allgemeinheit entdecken und vollziehen zu lassen (Hußmann, 2006, S. 32 ff.), beschreibt dies einen Unterrichtsaufbau auf dem Black-Box-White-Box-Weg. Aber auch während oder am Ende einer Unterrichtssequenz ist dieser Weg sinnvoll, damit Lernende selbst neue Erkenntnisse generieren können. Dies geschieht auch beim Beispiel zum Experimentieren (s. Abschnitt 2.1.), wenn am Schluss der Betrachtungen die Behauptung durch eine algebraische Begründung für dieses Verhalten der Tangente als neue Erkenntnis steht.

Digitale Werkzeuge können also sowohl als Werkzeug zum *Anwenden* von Mathematik als auch zum *Erlernen* von Mathematik im Unterricht genutzt werden. Beide Varianten sind wichtig. Als Werkzeug zum Treiben und Anwenden von Mathematik dienen digitale Mathematikwerkzeuge im Rahmen von Modellierungen, Problemlösungen oder Datenanalysen besonders durch die Möglichkeit, schnell Rechnungen, komplexe Algorithmen und statische sowie dynamische Visualisierungen vollziehen zu können. Ein Werkzeug zum Lernen ist ein Computer beispielsweise bei Aufgaben zur Struktursuche, da viele Beispiele schnell generiert werden können, beim Experimentieren mit Begriffen und Methoden, beim Untersuchen von Zusammenhängen und auch beim Kontrollieren von Lösungen.

Mit dem Nutzen digitaler Werkzeuge auch zum Lernen von Mathematik kann der Einsatz prinzipiell in allen Phasen des Unterrichts erfolgen. Viele Aufgaben – gerade im Bereich des Modellierens –, die zunächst für das Üben und Vertiefen am Ende einer Unterrichtssequenz intendiert sind, lassen sich vielfach zu einer Problemstellung für die Einstiegsphase umgestalten.

3 Potenziale und Probleme des digitalen Werkzeugeinsatzes im Unterricht

Inwieweit ein Werkzeug den Lernprozess befördert oder sogar behindert, hängt vor allem von der Art und Weise ab, wie das Werkzeug genutzt wird. Ist zum Beispiel ein Computeralgebrasystem für Schülerinnen und Schüler frei verfügbar und die Aufgabenstellung eine Kurvendiskussion im klassischen Sinne, stellt dies für den Lernprozess eher einen Rückschritt dar, da die meisten in der Aufgabe geforderten Prozeduren unmittelbar vom Computer übernommen werden können. Werden jedoch stärker verstehensorientierte, reflektierende Aufgaben gestellt, gezielt Zwischenschritte gefordert oder Modellierungen gefragt, kann das Potenzial des digitalen Werkzeugeinsatzes zur Förderung des Lernprozesses genutzt werden. Um hier die richtige Balance zu finden, ist es wichtig, sich die entsprechenden Möglichkeiten und Grenzen bewusst zu machen.

3.1 Chancen und Möglichkeiten digitaler Werkzeuge

Viele Studien – ebenso wie viele Erfahrungen von Lehrenden – haben gezeigt, dass digitaler Werkzeugeinsatz bei entsprechender Aufgabengestaltung sowohl die herkömmlichen Denkformen verstärken als auch neue Erkenntniswege ermöglichen kann (KMK, 2012; Barzel, 2012). Insbesondere kann durch geeignete Aufgabenstellungen das konzeptionelle Wissen gefördert werden (Barzel, 2012, S. 24). Dazu sollte die Verbindung zwischen regelgeleiteten Tätigkeiten und Aktivitäten, die auf das Verstehen und Verinnerlichen mathematischer Sachverhalte abzielen, gefördert werden. Diese Verbindung kann mit digitalen Werkzeugen in besonderer Weise erreicht werden und es ist gerade diese Verbindung, die für das Lernen von Mathematik von großer Bedeutung ist (Kieran & Drijvers, 2006, S. 256).

In den Bildungsstandards werden vier Bereiche konkretisiert, um Chancen und Möglichkeiten digitaler Werkzeuge zu verdeutlichen.

Entdecken mathematischer Zusammenhänge

Der erste Bereich ist das Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen. Lernende können selbstständig eine Vielzahl an Beispielen als Ausgangspunkt für Begriffsbildungen, Problemlösungen oder Vermutungs- und Begründungsfindungen erzeugen. Digitale Werkzeuge ermöglichen hier neue Erkenntniswege, indem verschiedene Modelle umgesetzt werden können oder mit Beispielen am Computer die Suche nach Mustern und Strukturen ermöglicht wird. Dies können etwa mehrere Funktionsgraphen zur Untersuchung der Bedeutung von Parametern oder mehrere Terme sein, um Analogien zu finden und auf eine allgemeine Formel zu schließen. Aber auch Simulationen oder das Darstellen einer Fülle statistischer Daten können zur Struktursuche genutzt werden, wodurch Charakteristika bestimmter mathematischer Modelle und Konzepte in den Daten selbst gefunden werden können.

Vielfältige Darstellungsmöglichkeiten

Der zweite Bereich ist die Verwendung vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten zur Verständnisförderung, wodurch herkömmliche Denkformen verstärkt werden. Dies gilt insbesondere bei Multi-Repräsentationssystemen, bei denen die Darstellungen interaktiv miteinander verknüpft sind, d. h. wenn beispielsweise eine Variable in einem Fenster bzw. einer Anwendung definiert wird, steht sie in allen anderen auch zur Verfügung. Wie wichtig dieser flexible und häufige Wechsel zwischen Darstellungen für das Erlernen von Mathematik ist, wird vielfach betont (z. B. Hoyles & Lagrange, 2010). Duval (2002) sieht gar als Bedingung des Gelingens von Begriffsentwicklung in Mathematik die erfolgreiche Interpretation, Verwendung und Manipulation unterschiedlicher Repräsentationen.

Reduktion schematischer Abläufe

Der dritte Bereich ist die Reduktion schematischer Abläufe bei der Verarbeitung größerer Datenmengen. Hier können beispielsweise Realdaten viel stärker einbezogen und komplexe Modellierungen durchgeführt werden. Dabei sollten rechnerfreie Tätigkeiten keineswegs verloren gehen, wenn eine entsprechende Aufgaben- und Unterrichtskultur geschaffen wird, in der auch dies wichtiger Bestandteil bleibt (Bruder & Ingelmann, 2009).

Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge

Der vierte Bereich ist die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben. Das selbstständige Wählen geeigneter Medien und Werkzeuge kann das reflektierte Umgehen mit Medien stärken.

3.2 Gefahren und Grenzen beim Einsatz digitaler Werkzeuge

Neben den Potenzialen digitaler Werkzeuge gibt es Gefahren, die bei unangemessener Nutzung entstehen können. Diese Gefahren sind oft unmittelbar mit den Potenzialen verknüpft (vgl. Barzel et al., 2005, S. 38 ff.). So könnte man zu jedem der oben beschriebenen Bereiche auch entsprechende Gefahren und Grenzen beschreiben. Besonders hinweisen möchten wir auf die folgenden:

Problem der Unübersichtlichkeit

Das Entdecken mathematischer Zusammenhänge auf der Grundlage einer Vielzahl an Beispielen als Ausgangspunkt für Begriffsbildungen, Problemlösungen oder Vermutungs- und Begründungsfindungen stellt eine große Herausforderung für die Lernenden dar. Insbesondere kann die Vielzahl zugänglicher Beispiele auch unübersichtlich werden. Das beliebige Erzeugen von Beispielen kann das gezielte und systematische Arbeiten verhindern. Das reflektierte und systematische Arbeiten mit Beispielen muss gefördert und eigens geübt werden.

Problem der oberflächlichen Wahrnehmung

Mit der Verwendung vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten kann zwar das Verstehen gefördert werden, allerdings besteht die Gefahr des nur oberflächlichen Wahrnehmens von Grafiken, wenn diese in großer Anzahl verwendet werden. Schnelles Verändern verhindert Reflexion und leistet Versuch-und-Irrtums-Strategien Vorschub. Visualisierungen sollten auch nicht echte handelnde und begreifende Lernprozesse verdrängen, wo das nicht erforderlich ist. Der reflektierte Umgang mit den verschiedenen Darstellungsformen kann aber mit Hilfe der digitalen Werkzeuge auch gefördert werden, indem gezielt Aufgaben integriert werden, die den Transfer und das flexible Wechseln zwischen Darstellungen erfordern (vgl. den Beitrag von Elschenbroich, Kapitel 20 in diesem Band). Auch gilt es, gezielt Reflexionen anzuregen, wenn nach einem dynamischen Betrachten vieler Fälle kein Beweisbedürfnis mehr wahrgenommen wird. Einen solchen Gesprächsanlass zu Beweisnotwendigkeiten sollte man bewusst nutzen.

Problem des Verlusts hilfsmittelfreier Fertigkeiten

Wenn Kalküle oder Zeichnungen an Werkzeuge abgegeben werden, besteht die Gefahr, dass hilfsmittelfreie Fertigkeiten und das Verständnis für die ausgeführten Algorithmen verloren gehen. Es ist wichtig, dass dies spezifisch im Blick bleibt und bewusst im Unterricht gefördert wird (vgl. den Beitrag von Bruder, Feldt-Caesar, Pallack, Pinkernell und Wynands, Kapitel 9 in diesem Band).

4 Digitale Werkzeuge in Prüfungen

Die mögliche Rolle digitaler Werkzeuge bei der Bearbeitung von Prüfungsaufgaben kann sehr unterschiedlich sein. Die erste Möglichkeit ist, dass die digitalen Werkzeuge bei der Bearbeitung keine Hilfe darstellen, weil die Aufgabe beispielsweise eine Begründung einfordert. Eine weitere Rolle ist, dass die digitalen Werkzeuge zusätzliche Möglichkeiten eröffnen, aber für die Bearbeitung der Aufgaben nicht zwingend erforderlich sind. Diese Gruppe stellt bei genauerer Analyse wohl die größte Gruppe der aktuellen Prüfungsaufgaben dar. Die dritte Möglichkeit sind Aufgaben, die ohne digitale Werkzeuge für Schülerinnen und Schüler nicht lösbar sind. So können die digitalen Werkzeuge also *neutral, optional* oder *erforderlich* für die Lösung der Prüfungsaufgabe sein. Außerdem können Aufgaben gestellt werden, bei denen der Einsatz digitaler Werkzeuge nicht vorgesehen ist *(Hilfsmittelfreier Teil)* (Brown, 2003). Ein hilfsmittelfreier Teil in Prüfungen ist nicht identisch mit einer Prüfung des mathematischen Grundwissens, hier gibt es aber durchaus wesentliche Überschneidungen (s. wieder Bruder et al., Kapitel 9 in diesem Band).

Die Möglichkeiten für die Nutzung digitaler Werkzeuge im Unterricht sollten auch in der Prüfung angemessen berücksichtigt werden: „Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung“ (KMK, 2012, S. 13). Angemessen erscheint ein Mix aus den oben genannten drei Prüfungsaufgabentypen: aus neutralem, optionalem und erforderlichem Werkzeuggebrauch sowie einem zusätzlichen Prüfungsteil ohne Hilfsmittel. Dazu sind neue Konzepte für die Konstruktion von Prüfungsaufgaben erforderlich, die aber auch bekannte Qualitätskriterien berücksichtigen (s. den Beitrag von Heintz, Drüke-Noe und Greefrath, Kapitel 14 in diesem Band; Barzel, 2012). Zum einen können insbesondere mit Hilfe digitaler Werkzeuge die sprachlichen Anteile in den Lösungen vergrößert und zum anderen auch alternative Prüfungsformate gefördert werden.

5 Fazit

Digitale Mathematikwerkzeuge bieten im Unterricht und in Prüfungen vielfältige Möglichkeiten. Im Unterricht kann – neben dem Einsatz in Übungsphasen – gerade zu Beginn einer Lernsequenz das große Potenzial digitaler Werkzeuge genutzt und in besonderer Weise konzeptionelles Wissen gefördert werden. Dies geschieht etwa, wenn mathematische Begriffe und Zusammenhänge selbstständig erkundet werden, da Algorithmen und Konstruktionen schnell verfügbar sind und so etwa Vermutungen gezielt überprüft werden können. Besonders Multi-Repräsentationssysteme bieten durch die Verfügbarkeit und Vernetzung verschiedener mathematischer Darstellungen das große Potenzial, verschiedene Zugangsweisen leicht zu gewähren und mathematische Spezifika auf unterschiedliche, parallelisierte Arten zu beschreiben und so besser zu verstehen. Dies hat dann auch, wie oben ausgeführt, unmittelbare Auswirkungen auf die Gestaltung der Abiturprüfung.

Literaturverzeichnis

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra – Mehrwert beim Lernen von Mathematik – aber wann?*. Münster: Waxmann Verlag.

Barzel, B., Drijvers, P., Maschietto, M. & Trouche, L. (2006). Tools and technologies in mathematical didactics. In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 927–938). Barcelona, Spain: Universitat Ramon Llull. Zugriff am 26.07.2014 unter http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Böer, H. (1993). Extremwertproblem Milchtüte. In W. Blum (Hrsg.), *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht* (S. 1–16). Hildesheim: Franzbecker.

Brown, R. (2003). Computer Algebra Systems and Mathematics Examinations: a comparative study. *The international Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 10,* 155–182.

Bruder, R. & Ingelmann, M. (2009). CAliMERO aus Sicht der Forschenden. *Der Mathematikunterricht 55* (4), 13–19.

Clark-Wilson, A. & Oldknow, A. (2009). Teachers using ICT to help with ‚hard to teach' topics. *Mathematics in School, 38,* 3–6.

Clements, D. H., Sarama, J., Yelland, N. J. & Glass, B. (2008). Learning and Teaching Geometry with Computers in the Elementary and Middle School. In M. K. Heid & G. W. Blume (Hrsg.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses,* (Band 1, S. 109-154). Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Drijvers, P. (2003). Algebra on Screen, on Paper, and in the Mind. In J. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R. Zbiek (Hrsg.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (S. 241–268). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M. K. Heid & G. W. Blume (Hrsg.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses* (Band 1, S. 363–391). Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1* (2), 1–16.

Greefrath, G. (2010). Mit dem Computer qualitativ arbeiten?. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52* (31), 20–24.

Greefrath, G., Schelldorfer, R. & Schmidt, R. (2013). Das verbindet. Geometrie, Tabellen, Algebra. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55* (50), 2–8.

Greefrath, G. & Weigand, H.-G. (2012). Simulieren – mit Modellen experimentieren. *mathematik lehren, 174,* 2–6.

Greefrath, G. & Weitendorf, J. (2013). Modellieren mit digitalen Werkzeugen. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe* (S. 181–201). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Henn, H.-W (2004). Computer-Algebra-Systeme – Junger Wein oder neue Schläuche? *Journal der Mathematik.-Didaktik. 25* (3–4), 198–220.

Heugl, H., Klinger, W. & Lechner, J. (1998). *Mathematikunterricht mit Computeralgebra- Systemen. Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt.* München: Addison-Wesley.

Hischer, H. (2002). *Mathematikunterricht und Neue Medien.* Hildesheim: Franzbecker.

Hoyles, C. & Lagrange, J. (Hrsg.) (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study.* New York: Springer Science and Business Media.

Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Hrsg.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (S. 323–350). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hußmann, S. (2006). Mit digitalen Forschungsheften die Geschwindigkeit in den Griff bekommen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 48* (7), 31–35.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of cas use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11* (2), 205–263.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2012): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).* Zugriff am 31.08.2013 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Lehmann, E. (1999). Mathematik mit Bausteinen und ihren Parametern. *Praxis Mathematik. 41* (3), 97–100.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Wiesbaden: Vieweg.

Pierce, R. & Stacey, K. (2008). Using Pedagogical Maps to Show the Opportunities Afforded by CAS for Improving the Teaching of Mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 22* (1), 6–12.

Steinmetz, R. (2000). *Multimedia-Technologie. Grundlagen, Komponenten und Systeme.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Weigand, H.-G & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen.* Heidelberg: Spektrum.

Teil 3
Zur Rolle von Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II

13. Aufgaben in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Sabine Hammer und Stefan Ufer

Mathematikunterricht wird ganz wesentlich um die im Unterricht bearbeiteten Aufgaben organisiert. Lerngelegenheiten werden stark dadurch festgelegt, welche Aufgaben im Unterricht wie eingesetzt werden. Eine zentrale Herausforderung für Mathematiklehrkräfte besteht damit darin, Aufgaben für den Unterricht auszuwählen und diese dann so umzusetzen, dass deren Potential wirksam wird. In diesem Beitrag gehen wir auf Möglichkeiten ein, das spezifische Potential von Aufgaben für verständnisvolles Lernen und kumulativen Kompetenzaufbau im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II zu erkennen, somit entsprechende Aufgaben auszuwählen und sich auf die Umsetzung dieses Potentials im Unterricht vorzubereiten.

1 Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht

Sowohl die Unterrichtsplanung als auch die Arbeit im Unterricht selbst orientieren sich ganz wesentlich an den ausgewählten Aufgaben und Arbeitsaufträgen (Bromme, 1981). Unter einer Aufgabe versteht man dabei eine Aufforderung zur gezielten Bearbeitung eines eingegrenzten mathematischen Themas (Neubrand, 2002). Aufgaben haben im Lehr-Lern-Prozess verschiedene Funktionen: Sie sind für die Lehrkraft ein Werkzeug zur Diagnose des Lernfortschritts (s. den Beitrag von Leuders zu diagnostischen Aufgaben, Kapitel 15 in diesem Band) oder zur Leistungsfeststellung in Klassenarbeiten bzw. in der Abiturprüfung (s. die Beiträge von Drüke-Noe sowie von Heintz, Drüke-Noe und Greefrath, Kapitel 11 und Kapitel 14 in diesem Band). Auf der Ebene der Lernenden zielen sie je nach Unterrichtssituation auf die Exploration neuer Inhalte, die (ggf. selbstregulierte) Erarbeitung neuer Einsichten, die Elaboration und Vertiefung von Konzepten, Strategien und Verfahren oder auch auf die Automatisierung von technischen Fertigkeiten. All dies setzt voraus, dass sich die Lernenden aktiv und auf adäquatem Niveau mit den jeweiligen Inhalten auseinandersetzen, Problemsituationen analysieren, eigene Ideen entwickeln und begründen oder Lösungen vergleichen und reflektieren (Seidel & Shavelson, 2007). Entsprechend zeigt sich, dass das Potential von Aufgaben solche Aktivitäten anzuregen, ein guter Indikator für nachhaltig wirksame Lernprozesse ist (Baumert et al., 2010). Die spezifischen Zielsetzungen der gymnasialen Oberstufe (s. KMK, 2012) mit ihrer Ausrichtung auf allgemeine Bildung und wissenschaftspropädeutische Kenntnisse sind hier ein Maßstab nicht nur für den Aufbau von vernetztem und produktiv nutzbarem Wissen, sondern auch für einen nachhaltigen Aufbau allgemeiner mathematischer Kompetenzen.

2 Aufgaben in der Unterrichtsplanung – Potential erkennen

Ein wesentlicher Teil der Unterrichtsplanung ist es, Aufgaben für die Bearbeitung im Unterricht auszuwählen, die dazu geeignet sind, tragfähige individuelle Lernprozesse bei möglichst vielen Schülerinnen und Schülern anzuregen. Lernaufgaben sollen verständnisvolles Lernen und nachhaltigen Kompetenzaufbau unterstützen. Aus dieser Perspektive lassen sich *Merkmale wirksamer Lernaufgaben* identifizieren, deren Relevanz auch empirisch gestützt ist (im Überblick Kiper, Schmit, Peters & Schlump, 2010). Ähnliche Zusammenstellungen solcher Aufgabenmerkmale werden seit Längerem in der fachdidaktischen Literatur diskutiert (z.B. Bruder, 2006; Büchter & Leuders, 2005; Winter, 2003). Natürlich kann es nicht das Ziel sein, „die optimale Aufgabe“ zu identifizieren, spielen doch vielfältige Bedingungen der jeweiligen einzelnen Unterrichtseinheit eine wesentliche Rolle in der Planung.

Die im Folgenden beschriebenen vier Aufgabenmerkmale werden als zentral angesehen für lernwirksamen Mathematikunterricht. Das bedeutet nicht, dass jede „gute“ Aufgabe jedes Merkmal aufweisen muss. Auch legt nicht allein das Potential einer Aufgabe die Qualität des Unterrichts fest. Genauso wie es möglich ist, das Potential einer Aufgabe bei der konkreten Umsetzung im Unterricht zu „verspielen“, so ist es prinzipiell auch möglich, mit weniger gehaltvollen Aufgaben, beispielsweise durch geschickte Variation, kognitiv aktivierenden und wirksamen Unterricht zu gestalten. Dennoch sind die verwendeten Lernaufgaben gute Indikatoren für die realisierte Unterrichtsqualität, und geeignet ausgewählte Aufgaben erleichtern Lehrkräften letztendlich auch die Gestaltung nachhaltig wirksamen Unterrichts.

2.1 Aufgabenmerkmal Kompetenzorientierung

Es ist weitgehend Konsens, dass sich die Zielsetzung von Mathematikunterricht nicht auf den Erwerb von Faktenwissen und das Beherrschen von Rechenprozeduren beschränkt. Neben der konkreten Anwendbarkeit des erworbenen Wissens beschreiben die Bildungsstandards eine Bandbreite an Fähigkeiten, welche die Lernenden in Bezug auf die erworbenen Konzepte ausbilden sollen. Um dieses Ziel umzusetzen, ist ein ausgewogenes Auftreten der verschiedenen Kompetenzen notwendig, was einer gezielten Aufgabenauswahl bedarf. Ausgewählte Aufgaben sollten in dem Sinne kompetenzorientiert sein, dass sie herausfordernde aber auch realistische Anforderungen in Bezug auf wenigstens eine Kompetenz erfordern und substantielle Lerngelegenheiten eröffnen. Neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen, die in einer Aufgabe erschlossen oder angewendet werden können, rücken dabei die kognitiven Aktivitäten der Lernenden mit den jeweiligen Inhalten in den Mittelpunkt.

Für die Auswahl von Aufgaben bedeutet das, dass sie nicht nur nach dem Inhalt ausgewählt werden sollten, sondern vor allem nach der mit der Aufgabe verbundenen mathematischen Tätigkeit: Liegt der Fokus auf der sach- bzw. adressatengerechten Kommunikation, auf der Herstellung von Bezügen zwischen Mathematik und Umwelt, oder im Erstellen, Interpretieren oder Reflektieren mathematischer Darstellungen? Mit diesen Anforderungen eng verknüpft ist das Potential der Aufgabe: In Bezug auf welche Kompetenz(en) kann sich bei der Bearbeitung dieser Aufgabe ein tragfähiger Lernprozess oder ein verständnisorientiertes Unterrichts- bzw. Gruppengespräch entwickeln? Welche inhaltlichen Einsichten, welche Strategien und welches übergeordnete Wissen, beispielsweise über mathematische Argumentationen oder Modellierungen, lassen sich anhand der Aufgabe thematisieren?

Geht man von der gut belegten Annahme aus, dass tragfähige Lernprozesse dadurch charakterisiert sind, dass sich die Lernenden aktiv mit den zu erlernenden Inhalten und Kompetenzen auseinandersetzen, dann wird klar, dass Kompetenzorientierung keine oberflächlichen Merkmale der Aufgabenstellung beschreiben kann (Seidel & Shavelson, 2007). So ist beispielsweise die Aufforderung „Begründen Sie Ihre Lösung!“ per se weder ein hinreichender noch ein notwendiger Hinweis auf ein besonderes Potential zur Förderung argumentativer Kompetenzen. Es ist somit weniger relevant, dass eine gewisse Kompetenz in einer Aufgabe explizit gefordert wird, sondern dass lernförderliche Aktivitäten zu dieser Kompetenz angeregt werden.

2.2 Aufgabenmerkmal Offenheit

Auch wenn offenere Unterrichtsformen nicht generell mit tragfähigen Lernprozessen einhergehen (Ufer, Heinze & Lipowsky, 2015), so lässt sich aus theoretischer Sicht gut begründen, dass offene Aufgaben Potential für kognitiv aktivierenden Unterricht bieten. Bruder (2000) unterscheidet offene Aufgaben nach den Anteilen des Lösungsprozesses, die für die Aufgabenbearbeitung offen gelassen werden. Dies kann sich auf die zur Lösung der Aufgaben notwendigen Informationen beziehen, auf die Zielsetzung der Aufgabenstellung oder auf die zur Lösung der Aufgaben notwendigen Transformationen und Lösungsschritte. Mit der Variation dieser drei Komponenten lassen sich unterschiedliche Anforderungsbereiche ansprechen und unterschiedliche Lernziele verfolgen. Offene Aufgabenstellungen werden zum Beispiel häufig im Bereich des mathematischen Modellierens eingesetzt, um die Lernenden dazu anzuregen, die gegebene Realsituation möglichst vollständig zu erfassen und ein reichhaltiges Situationsmodell auszubilden. Offene Ausgangssituationen, z.B. durch fehlende Angaben, die geschätzt werden müssen, verlangen von den Lernenden, ihrer Bearbeitung begründete Annahmen zugrunde zu legen. Aufgaben, die mehrere Lösungswege anregen, bieten die Möglichkeit, verschiedene Lösungsstrategien und -ansätze zu vergleichen und zu bewerten und damit höhere kognitive Prozesse in den Unterricht einzubinden. Es hat sich empirisch gezeigt, dass sich die Entwicklung mehrerer Lösungen zu Aufgaben und der Vergleich dieser Lösungen positiv auf das Interesse an Mathematik, die Anwendung von Kontrollstrategien und die kognitive Aktivierung auswirken (Schukajlow & Krug, 2013; Rittle-Johnson & Star, 2007).

Geben Sie verschiedene Situationen an, die durch das Integral $\int_a^b f(x)dx$ beschrieben werden. Erläutern Sie jeweils die Bedeutung der Parameter a und b und der Funktion f.

Aufgabe 1: Anwendung Integral

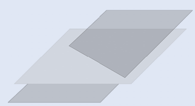
Aufgabe 1 erfordert, sofern erste Erfahrungen mit Anwendungen des Integralbegriffs vorhanden sind, vor allem die Kompetenzen mathematisch Argumentieren und mathematisch Modellieren (Leitideen funktionaler Zusammenhang und Messen). Die Offenheit der Aufgabe zeigt sich in der Anzahl der unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten, der groben

Vorgabe der Anfangssituation und des Ziels der Aufgabe. Im Unterricht bietet die Aufgabe die Möglichkeit, unterschiedliche Situationen zu diskutieren und zu vergleichen, die durch Integrale modelliert werden können. Eine Systematisierung unterschiedlicher Sachkontexte kann beispielsweise dazu anregen, verschiedene Bedeutungen von Integralen reflektierend zu analysieren und in Beziehung zu setzen, wie z. B. das Integral als „kontinuierliche Summe“, als „Fläche unter einem Graphen“ oder als „Umkehrung der Ableitung“. Damit bietet die Aufgabe Potential für den Aufbau von Grundvorstellungen. Es steht nicht das Berechnen von Integralen im Vordergrund, sondern die möglichen Bedeutungen des Integralbegriffs in verschiedenen Anwendungskontexten (s. a. den Beitrag von Schmidt, Kapitel 19 in diesem Band).

2.3 Aufgabenmerkmal Differenzierung

Jede schulische Klassengemeinschaft ist heterogen, beispielsweise bezüglich des sozialen und kulturellen Hintergrunds, der Herkunftssprache sowie der bisherigen Bildungsbiographie der Lernenden (KMK, 2012). Vor allem aber variieren Leistungsniveaus und Vorwissen, Interessen sowie die metakognitiven Fähigkeiten der Lernenden, was sich zum Beispiel in unterschiedlichen Lern- und Problemlösestrategien zeigen kann. Ein erfolgreicher Unterricht und die darin behandelten Aufgaben sollten diesen unterschiedlichen Bedingungen bestmöglich gerecht werden. Dies bedeutet, dass alle Lernenden Lerngelegenheiten vorfinden, die ihren jeweiligen Voraussetzungen entsprechen, und sie angeregt werden, diese Lerngelegenheiten auch zu nutzen. Eine gewisse Möglichkeit zur *äußeren* Differenzierung ist in den Bildungsstandards durch die Unterscheidung von grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau angelegt (i. d. R. durch Bildung unterschiedlicher Kurse). Dennoch bleibt ein Bedarf an differenzierendem Arbeiten innerhalb von Lerngruppen. Eine *innere* Differenzierung kann zum Beispiel mit einer schwierigkeitsgestaffelten Aufgabenauswahl realisiert werden. Es muss jedoch sichergestellt werden, dass die Lernenden für sie jeweils geeignete Aufgaben bearbeiten. Eine Möglichkeit hierfür sind selbstdifferenzierende Aufgaben, die auf unterschiedlichen Niveaus und mit unterschiedlichen Zugangsweisen bearbeitet werden können. Man spricht dann auch von einer *natürlichen* Differenzierung (Wittmann & Müller, 2006). Diese Idee findet sich z. B. schon bei Freudenthal (1974, S. 166, zitiert nach Krauthausen & Scherer, 2010, S. 1), der forderte, „daß die Schüler nicht neben- sondern miteinander am gleichen Gegenstand auf verschiedenen Stufen tätig sind“. Dies ist ein sehr allgemeines Konzept, das bisher fast ausschließlich Eingang in der Grundschule und der Sekundarstufe I gefunden hat.

Stellen Sie sich vor, Sie haben zwei Ebenen A und B in Parameterform gegeben.



- Wie könnte man den Schnittwinkel der beiden Ebenen ermitteln, wenn sich die Ebenen schneiden?
- Beschreiben und vergleichen Sie unterschiedliche Vorgehensweisen.
- Welche der Möglichkeiten halten Sie für die einfachste? Begründen Sie, wieso Sie diese Lösung als „einfach“ ansehen.

Aufgabe 2: Schnittwinkel zweier Ebenen

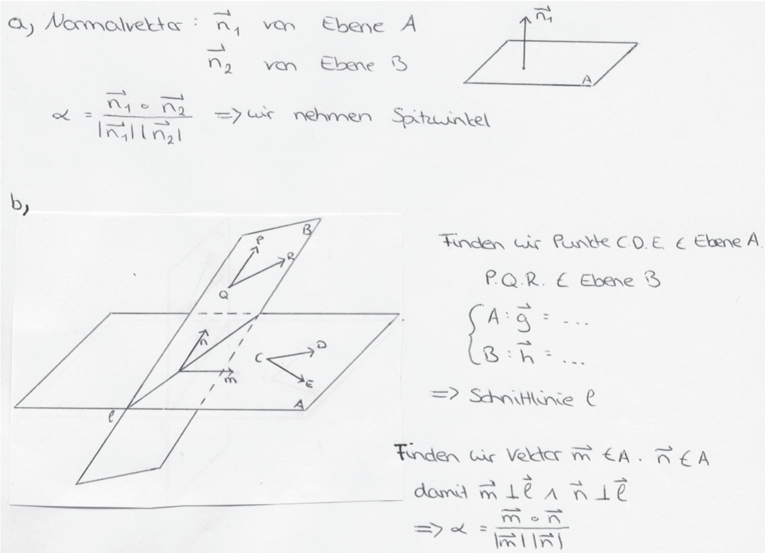


Abb. 1: Exemplarische Schülerlösung zu „Schnittwinkel zweier Ebenen"

Wie andere Aufgaben zur Bestimmung von Schnittwinkeln von konkreten Ebenen in Parameterform erlaubt auch diese Aufgabe verschiedene Lösungswege (s. Abschnitt 2.2. Offenheit), bietet aber deutliches Potential über den Abruf bekannter Lösungsschemata hinaus. Im Unterricht sind hier individuelle Bearbeitungsprozesse auf deutlich unterschiedlichen kognitiven Niveaus möglich. So können Lernende – ggf. auch nach Hinweis der Lehrkraft – anhand eines selbst überlegten konkreten Beispiels eine bekannte Strategie abrufen und diese beschreiben (Probleme mathematisch Lösen und mathematisch Kommunizieren). Andere Lernende werden ggf. ohne Rückgriff auf eine konkrete mathematische Situation einen Lösungsweg beschreiben bzw. alternative Lösungswege suchen. Ohne weiteren Impuls regt die Aufgabe dazu an, verschiedene Vorgehensweisen zu präsentieren und auf ihre Vor- und Nachteile hin begründet zu vergleichen (Probleme mathematisch Lösen, ggf. mathematisch Argumentieren). Die Erfahrung zeigt, dass viele Lernende zunächst die Lösung über Normalenvektoren beschreiben, jedoch zusätzlich dem Konzept des „Schnittwinkels" näherliegende Alternativlösungen entwickeln, bei denen Richtungsvektoren der Ebene konstruiert werden, die allerdings nicht immer senkrecht auf der Schnittgeraden stehen. Dieser Ansatz lässt sich in obiger Schülerlösung erkennen, auch wenn hier die Notation der Lösung nicht immer korrekt ist. Je nach Bearbeitungsprozess reflektieren Lernende bekannte Lösungsschemata, indem sie sie beschreiben und mit anderen Lösungsstrategien vergleichen. Andere Lernende konstruieren ggf. neue Lösungsideen. Im Unterricht kann an Vorstellungen angeknüpft werden, die mehr oder weniger tragfähig für die Entwicklung einer wirklich eleganten Lösungsstrategie sind. Es bietet sich auch die Gelegenheit, Fehlstrategien (z. B. Winkel zwischen den Richtungsvektoren zu bestimmen) begleitend zur Aufgabenbearbeitung zu thematisieren.

2.4 Aufgabenmerkmal Authentizität

Ein Ziel von Mathematikunterricht ist die Vermittlung eines adäquaten Bilds der Mathematik als Hilfsmittel zur Lösung wirklicher Probleme sowie – und das insbesondere in der Sekundarstufe II – als wissenschaftliche Disziplin (s. a. die Beiträge von Koepf und Kramer sowie von Ufer und Kramer, Kapitel 10 und Kapitel 7 in diesem Band). Im Gegensatz dazu ist jedoch gut dokumentiert, dass Lernende Mathematikaufgaben im schulischen Kontext häufig weitgehend losgelöst von den Gegebenheiten der konkreten Aufgabensituation angehen. So werden nichtlineare Zusammenhänge häufig mit proportionalen oder linearen Funktionen modelliert, und Lernende äußern die Überzeugung, dass jedes mathematische Problem eine Lösung hat und dass es nur eine einzige Lösung geben kann (vgl. Schoenfeld, 1992).

Authentische Aufgabenstellungen können zum Aufbau eines tragfähigen Bildes von Mathematik und zum Nutzen mathematischer Lösungsansätze beitragen. Authentisch beinhaltet dabei zunächst, dass mathematische Methoden und Konzepte in schulischen Aufgabenstellungen auf eine Art und Weise angewendet werden, die wenigstens prinzipiell der Herangehensweise in realen Situationen (in Alltag oder Wissenschaft) ähneln. Beispielsweise wäre die Frage nach der ganzrationalen Funktion zur Flugbahn beim Kugelstoßen sowie die Berechnung des höchsten Punkts der Wurfbahn (womöglich durch Bestimmung der Ableitung) eine für die sportliche Situation wenig authentische Anforderung. Authentischer wäre hier eine Überlegung hinsichtlich des idealen Abwurfwinkels für die größte Wurfweite.

2.5 Ein Illustrationsbeispiel zu den Aufgabenmerkmalen

Im Folgenden werden wir versuchen, die Ableitungsfunktionen der Funktionen p_n ($n \in \mathrm{N}$) mit $p_n(x) = x^n$ zu bestimmen.
Für p_2, also $p_2(x) = x^2$, haben wir das bereits getan, und zwar so:
Für alle reellen Zahlen x, h mit $h \neq 0$ gilt:

$$\frac{p_2(x+h) - p_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

Also haben wir für die Ableitung von p_2 an der Stelle x erhalten:

$$p_2(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p_2(x+h) - p_2(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

- Finden Sie auf die gleiche Art die Ableitungsfunktion p_n für andere natürliche Zahlen n heraus. Fangen Sie mit einzelnen Zahlen an ($n = 3, 4, \ldots$). Formulieren Sie Vermutungen, wie es weitergehen könnte.
- Kann man p_n auch mit Hilfe der uns bekannten Ableitungsregeln bestimmen? Gehen Sie auch hier Schritt für Schritt vor (nacheinander $n = 3, 4, \ldots$).

Aufgabe 3: Ableitung von Potenzfunktionen

Aufgabe 3 soll im Folgenden die verschiedenen Aufgabenmerkmale illustrieren. Die Aufgabe kann vor der Erarbeitung der allgemeinen Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und nach der Erarbeitung der Produktregel eingesetzt werden. Es ist zu erwarten, dass sich bei der Bearbeitung dieser Aufgabe sowohl Ansätze zu einer substanziellen Diskussion verschiedener Lösungsideen ergeben als auch Anknüpfungspunkte für das weitere Arbeiten im Unterricht (z. B. die Entwicklung eines induktiven Arguments mit Hilfe der Produktregel).

Bei dieser Aufgabe stehen die Kompetenzen mathematisch Argumentieren und Probleme mathematisch Lösen im Vordergrund, aber auch die Kompetenz mit symbolischen/technischen/formalen Aspekten Umgehen wird gefordert. Um letztere nicht ins Zentrum der Aufgabe zu rücken, können die anfallenden Faktorisierungen mit einem Computeralgebrasystem durchgeführt werden. Wie bei vielen Aufgaben, die allgemeine Kompetenzen fördern sollen, lassen sich einschlägige heuristische Strategien begleitend thematisieren, aber auch Wissen zu mathematischen Argumentationen sowie Vorstellungen zum deduktiven Charakter mathematischer Theorien (s. den Beitrag von Ufer und Kramer, Kapitel 7 in diesem Band).

Auch wenn die Aufgabenstellung nicht in eine realistische Rahmensituation eingebettet ist, kann sie doch als authentisch in der Art des hier verlangten mathematischen Arbeitens angesehen werden: Aus vorhandenen und gegebenenfalls noch nicht optimalen Lösungsansätzen sollen Strukturen erkannt werden; diese Strukturen können wiederum zu neuen Einsichten führen, und diese Einsichten sollen möglichst schlüssig begründet werden. Neben der Diskussion von mathematischen Begründungen sowie von Lösungsalgorithmen und Verfahren gehören auch diese explorativen, „forschenden“ Anteile mathematischen Arbeitens zu wesentlichen Zielbereichen der Bildungsstandards. Diese Explorationsprozesse werden vor allem durch die Offenheit der Antwort ermöglicht, bei der es nicht um das Finden der „richtigen und endgültigen Lösung“ mit vollständiger Begründung geht.

Die Aufgabe setzt voraus, dass das Konzept der Ableitung an einer Stelle, der Fall $n = 2$ sowie das Konzept der Ableitungsfunktion bereits behandelt wurden. Dennoch werden die Lernenden im Verständnis dieser Konzepte sicherlich variieren. Einige werden im Wesentlichen den Fall $n = 2$ wiederholen und ggf. um den Fall $n = 3$ erweitern. Auch für Lernende, denen diese Ideen leicht zugänglich sind, bietet die Aufgabe jedoch Potential zur eigenständigen mathematischen Tätigkeit auf herausforderndem Niveau und ermöglicht so auch differenzierendes Arbeiten. Es werden zwar zunächst technische Fertigkeiten verlangt, den Kern der Aufgabe stellt aber das Erkennen von Strukturen und Mustern dar ebenso wie das Formulieren von Vermutungen.

3 Aufgaben im Unterricht – Potential nutzen

Zur Planung von Mathematikunterricht, der geeignet ist, über Faktenwissen und Regelanwendung hinausgehend mathematische Kompetenzen zu fördern, sind qualitativ hochwertige kompetenzorientierte Aufgaben nur ein erster Schritt. Diese Aufgaben im laufenden Unterricht lernwirksam umzusetzen, ist eine weitere Herausforderung für jede Lehrkraft. Prenzel und Baptist (2001) beschreiben dies mit dem Begriff der „neuen Aufgabenkultur“, die zum einen durch einen bildungsadäquaten und kompetenzorientierten inhaltlichen Bezug, zum anderen durch eine Konzentration auf eine qualitätsvolle Form der Bearbeitung charakterisiert ist. Kognitiv anspruchsvolle Aufgaben liefern oft eine breitere und umfangreichere Auswahl an Schülerantworten, aus denen die Lehrkraft gezielt auswählen muss, um ein lernförderliches Unterrichtsgespräch zu gestalten. Häufig kann dabei eine Reduktion des Aufgabenanspruchs (Stein & Lane, 1996; Bauersfeld, 1978) im Unterrichtsverlauf beobachtet werden, die dazu führt, dass das eigentlich vorhandene Potential nicht oder nicht vollständig genutzt wird. Ausgehend von einem Modell von Stein, Engle, Smith und Hughes (2008) sollen hier Möglichkeiten vorgestellt werden, wie die Nutzung des Potentials dieser Aufgabe im Unterrichtsgespräch vorbereitet und umgesetzt werden kann.

3.1 Antizipieren von Lösungen

Flexibles Handeln im Unterricht setzt voraus, dass die Lehrkraft verschiedene Lösungsstrategien, die Lernende zu einer Aufgabe potentiell entwickeln, herausfordern, einordnen und in ihrer Bedeutung für den gemeinsamen Lernprozess analysieren kann. Dies gilt nicht nur für völlig korrekte und vollständige Lösungen, sondern auch für mehr oder weniger tragfähige Lösungsansätze. Stein et al. (2008) regen an, sich im Vorhinein in die Rolle der Lernenden zu versetzen, deren Vorgehensweisen bei der Aufgabenbearbeitung bereits im Rahmen der Unterrichtsplanung möglichst vielfältig zu antizipieren und dabei zu analysieren, welche zentralen mathematischen Ideen und Konzepte darauf aufbauend diskutiert werden können. Unterschiedliche Herangehensweisen können unterschiedliches Potential für den weiteren Lernprozess haben: Für obige Aufgabe 3 können Lösungsansätze beispielsweise für die Anbindung eines an der Idee der vollständigen Induktion orientierten Arguments mehr (wenn die entsprechende Teilbarkeitsregel verwendet wird) oder weniger (wenn die Struktur der einzelnen ausmultiplizierten Terme analysiert wird) geeignet sein. Des Weiteren kann es für etwaige Fehlinterpretationen oder Hürden im Lösungsprozess hilfreich sein, minimale Hilfen vorzubereiten (s. Zech, 2002). Beispielsweise können inhaltliche Hilfen notwendig sein, wenn Basisfertigkeiten fehlerhaft ausgeführt werden oder wenn Vorwissen nicht oder fehlerhaft aktiviert wird (bei Aufgabe 3 z. B. bei dem korrekten Aufstellen des Differenzenquotienten bzw. dem Ausmultiplizieren). Es können strategische Hilfen gegeben werden, die ein produktives Weiterarbeiten mit der Aufgabenstellung ermöglichen (z. B. das Aufstellen einer Tabelle in Aufgabe 3). Letztlich können die Lernenden, gerade im Hinblick auf die Ziele von Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, dazu angeregt und wenn nötig darin unterstützt werden, ihren eigenen Lern- und Arbeitsprozess kontinuierlich zu evaluieren und neu auszurichten (z. B. durch das Setzen von Teilzielen, wie dem Berechnen der ersten drei Fälle in Aufgabe 3).

3.2 Beobachtung von Lösungsansätzen

Während der Erarbeitungsphase bietet sich die Möglichkeit, die mathematischen Lösungsansätze der Schülerinnen und Schüler zu beobachten. Erstes Ziel ist dabei, den selbstregulierten und möglichst eigenständigen Lösungs- bzw. Problemlöseprozess der Lernenden anzuregen, aufrecht zu erhalten und gegebenenfalls in neue, fruchtbare Richtungen zu lenken. Bei Problemen können oben genannte minimale Hilfen angeboten werden. Für die Planung des weiteren Unterrichtsverlaufs können die Lösungsansätze für eine spätere Präsentations- und Diskussionsphase bereits jetzt analysiert werden: Welche mathematische Idee tritt heraus, welche Arbeitsweise kann illustriert werden? Lassen sich typische Fehlvorstellungen oder Fehlkonzepte gewinnbringend diskutieren? Welche Probleme treten häufiger auf und sollten auf jeden Fall diskutiert werden? Lässt sich der Lösungsansatz einer oder eines Lernenden durch Ideen anderer ergänzen? Welche Aspekte der Aufgabe spiegeln sich in den Lösungsansätzen der Lernenden nicht wider und müssen von der Lehrkraft eingebracht werden?

3.3 Auswahl, Anordnung und Vernetzung von Lösungsansätzen

Für die weitere Arbeit können Schülerantworten in unterschiedlicher Reihenfolge zur Präsentation und Diskussion ausgewählt werden. Stein et al. (2008) schlagen hierfür verschiedene Möglichkeiten vor, die ein Erreichen des verfolgten mathematischen Ziels und eine mathematisch schlüssige Diskussion wahrscheinlicher werden lassen. Die sofortige Präsentation einer „optimalen" Lösung ist nicht immer die tragfähigste Herangehensweise, um zum nachhaltigen Aufbau von Kompetenzen und inhaltlichem Verständnis bei allen Lernenden beizutragen. Die zielgerichtete Diskussion fehlerhafter Lösungen bringt zwar pädagogische Herausforderungen mit sich, trotzdem bietet die Thematisierung häufiger Fehler bzw. verbreiteter Fehlvorstellungen großes Potential für den Lernprozess (Seidel et al., 2006). Sie stellt eine Möglichkeit dar, kognitive Konflikte zu erzeugen, eine Wachsamkeit gegenüber häufigen Fehlern zu entwickeln oder – im Sinne von Oser (2005) – auch Wissen darüber zu thematisieren, welche Ideen und Lösungsansätze falsch sind und warum. So könnte man beispielsweise zu Beginn die Lösungsstrategie besprechen, die von der Mehrheit der Klasse verwendet wurde, um die Diskussion für möglichst alle Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen. Bei Aufgabe 2 könnte das der Weg über die Berechnung der Normalenvektoren sein. Die Unterrichtssequenz könnte dann mit der Gegenüberstellung unterschiedlicher, nicht notwendigerweise fehlerfreier Strategien fortgesetzt werden. Der Vergleich der verschiedenen Herangehensweisen bietet den Lernenden die Möglichkeit, ein fundiertes inhaltliches Verständnis der mathematischen Ideen und Konzepte zu entwickeln. Aufgabe 2 hat durch die Verbindung der eher herkömmlichen Vorgehensweise mit anderen Lösungsmöglichkeiten Potential für neue Erkenntnisse und für eine Betrachtung der Aufgabe von einem anderen, mehr geometrischen, Blickwinkel, zum Beispiel in der Diskussion, was denn eigentlich der Schnittwinkel zweier Ebenen ist. Werden bei Aufgabe 3 unterschiedliche Vermutungen für den allgemeinen Zusammenhang generiert, können diese zunächst nebeneinander gestellt und anhand weiterer Beispiele diskutiert werden. Forschende und mehr oder weniger systematische, probierende Vorgehensweisen, die zu einer Vermutung führen, können beispielsweise gezielt eher konvergenten Ansätzen gegenübergestellt werden, die direkt auf das Etablieren einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit und das Einsetzen mathematischer Ideen und Konzepte abzielen. So kann die Unterschiedlichkeit der von den Lernenden gefundenen Lösungsmöglichkeiten genutzt werden, um weiterführende Lernprozesse anzuregen. Die Erkenntnis, dass eine mathematische Idee in zwei sich grundsätzlich unterscheidende Strategien eingebettet ist, kann zu einer umfassenderen Entwicklung mathematischen Verständnisses führen (Stein et al., 2008).

4 Schlussbemerkung

Eines der zentralen Ziele der Sekundarstufe II stellt die wissenschaftspropädeutische Bildung in Bezug auf die Mathematik und deren Anwendungswissenschaften dar (KMK, 2012, S. 9). Das macht es erforderlich, gezielt Kompetenzen mathematischen Arbeitens zu fördern, die über die Anwendung von Standardalgorithmen hinausgehen. Eine Orientierung an den vorgestellten Aufgabenmerkmalen kann die Auswahl von geeigneten Anforderungen erleichtern. Natürlich gehört zu einer erfolgreichen Aufgabenauswahl auch deren Umsetzung im Unterricht, wofür das Modell von Stein et al. (2008) Orientierungshilfe sein kann.

Literaturverzeichnis

Bauersfeld, H. (1978). Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht* (S. 158-170). Hannover: Schroedel.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. et al. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal, 47* (1), 133–180.

Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung: Eine empirische Untersuchung zu kognitiven Prozessen von Mathematiklehrern*. Basel: Beltz.

Bruder, R. (2000). Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In Flade, L. & Herget, W. (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS – Anregungen für die Sekundarstufen* (S. 69–78). Berlin: Volk und Wissen.

Bruder, R. (2006). *Erläuterungen zu Modul 1 - Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht*. Zugriff am 12.03.2015 unter http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/module/modul_1weiterentwicklung_der_aufgabenkultur.html

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Freudenthal, H. (1974). Die Stufen im Lernprozess und die heterogene Lerngruppe. *Neue Sammlung,* 14, 161–172.

Kiper, H., Schmit, S., Peters, S. & Schlump, S. (2010). Wie lassen sich Aufgaben aus Schulbüchern analysieren? – Ein Überblick. In H. Kiper, W. Meints, S. Peters, S. Schlump & S. Schmit, (Hrsg.), *Lernaufgaben und Lernmaterialien im kompetenzorientierten Unterricht* (S. 145–154). Stuttgart: Kohlhammer.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Zugriff am 31.08.2013 unter www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität: natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule*. Kiel: IPN.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Oser, F. & Spychiger, M. (2005). *Lernen ist schmerzhaft: Zur Theorie des negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur.* Weinheim: Beltz.

Prenzel, M. & Baptist, P. (2001). Das BLK-Modellversuchsprogramm „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. In Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.), *TIMSS–Impulse für Schule und Unterricht* (S. 59–73). Bonn: BMBF.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99* (3), 561–574.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Grouws, D. (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334–370). New York: Macmillan.

Schukajlow, S. & Krug, A. (2013). Considering multiple solutions for modelling problems – design and first results from the MultiMa-Project. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. Brown (Hrsg.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (S. 207–216). Heidelberg: Springer.

Seidel, T., Prenzel, M., Rimmele, R., Dalehefte, I. M., Herweg, C., Kobarg, M. & Schwindt, K. (2006). Blicke auf den Physikunterricht. Ergebnisse der IPN Videostudie. *Zeitschrift für Pädagogik, 52* (6), 799–821.

Seidel, T. & Shavelson, R. J. (2007). Teaching Effectiveness Research in the Past Decade: The Role of Theory and Research Design in Disentangling Meta-Analysis Results. *Review of Educational Research, 77* (4), 454–499.

Stein, M. & Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation, 2* (1), 50–80.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10* (4), 313–340.

Ufer, S., Heinze, A. & Lipowsky, F. (2015). *Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien*. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), Handbuch zur Mathematikdidaktik. Heidelberg: Springer.

Winter, H. (2003): „Gute Aufgaben" für das Sachrechnen. In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch* (S. 177-183). Seelze: Kallmeyer Verlag.

Wittmann, E. & Müller, G. (2006). *Das Zahlenbuch 1. Lehrerband*. Leipzig: Klett.

Zech, F. (2002). Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik (10. Aufl.). Weinheim: Beltz.

14. Abituraufgaben im Sinne der Bildungsstandards

Gaby Heintz, Christina Drüke-Noe und Gilbert Greefrath

Ausgehend von einer Einordnung von Abiturprüfungsaufgaben sowie dem Status Quo zentraler schriftlicher Prüfungen zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife werden Entwicklungsmöglichkeiten für Aufgaben in schriftlichen sowie in mündlichen Abiturprüfungen aufgezeigt. Neben normativen Überlegungen werden besonders die Vernetzung der Sachgebiete entlang der Leitideen und die Prüfung prozessbezogener Kompetenzen am Beispiel des Modellierens diskutiert und der Mehrwert digitaler Werkzeuge sowie Möglichkeiten für Prüfungsteils mit bzw. ohne Hilfsmittel aufgezeigt. Eine Zusammenstellung möglicher Qualitätsmerkmale von Abiturprüfungsaufgaben rundet die Betrachtungen ab.

1 Einführung und Grundlegung

Neben den Vorgaben der Bildungsstandards und den Richtlinien der Bundesländer bestimmen die Regelungen für die Abiturprüfung, veröffentlichte Beispielaufgaben sowie die Prüfungsaufgaben der Vorjahre stark die Auswahl der Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Qualifikationsphase (u. a. Maag Merki, Klieme & Holmeier, 2008). *Teaching to the Test* kann daher leicht den Unterricht vor einer Abschlussprüfung bestimmen, was nicht überrascht, da die in der schriftlichen Prüfung erzielte Note zu einem entscheidenden Anteil in die Abiturnote eingeht.

Im Unterricht vor der eigentlichen Prüfungsphase sind sowohl Lern- als auch Leistungsaufgaben Gegenstand; dabei sind beide Aufgabenformate nicht ganz trennscharf (zur Unterscheidung s. Büchter & Leuders, 2005, S. 166). Anders als *Lernaufgaben,* die die Aufnahme und Verarbeitung neuer Informationen sowie den Erwerb eines gut verstandenen, flexibel nutzbaren Wissens ermöglichen, sind *Leistungsaufgaben* zur Überprüfung des Gelernten sowie zur Selbstevaluation der Lernenden konzipiert und müssen daher noch deutlicher als eine Lernaufgabe die an ihre Lösung gestellten Erwartungen erkennen lassen. Trotz unterschiedlicher Ziele sollen beide Arten von Aufgaben jedoch auf den in den Bildungsstandards festgelegten und den im Unterricht vermittelten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen basieren (vgl. auch KMK, 2012, S. 5).

Leistung ist in der Regel ein Ergebnis vorausgehenden Lernens. Leisten und Lernen unterliegen dabei unterschiedlichen psychologischen Gesetzmäßigkeiten (Dweck, 1996). So sind in Leistungssituationen die Anforderungen üblicherweise extern gesetzt, inhaltlich stark vorbestimmt und im Vorhinein weitgehend einheitlich für die gesamte Lerngruppe festgelegt. Bei der Bewältigung gestellter Anforderungen versuchen Lernende Fehler zu vermeiden. Lernen kann in solchen Leistungssituationen nur sehr begrenzt stattfinden. In Lernsituationen hingegen können Schülerinnen und Schüler die Auswahl von Aufgaben ggf. sogar selbst bestimmen oder zumindest in deren Auswahl einbezogen werden, eigene Lösungen entwickeln oder auch zur Bearbeitung eigene Entscheidungen treffen. Damit folgt man einer konstruktivistischen Auffassung von Lernen, die davon ausgeht, dass Wissen individuell aufgebaut wird und eigene Vorstellungen vom Lernen dabei entscheidend sind (Heintz, 2003; Reich, 2000; Werning, 1998). Die Anforderungen entwickeln sich in der Lerngruppe auch im Lernprozess selbst, sie können differenziert, individualisiert und z. B. auf Diagnose ausgerichtet sein (Weinert, 2000, S. 14). Lernprozesse sind auf den Zuwachs von Wissen und Fähigkeiten ausgerichtet. Fehler sind ein wichtiger Teil solcher Lernprozesse und ein konstruktives Umgehen mit ihnen ist wünschenswert; in Prüfungssituationen sind Fehler dagegen unerwünscht.

2 Abiturprüfungen im Kontext der Leistungsüberprüfungen in der Sekundarstufe II

Abiturprüfungen werden in schriftlicher wie auch in mündlicher Form durchgeführt. Auch zur Vorbereitung von schriftlichen Prüfungen schreiben Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik während der Qualifikationsphase etwa acht Klausuren. Den Abschluss dieser schriftlichen Leistungsüberprüfungen bildet in vielen Fällen die Abiturklausur. Diese deckt, je nach Ländervorgaben, neben der Analysis mindestens eines der Sachgebiete analytische Geometrie/lineare Algebra und Stochastik ab, die jeweils auch inhaltliche Grundlage der Qualifikationsphase sind. Mithilfe einer Klausur, die oftmals analog zur Abiturklausur konzipiert ist und wie diese Aufgaben verschiedener Sachgebiete enthält, können die Schülerinnen und Schüler auf die Abiturklausur vorbereitet werden. Auch Prüfungsaufgaben der Vorjahre oder modifizierte Abiturprüfungsaufgaben aus Aufgabensammlungen dienen häufig als Vorlage. Diese Art der Vorbereitung hat zum Ziel, den Anspruch zentral gestellter Prüfungen mit dem einer einzelnen Lehrkraft abzustimmen und so eine Lerngruppe gezielter auf eine zentrale Abiturprüfung vorzubereiten.

Parallel zur Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung finden die Vorbereitungen der Lerngruppe auf eventuelle mündliche Prüfungen im Fach Mathematik statt. Hierzu werden im Unterricht vielfach Präsentationsübungen durchgeführt, in deren Fokus vor allem die Kompetenzen mathematisch Argumentieren und mathematisch Kommunizieren stehen (Drüke-Noe & Jahnke, 2007). Zur Bearbeitung der Fragestellung einer mündlichen Abiturprüfung kommt das bei dieser Prüfungsform wesentliche fachliche Gespräch hinzu, in dem Prüflinge spontan auf Fragen reagieren und ausgehend von der Fragestellung angesprochene Inhalte möglichst selbstständig vernetzen sollen. Aufgabenformate aus schriftlichen Prüfungen sind für solche Gesprächssituationen weniger geeignet, auch, da der rechnerische Anteil einer Aufgabenbearbeitung gegenüber dem Begründungsanteil deutlich zurückgestellt werden soll (vgl. KMK, 2012, S. 29, S. 31). Im Folgenden ist ein Auszug aus einer solchen Aufgabe gezeigt (vgl. Aufgabe 1). Der in diesem Fall aus dem Unterricht bekannte Kontext legt notwendige Erläuterungen und Argumentationen nahe. Berechnungen und Kalküle spielen hier eine vergleichsweise untergeordnete Rolle und der Fokus liegt darauf „wesentliche Gedankengänge zu erläutern“ (S. 30). Im Beispiel ist ein grafikfähiger Taschenrechner als Hilfsmittel zugelassen.

Die Wirkung einer ansteckenden Krankheit wurde mathematisch modelliert. Die Funktion f mit $f(t) = 4t \cdot e^{-0,5t}$ $(t \geq 0)$ soll als ein sinnvolles mathematisches Modell für die Anzahl der neu erkrankten Personen in der Bevölkerung eines Landes verwendet werden.
Betrachten Sie den entsprechenden Graphen von f. Auf der horizontalen Achse soll die Zeit in Wochen angegeben werden und auf der vertikalen Achse die Anzahl der neu erkrankten Personen in Tausend.

a) Beschreiben Sie ohne Rechnung und mit Bezug zum Graphen die Ausbreitung der Krankheit. Gehen Sie auch auf die langfristige Entwicklung ein.
b) Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes von f im Sachzusammenhang und beschreiben Sie ohne Rechnung, wie man den Wendepunkt bestimmen kann.
c) Erläutern Sie auch mit Bezug zum Graphen, wie die Gesamtzahl aller Erkrankten während der ersten 10 Wochen der Epidemie näherungsweise ermittelt werden kann.

Aufgabe 1: Auszug aus einer mündlichen Abiturprüfungsaufgabe eines nordrhein-westfälischen Gymnasiums

Im Weiteren werden mögliche Perspektiven für die Gestaltung schriftlicher und mündlicher Abiturprüfungsaufgaben diskutiert.

3 Aufgaben schriftlicher Abiturprüfungen

3.1 Status Quo und normative Überlegungen

Einzelne, bereits ältere bundeslandspezifische Fallstudien untersuchen Aufgaben aus Abiturprüfungen (z. B. Althoff, 1993; von Pape, 1993; Bauer, 1978). Allerdings fehlen bislang umfassende empirische Untersuchungen zu Merkmalen von Aufgaben schriftlicher Abiturprüfungen. Dies überrascht nicht zuletzt deshalb, weil seit 2006 nahezu alle Bundesländer zentrale schriftliche Prüfungen zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife durchführen (vgl. Überblick in Kühn, 2010).

Da umfassende empirische Untersuchungen zu Merkmalen der Aufgaben in Abiturprüfungen fehlen, wird eine Diskussion wünschenswerter Merkmale von Abiturprüfungsaufgaben hier aus einer normativen Perspektive geführt. Grundlage dieser Diskussion sind die drei Dimensionen der Bildungsstandards und daher insbesondere eine ausgewogene Berücksichtigung der inhalts- und der prozessbezogenen Kompetenzen, so, wie es in den fachspezifischen Hinweisen der Bildungsstandards formuliert ist (vgl. KMK, 2012, S. 30). Diese Diskussion greift auch eine Umsetzung der breit akzeptierten drei Winter'schen Grunderfahrungen – kurz: Struktur-, Anwendungs- und Problemorientierung – auf, die nicht nur Grundlage aller Bildungsstandards für das Fach Mathematik sind, sondern die auch Eingang in zahlreiche bundeslandspezifische curriculare Ausführungen sowie schulrechtliche Vorgaben gefunden haben. Nun sollen Schülerinnen und Schüler diese drei Grunderfahrungen im Unterricht und somit im Rahmen der Bearbeitung von Lernaufgaben machen. Folgt man der Argumentation von z. B. Sacher (2000) oder Ingenkamp und Lissmann (2008), dass Aufgaben in Klassenarbeiten und Klausuren nicht zuletzt aus Gründen der unterrichtlichen Validität ein Abbild der im Unterricht verwendeten Aufgaben sein sollen, so lässt sich diese Forderung auch auf Abiturprüfungsaufgaben übertragen. Mit einem im Sinne der

Winter'schen Grunderfahrungen ausgewogenen Spektrum von Unterrichtsaufgaben muss der Unterricht die sechs prozessbezogenen Kompetenzen angemessen fördern. Finden diese hinreichende Berücksichtigung im Unterricht, können und sollten sie auch Gegenstand in Klausuraufgaben (vgl. hierzu auch den Beitrag von Drüke-Noe, Kapitel 11 in diesem Band) und damit auch in Abiturprüfungsaufgaben sein.

Weitere normative Überlegungen zur Erstellung von Abiturprüfungsaufgaben betreffen eine angemessene Berücksichtigung der drei Anforderungsbereiche. Diese soll gewährleisten, dass in Kursen des *grundlegenden* und des *erhöhten Niveaus* hinreichend viele reflektierende und verallgemeinernde Aktivitäten Berücksichtigung finden, wobei sich diese Anteile je nach Kursniveau unterscheiden können (vgl. KMK, 2012, S. 27f). Es ist daher noch differenzierter zu überlegen, inwiefern Lösungsprozesse bei der Aufgabenbearbeitung mehrschrittig sind und/oder strategiegestützt ablaufen und ob sie nicht allein mit Standardaktivitäten auskommen, wie es etwa in Klassenarbeitsaufgaben der späten Sekundarstufe I meist der Fall ist (Drüke-Noe, 2014). So können beispielsweise explizite Darstellungswechsel, u. a. zwischen Graph, Term und Tabelle, integriert werden, sowie Aufforderungen, eigene Überlegungen darzulegen oder Erkenntnisse anderer zu bewerten, das Aufgabenspektrum erweitern. Schließlich gilt es abzuwägen, welchen Anteil der Aufgabenbearbeitung komplexe sowie reflektierende Aktivitäten ausmachen können, wenn etwa Argumentationen oder Modellierungen anderer zu bewerten sind.

3.2 Inhaltliche Vernetzung der Sachgebiete und die Berücksichtigung verschiedener Leitideen

Die Forderung nach einer horizontalen und vertikalen Vernetzung verschiedener Inhalte wird schon in den Bildungsstandards für die Sekundarstufe I formuliert. Diese Forderung setzt sich in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife fort, zumal mit zunehmender curricularer Progression Schülerinnen und Schülern immer mehr Inhalte und Verfahren zur Verfügung stehen, die sie flexibel bei Problemlösungen anwenden können und sollen. Der Gedanke der Vernetzung ist auch konzeptuell in den fünf Leitideen der Bildungsstandards verankert, die die traditionell eher deutliche Trennung der Sachgebiete Analysis, lineare Algebra/analytische Geometrie und Stochastik teilweise überwinden und mögliche Vernetzungen zwischen diesen aufzeigen sollen (vgl. auch den Beitrag von Blum, Kapitel 1 in diesem Band). Diese Vernetzung wird schließlich auf der Ebene einzelner Aufgaben konkret, kann und sollte damit auch in Prüfungssituationen realisiert werden und ist Gegenstand der fachspezifischen Hinweise der Bildungsstandards zur Gestaltung einer Prüfungsaufgabe (vgl. KMK, 2012, S. 30).

Besonders gut eignen sich zur Vernetzung Modellierungsaufgaben, die auf unterschiedliche Weisen gelöst werden können, wie nachfolgend exemplarisch anhand der Heißluftballonaufgabe (vgl. Herget, Jahnke & Kroll, 2001, S. 32; Herget, Jahnke & Kroll, 2011, S. 63; Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013, S. 14f) für die Leitideen Messen und funktionaler Zusammenhang skizziert ist. In dieser Aufgabe soll das Volumen eines Heißluftballons mit Bezug zu einer gegebenen Vergleichsgröße – hier: die Größe eines Mannes – annähernd bestimmt werden. Eine solche Modellierung kann bereits in der Sekundarstufe I erfolgen, indem die Hülle des Ballons durch verschiedene geometrische Körper (u. a. Halbkugel, Kegel) angenähert beschrieben wird. In der Sekundarstufe II stehen zur Volumenbestimmung weitere Ansätze zur Verfügung. So lässt sich die Hüllkurve durch verschiedene Funktionenklassen, im einfachsten Fall ganzrationale Funktionen, modellieren und das Volumen bei der Rotation des Graphen der gewählten Funktion um die Abszissenachse ermitteln. Dabei müsste jedoch hinterfragt werden, ob dieses Vorgehen tatsächlich Vorteile gegenüber der Verwendung geometrischer Körper hat. Sicherlich besteht im Unterricht eher als in Prüfungen die Gelegenheit, *verschiedene* solche Modellierungen in Gänze auszuführen und dann schließlich deren Ergebnisse vergleichend zu bewerten; hieran zeigt sich ein weiterer Unterschied zwischen einer Lern- und einer Leistungsaufgabe (s. Abschnitt 1). Dennoch sind auch in einer Abiturprüfung zumindest Teilaktivitäten solcher Modellierungen durchführbar; beispielsweise könnten mehrere solche Modellierungen gegeben sein, die dann mit Blick auf ihre Angemessenheit – bezogen auf den Sachkontext und die mathematischen Methoden – zu bewerten sind.

Die Frage, inwiefern schriftliche Abiturprüfungsaufgaben den Unterricht bzw. das gesamte Kompetenzspektrum eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts tatsächlich direkt abbilden können, kann kontrovers diskutiert werden. Während im Unterricht echte Modellierungsaufgaben durchaus Gegenstand sind, dürfte dies in Prüfungen kaum der Fall sein. Wegen der oben beschriebenen Rahmenbedingungen ist es insbesondere schwierig, authentische Anwendungen in Prüfungsaufgaben zu verwenden, da Aufgaben für eine schriftliche Prüfung in der Regel kleinschrittiger aufgebaut sind und konkretere Anforderungen beinhalten, als dies bei Aufgaben in Lernsituationen notwendig wäre. Zudem ist experimentelles Arbeiten aufgrund der Prüfungssituation häufig nicht möglich. Will man außerdem verhindern, dass bloße Einkleidungen statt echter Anwendungen vorkommen, führt dies in der Praxis zu einer stärkeren Trennung von Kalkülen und Modellierungen in Prüfungsaufgaben (Greefrath, Leuders & Pallack, 2008). Eine Möglichkeit, mit dieser Problematik umzugehen, kann darin bestehen, bestimmte Informationen zu festgelegten Kontexten vor der Prüfung im Unterricht zu bearbeiten, um diese Kontexte in der Prüfung intensiver bearbeiten zu können.

Es gibt Versuche, offene und realitätsbezogene Prüfungsszenarien zu entwickeln und zu erproben. In der Schweiz wurde für das Ende der Sekundarstufe I ein Konzept für offene Testaufgaben entwickelt (Matter, 2007). Dabei zeigten die Schülerinnen und Schüler eine große Bearbeitungsvielfalt, und sie fanden die Aufgaben interessant und arbeiteten sehr intensiv. Der Korrekturaufwand war allerdings erheblich. Die Verwendung offenerer Aufgaben könnte zudem die Objektivität und die Reliabilität der Prüfung verringern, da die unsystematischen Einflüsse durch die unterschiedliche Korrektur solcher Aufgaben groß sein können (Büchter & Leuders, 2005, S. 186f.). Hier ist die Gestaltung des Erwartungshorizonts entscheidend, der bei einer solchen Aufgabe z. B. folgende Aspekte enthalten kann: Darlegung getroffener Modellannahmen, begründete Auswahl einer Funktionenklasse als Modell, Interpretation des mathematischen Ergebnisses, Beurteilung und Reflexion der Modellierung bzw. Lösung auf der Grundlage getroffener Annahmen.

Auch herkömmliche Abiturprüfungsaufgaben könnten mit neuen (oder in Vergessenheit geratenen) Aufgabenformaten Akzente setzen. So bietet etwa ein mathematischer Aufsatz die Möglichkeit, eigene Schwerpunkte zu setzen und ein Themengebiet unterschiedlich intensiv und individuell strukturiert darzustellen (s. Greefrath et al., 2008). Auch leistet ein solches Aufgabenformat einen expliziten Beitrag zur Umsetzung des produktiven Teils der Kompetenz mathematisch Kommunizieren. Zudem kann die Dokumentation des Lernprozesses bei der Bewertung eine Rolle spielen. Aufgabe 2 zeigt ein mögliches Aufgabenbeispiel.

Erläutern Sie in einem Text (15–20 Zeilen) Extrempunkte von Funktionsgraphen: Gehen Sie auf unterschiedliche Arten von Extrempunkten und mögliche Nachweismethoden ein. Beschreiben Sie den Nutzen der Kenntnis von Extrema beim Arbeiten mit Funktionen.

Aufgabe 2: Aufgabenbeispiel zu einem mathematischen Aufsatz

Schließlich ist es denkbar, Aufgaben mit experimentellen Anteilen, die eine immer größere Rolle im Mathematikunterricht spielen, stärker in Abiturprüfungen aufzunehmen. In einer Abiturprüfung könnte man beispielsweise Zufallsexperimente als Realexperimente oder Videos präsentieren und diese von den Schülerinnen und Schülern beschreiben und auswerten lassen.

4 Mündliche Prüfungsformen

Kolloquiumsprüfungen, Gruppenprüfungen, Präsentationen und besondere Lernleistungen können bestehende Prüfungsformen mündlicher Abiturprüfungen erweitern und von einer punktuellen Leistungsüberprüfung hin zu einer eher prozessbegleitenden Leistungsüberprüfung führen. So können Schülerinnen und Schüler in Kolloquiumsprüfungen darüber berichten, wie sie ihre Arbeit angelegt haben und welche fachlichen Inhalte damit angesprochen werden. Diese Form wird teilweise bei der Erstellung von Facharbeiten erprobt. Ähnlich wie bei Portfolioprüfungen können hier die Schülerinnen und Schüler Inhalt und Form der Prüfung mitbestimmen, sodass diese weniger Überraschungselemente aufweist als dies sonst möglicherweise in einer mündlichen Abiturprüfung der Fall ist. Die Ausgestaltung der Präsentation wird als selbstständige Leistung mitbewertet. Damit verliert auch diese den Charakter einer punktuellen Prüfung und kann zu einem langfristig angelegten, von den Schülerinnen und Schülern selbst- bzw. mitgestalteten Lern- und Leistungsprozess werden. Anregungen für Prüfungsthemen finden sich z. B. in Mahlke (2007).

5 Die Rolle digitaler Werkzeuge in Prüfungen

5.1 Akzeptanz digitaler Werkzeuge

Die Akzeptanz von Prüfungsaufgaben mit digitalem Werkzeugeinsatz variiert sowohl bei den Lehrkräften als auch in den Bildungsadministrationen. Für die im Einsatz digitaler Werkzeuge erfahrenen Lehrkräfte ist die Akzeptanz in Prüfungen sehr hoch, wie beispielsweise die Ergebnisse eines bayrischen Modellversuchs zeigen (Bichler, 2007). Untersucht wurden dort 26 Klassen, die mit Taschencomputern arbeiteten. 90 % dieser Lehrkräfte waren der Meinung, dass Taschencomputer auch unbedingt in Prüfungen zur Verfügung stehen sollten. Dabei stellt sich die Frage, ob die digitalen Werkzeuge die gesamte Prüfung über zur Verfügung stehen sollen und ob es einen hilfsmittelfreien Prüfungsteil geben soll. Unklar ist noch, wie dieser hilfsmittelfreie Prüfungsteil gestaltet werden soll. Von den Lehrkräften im Modellversuch waren etwa zwei Drittel der Meinung, dass händische Grundfertigkeiten durch geschickte Aufgabenstellungen auch mit digitalen Werkzeugen überprüft werden können (vgl. hierzu auch den Beitrag von Bruder, Feldt-Caesar, Pallack, Pinkernell und Wynands, Kapitel 9 in diesem Band). In der Praxis haben die gleichen Lehrkräfte aber nur etwa zu einem Drittel die digitalen Werkzeuge in den gesamten Prüfungen zugelassen.

5.2 Digitale Werkzeuge in Prüfungsaufgaben

Viele Algorithmen (z. B. für das Lösen von Gleichungen) können von digitalen Werkzeugen ausgeführt werden. Daher verändern sich Prüfungsinhalte bei einem uneingeschränkten Einsatz digitaler Werkzeuge. Mit Blick auf Modellierungsaufgaben bedeutet dies beispielsweise, in Prüfungen mehr Gewicht auf Aufgaben zum Vereinfachen, Mathematisieren, Interpretieren und Validieren zu legen (vgl. auch den Beitrag von Barzel und Greefrath, Kapitel 12 in diesem Band).

Alle Beteiligten brauchen klare Vorgaben, welche Funktionalitäten der eingesetzten digitalen Werkzeuge verwendet werden dürfen bzw. sollen und über welche Fähigkeiten die Werkzeuge überhaupt verfügen sollten. Dies könnte in die Richtung gehen, die z. B. das Land Niedersachsen im Kerncurriculum Mathematik bereits beschritten hat (Greefrath, Elschenbroich & Bruder, 2010). Das hier gezeigte Beispiel (Abbildung 1) verdeutlicht, wie dort die Verwendung digitaler Werkzeuge (Technologieeinsatz) explizit im Zusammenhang mit konkreten inhaltsbezogenen Kompetenzen genannt wird.

> Die Schülerinnen und Schüler (…) führen eine Parametervariation für Potenz- und Exponentialfunktionen in der Form $y = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ an Beispielen unter Verwendung der eingeführten Technologie durch und beschreiben und begründen die Auswirkung auf den Graphen.

Abbildung 1: Kompetenzbeschreibung zum Technologieeinsatz (Niedersächsisches Kultusministerium, 2009, S. 13)

Dieser Ansatz ist im Prinzip eine Weiterführung der Ideen von Herget, Heugl, Kutzler und Lehmann (2001). So, wie man beim sinnvollen Taschenrechnereinsatz in der Sekundarstufe I beispielsweise Kopfrechnen, Schätzen und Überschlagen regelmäßig fordern und fördern sollte, so sollte man auch in der Sekundarstufe II festlegen, welche Fertigkeiten rechnerfrei beherrscht werden sollen. Einige Bundesländer sind konsequenterweise im Abitur dazu übergegangen, in einem rechnerfreien Teil der schriftlichen Prüfung mathematische Grundfertigkeiten abzufragen. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist die folgende Aufgabe 3 (Quelle: Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka, September 2012):

> Die Graphen der Funktionen f und g besitzen an der Stelle $x = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ eine gemeinsame Tangente. Beschreiben Sie eine Möglichkeit zum Nachweis dieser Eigenschaft.
>
> **Aufgabe 3: Aufgabenbeispiel aus einem rechnerfreien Prüfungsteil**

Des Weiteren ist zu diskutieren, ob es zur Überprüfung mathematischer Kompetenzen, die im Unterricht *mit* digitalen Werkzeugen erworben wurden, in der Prüfungssituation dieser Werkzeuge unbedingt bedarf. In der schriftlichen Prüfung kann in der Regel – allein aus Zeitgründen – kein Lernprozess mehr stattfinden (Greefrath et al., 2008). Es geht vielmehr darum, durch Standards geforderte Kompetenzen zu überprüfen. Dabei sollten Bedienungskompetenzen nicht explizit geprüft werden, denn diese dienen letztlich dem Erwerb fachbezogener mathematischer Kompetenzen und sollten nicht als Selbstzweck gesehen werden (s. Heintz, Elschenbroich, Laakmann, Langlotz, Schacht & Schmidt, 2014, S. 301).

6 Qualitätsmerkmale von Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben schriftlicher Abiturprüfungen werden in nahezu allen Bundesländern zentral gestellt und unterliegen daher deutlich stärker äußeren Rahmenbedingungen als die von den unterrichtenden Lehrkräften selbst konzipierten. Im Folgenden sind als Konsequenz obiger Überlegungen ausgewählte Qualitätsmerkmale aus unserer Sicht zusammengestellt (ohne Anspruch auf Vollständigkeit oder Rangfolge), die Hinweise für die Zusammenstellung einer Prüfungsaufgabe (d.h. eines ganzen Sets schriftlicher Abituraufgaben, die den Schülerinnen und Schülern vorgelegt werden) geben können. Eine Prüfungsaufgabe, die Schülerinnen und Schüler in der Abiturprüfung bearbeiten, sollte …

- … die in den Bildungsstandards ausgewiesenen Anforderungs- und Inhaltsbereiche in ausgewogener Weise abdecken,
- … inner- und außermathematische Kontexte berücksichtigen und ausloten,
- … struktur-, anwendungs- und problemorientiert sein und ein ausgewogenes Spektrum prozessbezogener Kompetenzen aufweisen,
- … mit Texten und Sprache sinnvoll umgehen,
- … digitale Werkzeuge sinnvoll nutzen,
- … verschiedene Leitideen abdecken und Sachgebiete vernetzen.

Anregungen für Prüfungsaufgaben können zudem einer Aufgabensammlung entnommen werden, die unter Federführung des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen erarbeitet wurde (einsehbar unter https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik).

7 Fazit

So wie guter Unterricht vielfältige Lerngelegenheiten bietet sowie einen nachhaltigen und umfassenden Kompetenzerwerb ermöglicht, so sollte auch die gesamte Prüfungsaufgabe in der Abiturprüfung vielfältige und umfassende inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen ansprechen. Im Zuge eines gemäß den Bildungsstandards kompetenzorientierten Mathematikunterrichts, der dargelegten Möglichkeiten und neuen Anforderungen erscheint eine Erweiterung der Prüfungsformate sinnvoll und machbar.

Literaturverzeichnis

Althoff, H. & Koller, D. (1992). *Mündliches Abitur.* Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Bauer, L. (1978). *Mathematische Fähigkeiten. Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben.* Paderborn: Schöningh.

Bichler, E. (2007). Computer und Prüfungen – geht cas auch? Erfahrungen aus dem bayrischen Modellversuch. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 98–101). Hildesheim: Franzbecker.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Drüke-Noe, C. & Jahnke, T. (2007). Präsentieren im Mathematikunterricht. *mathematik lehren, 143,* 4–9.

Drüke-Noe, C. (2014). *Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik. Empirische Untersuchungen in neunten und zehnten Klassen.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Greefrath, G., Elschenbroich, H.-J. & Bruder, R. (2010). Empfehlungen für zentrale Prüfungen in Mathematik – Betrachtet aus der Perspektive der Schnittstelle Schule–Hochschule. *MNU, 63* (3), 172–176.

Greefrath, G., Leuders, T. & Pallack, A. (2008). Gute Abituraufgaben – (ob) mit oder ohne Neue Medien. *MNU, 61* (2), 79–83.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (S. 11–37). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Heintz, G. (2003). Selbständiges Lernen in einer medialen Lernumgebung. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik Didaktik.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Schacht, F. & Schmidt, R. (2014). *Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht.* MNU, 67 (5), 300–306.

Herget, W., Jahnke, T. & Kroll, W. (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen Verlag.

Herget, W., Jahnke, T. & Kroll, W. (2011). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II.* Berlin: Cornelsen Verlag.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B. & Lehmann, E. (2001). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *MNU, 54* (8), 458–464.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008). *Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik* (6 Aufl.). Weinheim: Beltz Verlag.

Kühn, S. M. (2010). *Steuerung und Innovation durch Abschlussprüfungen?.* Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012. Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf.

Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt LISA (Hrsg.). (2007). *Schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik. Kompetenzentwicklung und Aufgabenkultur.* Hildesheim: Franzbecker.

Maag Merki, K., Klieme, E. & Holmeier, M. (2008). Unterrichtsgestaltung unter den Bedingungen zentraler Abiturprüfungen. Differenzielle Analysen auf Schulebene mittels Latent Class Analysen. *Zeitschrift für Pädagogik, 54* (6), 791–808.

Mahlke, N. (2007). Gut geplant ist halb gewonnen. Präsentationskompetenz bis zum Abitur aufbauen. *mathematik lehren, 143,* 46–49.

Matter, U. (2007). Offene Aufgaben in Tests? Ja bitte! *Praxis der Mathematik, 18,* 38–41.

Niedersächsisches Kultusministerium (2009). *Kerncurriculum für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe, die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe, das Fachgymnasium, das Abendgymnasium, das Kolleg, Mathematik, Niedersachsen.* Hannover: Unidruck.

von Pape, B. (1993). Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik in Niedersachsen. *Der Mathematikunterricht, 1,* 67–76.

Sacher, W. (2000). Tests und Klausuren in der Schule – Wie mache ich das? In S.-I. Beutel & W. Vollstädt (Hrsg.), *Leistung ermitteln und bewerten* (S. 63–74). Hamburg: Bergmann + Helbig Verlag.

Weinert, F. E. (2000). *Lehren und Lernen für die Zukunft – Ansprüche an das Lernen in der Schule. Manuskript zu einem Vortrag am 29.03.2000 in Bad Kreuznach* (Sonderdruck). Bad Kreuznach: PZ.

15. Kompetenzen sichtbar machen durch diagnostische Aufgaben

Timo Leuders

Das Verstehen von Schülerleistungen und Schülerkompetenzen ist die Voraussetzung für das flexible Reagieren im Unterricht und für die Gestaltung individueller Fördermaßnahmen. Dieses Verstehen mit dem Ziel des pädagogischen Handelns wird auch als (informelle) Diagnose bezeichnet. Der Beitrag zeigt auf, in welcher Weise das Lehren und Lernen in der gymnasialen Oberstufe durch diagnostische Aufgaben, Gespräche und Fördermaßnahmen diagnostisch begleitet werden kann. Ein besonderer Schwerpunkt wird dabei darauf gelegt, wie man zu einzelnen Kompetenzen der Bildungsstandards verstehensorientierte Aufgaben mit diagnostischem Potenzial erstellen kann.

1 Was ist Diagnose im Mathematikunterricht?

Wer im Unterricht erfolgreiche Lernprozesse gestalten will, ist gut beraten, wenn er den Lernstand, das Verständnis und die Schwierigkeiten seiner Schülerinnen und Schüler *gründlich versteht* und dies bei seinen didaktischen *Entscheidungen* berücksichtigen kann. Genau das meint man, wenn man von „pädagogischer Diagnose" spricht. Der griechische Stamm des Wortes Diagnose trägt beide Aspekte in sich: Wörtlich bedeutet „dia-gnosis" das „gründliche Verstehen", verwendet wird es im Altgriechischen auch im Sinne von „Beurteilung" und „Entscheidung".

Diagnostisch orientierter Unterricht ist also ein Unterricht, in dem man nicht „gleiches Lernen" für alle anbietet, sondern in dem man sich an den individuellen Wissensständen und Lernprozessen der Lernenden orientiert. Wenn man im pädagogischen Kontext von Diagnose spricht, meint man das Folgende (Ingenkamp, 1997; Hußmann, Leuders & Prediger, 2007):

> *(Pädagogische) Diagnose ist das Erheben von Information über Lernvoraussetzungen, Lernprozesse und Lernergebnisse bei einzelnen Lernenden und den in einer Gruppe Lernenden, um individuelles Lernen zu optimieren.*

Wie aber kommt man zu geeigneten diagnostischen Informationen? Für gewisse mathematische Grundfähigkeiten gibt es normierte Schulleistungstests, vor allem für die unteren Schuljahre. Das sind Sammlungen von Testaufgaben, die an Tausenden Schülerinnen und Schülern erprobt wurden und die in der Regel als Ergebnis eines schriftlichen oder im Gespräch durchgeführten Tests Leistungskennwerte ergeben. Ähnlich wie bei einem IQ-Test kann man nach der Testung sagen, wo sich eine einzelne Schülerin oder ein einzelner Schüler in der Gesamtpopulation einordnet und ob es gegebenenfalls kompensierenden Handlungsbedarf gibt.

In den letzten beiden Jahrzehnten wurden für verschiedene Jahrgangsstufen in Grundschule und Sekundarstufe I Tests (wie z. B. die Vergleichsarbeiten VERA) entwickelt, die den für internationale Leistungsvergleichsstudien wie TIMSS oder PISA entwickelten Tests ähneln. Auch hier erhält man Testwerte, allerdings nicht für *einzelne* Schülerinnen und Schüler – dazu sind die Verfahren zu ungenau und die Wissensbereiche zu breit und zu komplex – sondern bestenfalls Mittelwerte für Klassen. Auf dieser Basis kann man also keine soliden Entscheidungen über individuelle Förderbedarfe treffen, wohl aber über mögliche Veränderungen des Unterrichts für eine ganze Klasse.

Neben formalen diagnostischen Testinstrumenten gibt es aber auch eine ganze Reihe von Situationen, die man unter der Bezeichnung *informelle Diagnose* zusammenfassen kann (Ingenkamp, 2007; Moser-Opitz & Nührenbörger, 2015). Sie spielen im Unterrichtsalltag eine erhebliche Rolle, denn sie umfassen ein breiteres Spektrum, als man zunächst annehmen würde:

- Eine mündliche Verstehensfrage an einen einzelnen Schüler/an eine einzelne Schülerin („Wie würdest du das erklären?") ist bereits eine Diagnose, an der sich eine Entscheidung über das weitere Vorgehen im Unterricht orientieren kann.
- Eine Reihe von Übungsaufgaben kann Aufschluss darüber geben, welche Sicherheit die Schülerinnen und Schüler in einem eng umrissenen Kompetenzbereich haben.
- Jede Klausur liefert Informationen über Kompetenzen der Lernenden, die Ergebnisse werden allerdings selten dazu verwendet, den nachfolgenden Unterricht zu gestalten, sondern eher dazu, das Ergebnis des vorherigen Lernprozesses zu bewerten – man spricht auch von „summativer Diagnose".

Diese Beispiele zeigen bereits, dass Diagnose zu unterschiedlichen Zeitpunkten und auf unterschiedlichen Ebenen stattfinden kann (s. Abbildung 1, vgl. Hußmann, Prediger & Leuders, 2005; Büchter & Leuders, 2005b).

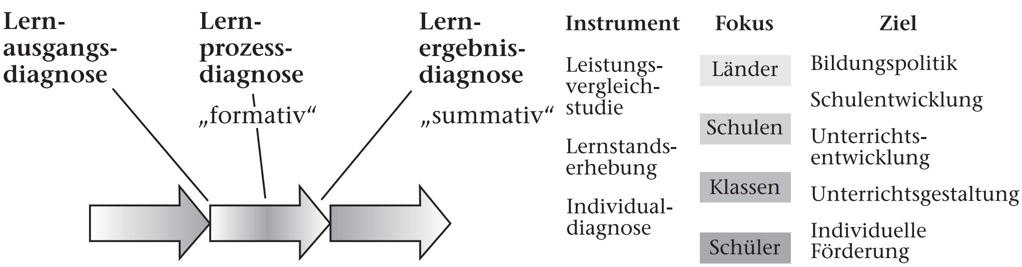


Abb. 1: Diagnose zu unterschiedlichen Zeitpunkten und auf unterschiedlichen Ebenen

Bei all diesen diagnostischen Situationen spielen – das gilt ganz besonders im Fach Mathematik – Aufgaben als diagnostisches Werkzeug eine zentrale Rolle. Das Ausmaß an Information, das man über Lernende erhalten kann, hängt in hohem Maße davon ab, ob die Aufgaben, anhand derer man diese Information gewinnen will, dazu geeignet sind. Alle nachfolgenden Überlegungen dienen daher dazu, aufzuzeigen, wie man im Unterrichtsalltag, insbesondere in der gymnasialen Oberstufe, Aufgaben gestalten und einsetzen kann, die möglichst viele Informationen über die Lernenden liefern.

Aufgaben mit diagnostischer Funktion sind dabei nur ein Aufgabentyp von vielen. In diesem Band finden sich auch Hinweise zu Aufgaben für den Kompetenzaufbau (Beitrag von Hammer und Ufer, Kapitel 13) sowie zu Übungsaufgaben (Beitrag von Leuders, Kapitel 16).

2 Woran erkennt man diagnostische Aufgaben?

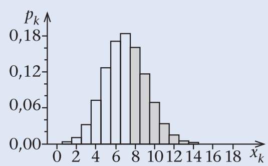
Will man Informationen über das Verstehen, die Kenntnisse und die Fähigkeiten von Lernenden erhalten, so muss man sie dazu anregen, solche Informationen preiszugeben. Das ist eine Binsenweisheit, aber oft genug wird sie in Aufgabenstellungen nicht berücksichtigt. An Beispielaufgaben soll illustriert werden, wie das diagnostische Potenzial einer Aufgabe erhöht werden kann (Aufgaben 1 bis 4). Die Aufgabe 1 bezieht sich auf die inhaltsbezogene Kompetenz „für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen“ aus der Leitidee Daten und Zufall (s. KMK 2012, S. 26).

65 % der Besucher einer Kantine wählen Menü I, nur 35 % wählen Menü II. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei den ersten 20 Gästen höchstens 8-mal Menü II verkauft? Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Binomialverteilung.

Aufgabe 1: Menü

Mit der Aufgabenstellung aus Aufgabe 1 lässt sich ermitteln, ob der Lernende die Binomialverteilung in einer Sachsituation korrekt einsetzen kann. Aber was, wenn er oder sie Schwierigkeiten dabei hat? Kann man aus der Lösung erkennen, an welcher Stelle es „klemmt“? Ist es ein rein rechnerisches Problem? Oder wurde die Struktur der Binomialverteilung nicht verstanden? Gibt es Probleme mit der Interpretation von kumulierten Wahrscheinlichkeiten („höchstens“) oder allgemeiner mit dem Verständnis der Kleiner-Relation? Was stellt sich der Schüler oder die Schülerin überhaupt vor, wenn er oder sie diese Aufgabe löst? Und umgekehrt: Wenn die Aufgabe vollständig gelöst wird: Hat er oder sie verstanden, warum es so geht? Oder hat er oder sie einen guten Nachhilfelehrer und die Aufgabe nach Schema gelöst? All das kann man aus der Lösung eher nicht erkennen, dazu enthält sie jenseits des richtigen oder falschen Lösungsweges einfach zu wenig Information.

Die Abbildung zeigt das Histogramm der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}35$. Kreuzen Sie für die folgenden Sachsituationen an, ob die Situation durch diese Verteilung modelliert werden kann **und** der grau gefärbte Bereich zu der Frage passt.



	passt	passt nicht
Peter spielt oft Darts. Er trifft den innersten Kreis der Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er diesen bei 20 Würfen mindestens 8-mal?	☐	☐
In einem Stoffbeutel mit 100 Schokoladenkugeln sind 35 mit Nougatfüllung. Auf einem Kindergeburtstag sind 20 Kinder. Nach einem Spiel darf jedes Kind der Reihe nach ohne hinzusehen eine Kugel ziehen (und aufessen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 8 Nougatkugeln gezogen?	☐	☐
Aus Erfahrung weiß der Küchenchef, dass 35 % der Besucher einer Kantine Menü II wählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei den ersten 20 Gästen 8-mal Menü II verkauft?	☐	☐

Aufgabe 2: Binomialverteilung oder nicht?

Aufgabe 2 setzt ganz anders an. Sie will herausfinden, ob die Lernenden ein Grundverständnis für die *Bedeutung* von binomialen Verteilungen aufgebaut haben. Nur wer ein Grundverständnis aufgebaut hat, kann hier dreimal eine richtige Entscheidung treffen. (Eine analoge Aufgabe kann man übrigens auch noch für das Aufstellen einer richtigen Formel konstruieren, wenn man auch diese Fähigkeit überprüfen möchte.) Aufgabe 2 wurde allerdings nicht für den Unterricht, sondern für einen zentralen Test konzipiert. Das Aufgabenformat („dreimal ankreuzen“) hat den Vorteil, dass abschließend objektiv bewertet werden kann, ob der Lernende richtig liegt. Unterschiedliche Interpretationen durch verschiedene Korrektoren und damit beispielsweise ungerechte Vergleiche zwischen Klassen werden so vermieden. Die Aufgabe erfüllt das Kriterium der *Objektivität*, was eine wichtige Voraussetzung für die Messgenauigkeit *(Reliabilität)* des Tests ist, in dessen Rahmen sie eingesetzt wird. Allerdings verliert man durch dieses geschlossene Format eine ganze Menge an möglicher Information.

Aufgabe 3 wie Aufgabe 2, anstelle der Ankreuzmöglichkeiten aber diese Frage:
Entscheiden Sie für jede der drei Situationen:
Wird die Situation durch diese Verteilung modelliert?
Passt der grau gefärbte Bereich zur Frage?
Begründen Sie ihre jeweiligen Entscheidungen und schlagen Sie gegebenenfalls Verbesserungen vor.

Aufgabe 3: Binomialverteilung oder nicht? Variante zu Aufgabe 2

In Aufgabe 3 müssen die Schülerinnen und Schüler ausführlich Rechenschaft über ihre Gedanken ablegen. Aus den Schülerprodukten lassen sich eine ganze Reihe von Informationen über die möglichen Probleme und Fehlvorstellungen gewinnen.

Bei drei wählen die „ersten" 20 Gäste für das Menü,
somit spielt die Reihenfolge eine Rolle und der Graph
passt nicht.

Abb. 2: Lösungsbeispiel 1

Dieser Schüler aus dem Lösungsbeispiel 1 (vgl. Abbildung 2) hat offensichtlich gelernt, dass er bei der Modellierung von Zufallssituationen auf Merkmale wie Reihenfolge und Zurücklegen achten muss. Es hat aber bei seiner Antwort den Anschein, dass er keine sichere Einschätzung hat und seine Entscheidung an Oberflächenmerkmalen der Situation festmacht („erste“ als Signalwort für Reihenfolge). Ihm könnte man z. B. dadurch helfen, dass man ihn auffordert, die Situation zunächst auf eine Standardsituation, z. B. mit Urnen, abzubilden.

Ein ähnliches Problem hat der Schüler aus Lösungsbeispiel 2 (vgl. Abbildung 3), der sich auf die zweite Situation dort bezieht:

passt nicht zur Binomialverteilung, weil hierbei n=100 wäre und
die 20 Kinder wären Parameter k.
Hierbei wäre die Binomialverteilung (Histogramm) auf der x-Achse
weiter Richtung 100 verschoben und hätte seinen Median bei 25.

Abb. 3: Lösungsbeispiel 2

Die Tatsache, dass die Situation die Daten in einem Format anbietet, das keine direkte Zuordnung zu den Parametern erlaubt, gibt die Möglichkeit zu erkennen, dass der Schüler möglicherweise dazu neigt, Aufgaben wie diese durch oberflächliche Belegung der Parameter zu lösen (und dabei je nach Aufgabe durchaus auch richtig liegen kann).
Bei der folgenden Lösung (Lösungsbeispiel 3 in Abbildung 4) hat der Schüler den Modellierungsfehler bei der zweiten Situation erkannt: Aufessen bedeutet „nicht zurücklegen".

Wenn man statt Nougatkugeln und normalen Kugeln einfach verschieden
farbige Kugeln nimmt und diese nach dem Ziehen wieder zurück-
legt, würde die Verteilung zutreffen.

Abb. 4: Lösungsbeispiel 3

Das eingefügte Wort „verschiedenfarbige" könnte aber ein Hinweis darauf sein, dass er bei der Interpretation von Zufallssituationen noch immer unsicher ist, in welchem Zusammenhang Ununterscheidbarkeit, Zurücklegen und Reihenfolge stehen. Eine letzte Bearbeitung (Lösungsbeispiel 4 in Abbildung 5) zeigt, wie differenziert Schüler mit den Situationstypen umgehen können:

Die Fragestellung beschreibt eine hypergeometrische Verteilung,
da die Anzahl der Schokoladenkugeln nach jedem ziehen abnimmt.
Durch das Verhältnis zwischen 200 Kugeln und 20 Kindern ist
eine Binomialverteilung keine ausreichende Annäherung.
Wenn man stattdessen 1000 Kugeln, darunter 350 mit Nougatfüllung,
verwenden würde, wäre die oben graphisch dargestellte Binomial-
verteilung eine ausreichend gute Annäherung. Alternativ könnte
man die Kinder die gezogenen Kugeln zurücklegen lassen, um
eine Binomialverteilung zu erhalten.

Abb. 5: Lösungsbeispiel 4

Solche Aufgabenbearbeitungen sind in hohem Maße informativ. Ihre Interpretation ist zwar nicht objektiv, aber sie können Ausgangspunkt für ein weiteres diagnostisches Gespräch sein oder für die gemeinsame Diskussion eines Problems, das möglicherweise eine Mehrheit des Kurses betrifft. Nachfolgend sind zwei weitere einfache Aufgaben abgebildet (Aufgaben 4 und 5), die Aufschluss über das Verständnis der Binomialverteilung geben können:

Eine Binomialverteilung hat die Parameter $n = 20$ und $p = 0{,}35$. Geben Sie eine andere Binomialverteilung an, die den gleichen Erwartungswert hat. Beschreiben Sie, wie sich die Histogramme der beiden Verteilungen unterscheiden.

Aufgabe 4: Histogramm zur Binomialverteilung

Gibt es eine Binomialverteilung, die den gleichen Erwartungswert hat, aber die doppelte Standardabweichung? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 5: Doppelte Binomialverteilung

Zusammenfassend kann man feststellen, dass die folgenden Eigenschaften von Aufgaben ihnen ein höheres diagnostisches Potential verleihen können (Leuders & Büchter, 2005a; Leuders, 2006; Sundermann & Selter, 2006; Sjuts, 2006, 2008; Kliemann, 2008):

1. *Offenheit* ist eine gute Voraussetzung dafür, dass Lernende individuelle Vorstellungen und Schwierigkeiten zeigen. Sie ermöglicht vor allem, dass eine Aufgabe auf verschiedenen Niveaus bearbeitet werden kann, so dass man Fähigkeiten und Schwierigkeiten auf verschiedenen Niveaus erkennen kann.
2. *Fokussierung* ist der Gegenpol zur Offenheit, die nicht zur Beliebigkeit führen darf („Schreibe alles, was dir einfällt, zu …“). Eine diagnostische Aufgabe muss so gestellt werden, dass die möglichen Bearbeitungen sich auf das Wesentliche, auf den Kern der zu diagnostizierenden Fähigkeit konzentrieren.
3. *Prozessorientierung* bedeutet, dass eine Aufgabe die Lernenden dazu anregt, (möglicherweise) interpretierbare Produkte zu erzeugen. Bearbeitungsprozesse werden an die Oberfläche geholt, z. B. indem Beschreibungen, Reflexionen, Begründungen eingefordert werden. Bei Schülerinnen und Schülern der Oberstufe ist dies i. A. kein Problem.

Mit diesen drei Punkten besitzt man Kriterien, mit denen bestehende Aufgaben auf ihr diagnostisches Potential abgeklopft werden können. Aber wenn man nun feststellt, dass man keine guten Diagnoseaufgaben vorliegen hat, wie findet man Ersatz? In den Erläuterungen zu den Kriterien finden sich bereits einige Hinweise darauf. Im Folgenden wird ein Vorschlag entwickelt, wie ein kreativer Prozess zur Erstellung von guten Diagnoseaufgaben aussehen kann.

3 Wie erstellt man gute Diagnoseaufgaben?

Das Erstellen eigener Aufgaben mit diagnostischem Potenzial ist ein kreativer Prozess. Für einen solchen Prozess sind komplexe Kategorien (wie die oben stehenden drei Eigenschaften diagnostischer Aufgaben) aus zwei Gründen eher hinderlich: Man kann sie kaum gleichzeitig im Kopf behalten, während man neue Aufgaben konstruiert, und sie führen dazu, dass man eher zu kritisch an seine ersten aufkeimenden Ideen herangeht und diese sich nicht entfalten können. Für die kreative Aufgabenkonstruktion braucht man also zweierlei: ein einfaches Schema, das eher zu neuen Ideen anregt, und einen so genannten Bewertungsaufschub (s. u.).

Ein einfaches Schema, das sich vielfach bewährt hat, ist dieses (Büchter & Leuders, 2008): Wir unterteilen Aufgaben vereinfachend in zwei Klassen, verfahrensorientierte Aufgaben und verstehensorientierte Aufgaben (s. Tabelle 1).

Tabelle 1: Verfahrens- und verstehensorientierte Aufgaben

Verfahrensorientierte Aufgaben zeigen, ob ein Lernender ein Verfahren sicher beherrscht – auch wenn er es womöglich gar nicht verstanden hat und es mit Hilfe von Oberflächenmerkmalen einer Aufgabe steuert	Bestimme, ob die folgenden Paare von Vektoren jeweils senkrecht aufeinander stehen. a) (1,0,2) und (2,3,–1) b) (a,2,1) und (3,a,a) c) …
Verstehensorientierte Aufgaben zeigen, ob ein Lernender die Grundidee hinter einem Konzept oder einem Verfahren wirklich verstanden hat.	Gib vier Vektoren an, die senkrecht auf (1,0,3) stehen. Kein Vektor soll ein Vielfaches eines anderen sein.

Das Beispiel in Tabelle 1 zeigt stark vereinfachend den Unterschied: Die verfahrensorientierte Aufgabe kann auch ein Schüler oder eine Schülerin lösen, der oder die sich gemerkt hat, dass das Stichwort „senkrecht" das Skalarprodukt fordert und wie man ein Skalarprodukt „rechnen muss". Die verstehensorientierte Aufgabe ist mit dem Rechenverfahren nicht oder nur mit Aufwand zu lösen. Schon die Tatsache, dass sich ein Schüler oder eine Schülerin der Aufgabe rechnerisch nähert ($x + 3z = 0$) und dann möglicherweise nicht sicher ist, wie er oder sie mit dem y umgehen soll, zeigt, dass er bzw. sie möglicherweise nur wenige Vorstellungen über Vektoren nutzt. Wenn aber ein Lernender die Situation „senkrecht" mit geometrischen Vorstellungen verbindet, kann er sehr schnell einen zu (1,0,3) senkrechten Vektor in der x-z-Ebene ganz ohne Rechnung benennen (z. B. (3,0,–1) und dann weitere erzeugen (z. B. (3,1,–1), (3,2,–1), (3,3,–1)). Dieses Prinzip lässt sich durch alle Inhaltsbereiche und Schulstufen anwenden: „Gib drei verschiedene Dreiecke mit dem Flächeninhalt 12 cm^2 an." oder „Vervollständige die Bruchaddition auf drei verschiedene Weisen: $\frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} = \frac{1}{\square}$". Insofern ist das diagnostische Potenzial verstehensorientierter Aufgaben im Allgemeinen ungleich höher als das von verfahrensorientierten Aufgaben.

Das Konstruktionsziel lautet also: Erfinden Sie zu einer gegebenen verfahrensorientieren Aufgabe verstehensorientierte Aufgabenvarianten. Wie kommt man aber auf solche Aufgaben? Hier kann man sich an einer Reihe von Aufgabentypen orientieren, die potenziell die drei oben genannten Kriterien erfüllen und die meistens (aber nicht immer) funktionieren: Schülerinnen und Schüler können aufgefordert werden:

- eigene Beispiele für eine Situation zu erstellen
- ein Verfahren umzukehren
- von einer Darstellung in eine andere zu wechseln
- eine richtige/falsche Lösung zu erklären
- eine Aussage zu bewerten
- eine Entscheidung zu treffen und zu begründen
- …

Eine solche Liste kann man als Kreativitätstechnik verwenden: Im Geiste assoziiert man eine gegebene verfahrensorientierte Aufgabe mit jeweils einem Aufgabentyp aus der Liste und schaut, ob daraus eine oder mehrere neue Aufgaben entstehen. Diese sollte man aber nicht sofort einer Bewertung unterziehen, sondern erst einmal weitere Aufgabenvorschläge produzieren. Arbeitet man in einer Gruppe, so muss man vereinbaren, dass Aufgabenvorschläge erst einmal nur gesammelt, aber nicht kommentiert werden (z.B. mithilfe einer geeigneten Methode wie dem Ich-Du-Wir oder dem Schreibgespräch, vgl. Barzel, Büchter & Leuders, 2007).

Erst in einem zweiten Schritt sollte man die Sammlung möglicher Aufgaben einer kritischen Sichtung unterziehen und anhand der Kriterien 1 bis 3 bewerten sowie ggf. optimieren. Beispielsweise muss man sich Rechenschaft ablegen, ob die neuen Aufgaben immer noch dieselben Kompetenzen im Fokus haben oder möglicherweise etwas ganz anderes diagnostizieren. Auch kann es passieren, dass die konstruierten Aufgaben zu hoch einsteigen und das Kriterium der Offenheit für verschiedene Niveaus verletzen.

4 Wie sieht diagnostischer Unterricht aus?

In den vorstehenden Abschnitten wurde ausführlich erläutert, was diagnostische Aufgaben sind und wie man zu ihnen gelangt. Wie und wann aber setzt man sie im Unterricht ein? Es ist klar, dass man hierzu Freiräume braucht, in denen solche Aufgaben bearbeitet werden können, in denen man sich mit den entstandenen Lösungen beschäftigt und in denen man den Lernenden ein – nicht notenrelevantes – Feedback gibt bzw. mit ihnen erkannte Probleme aufarbeitet. Hier sind dem Diagnostizieren und Fördern natürlich pragmatische Grenzen gesetzt, was aber nicht dazu führen darf, dass man diagnoseorientiertes Lehren als generell undurchführbar verwirft.

So startet etwa Bell (1983) in seinem Konzept des *diagnostic teaching* mit Aufgaben zur Erhebung typischer Fehler und Verständnislücken, um diese im darauffolgenden Unterricht durch Erzeugung kognitiver Konflikte zu bearbeiten. Auch das Konzept des *dialogischen Lernens* bei Gallin und Ruf (1998) ist in hohem Maße diagnoseorientiert. Die Lehrkraft beginnt den Unterricht nicht mit der Instruktion – in der möglicherweise falschen Annahme, die Lernstände und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler von vornherein gut genug zu kennen. Vielmehr werden die Schülerinnen und Schüler zuerst aufgefordert, ein Problem ausführlich im Rahmen von Lerntagebüchern zu bearbeiten. Die Lehrkraft sammelt diese ein, liest sie daheim gründlich durch und gestaltet auf dieser Basis einen Unterricht, in dem sie die Auseinandersetzung des Kurses mit diesen individuellen Lösungen moderiert.

Aber auch jenseits solcher umfassender Umsetzungen von diagnostischem Unterricht gibt es viele Chancen, diagnostische Aufgaben im Unterrichtsalltag einzusetzen:

Im Laufe des Lernprozesses können Aufgaben immer wieder die Gelegenheit für *Zwischendiagnosen* geben. Geeignete Aufgaben mit diagnostischem Potential geben Lernenden und Lehrenden Informationen über die Qualität des Verständnisses, auch schon zu einem frühen Zeitpunkt des Lernprozesses. Das Bearbeiten und Auswerten solcher Aufgaben kann dabei auch organisatorisch unaufwändig gestaltet werden: Am Ende einer Unterrichtsstunde bearbeiten alle Schülerinnen und Schüler für etwa 10 Minuten eine oder mehrere kurze Diagnoseaufgaben und geben ihre Bearbeitungen der Lehrkraft mit nach Hause. Eine grobe Durchsicht – ohne den zeitlichen Druck einer unmittelbaren Reaktion im Unterricht – eröffnet schnell einen Blick auf den Lernstand des Kurses. Einzelne (ggf. anonymisierte) Bearbeitungen, die typisch für Fehlvorstellungen des Kurses stehen, können dann zu Beginn der nachfolgenden Stunde die Basis für eine Aufarbeitung solcher Schwierigkeiten geben.

Klausuren bilden zwar eher das Ende einer Lernsequenz und damit einen möglicherweise zu späten Zeitpunkt für eine formative Verwendung von diagnostischer Information. Dennoch sollten die Aufgaben in einer Klausur Aufschluss geben, inwieweit Schülerinnen und Schüler die behandelten Konzepte wirklich verstehen. Dies kann durch diagnostische Aufgabentypen weit besser transparent werden als durch das Überprüfen technischer Fertigkeiten oder komplexe Anwendungen. Zu empfehlen ist daher, in einem Klausurteil auf das Grundverständnis zentraler Inhalte zu fokussieren.

Wer den Lernstand seiner Schülerinnen und Schüler verstehen will, muss nicht nur den Rahmen dafür schaffen, sondern auch in der Lage sein, typische *Schülerfehler* und *Verstehenshürden,* aber auch *besondere Stärken* schnell zu erkennen und auf geeignete Fördermaßnahmen zurückgreifen zu können. Um solche Stärken und Schwächen wahrzunehmen und angemessen zu reagieren, reicht es oft nicht aus, sich im Inhalt mathematisch sicher zu fühlen. Als *mathematisch* gut ausgebildete Lehrkraft kann man zwar schnell erkennen, *dass* etwas falsch ist, aber man hat oft kein gutes Gespür mehr, *warum* eine Schülerin oder ein Schüler einen solchen Fehler gemacht hat. Eine solche diagnostische Erkenntnis erfordert oft eine ausführliche Tiefenanalyse, die im Alltag nicht in jeder Situation umgesetzt werden kann. Als *diagnostisch* gut ausgebildete Lehrkraft kann man hier auf das Wissen über Schülerschwierigkeiten in den Inhaltsbereichen zurückgreifen, welche in der Fachdidaktik inzwischen gut erforscht sind (z. B. zur Ableitungsfunktion bei Hahn & Prediger, 2008; zur analytischen Geometrie bei Wittmann, 2000, 2003; zum Wahrscheinlichkeitsbegriff bei Jones, Langrall & Mooney, 2007).

5 Fördersituationen

In diesem Beitrag kam ein Thema immer nur am Rande zur Sprache, das als andere Seite der Medaille unmittelbar mit dem Diagnostizieren verbunden ist, das *Fördern.* Auch wenn an dieser Stelle keine unterschiedlichen Förderkonzepte mehr dargestellt werden können, soll abschließend noch darauf hingewiesen werden, dass im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe ebenso wie in anderen Schulstufen, je nach Diagnose drei typische Fördersituationen auftreten (vgl. Leuders & Leuders, 2013):

Ein Schüler oder eine Schülerin kann dem „normalen" Lernangebot nicht folgen, weil...

(1) er oder sie bereits Verständnislücken bei den notwendigen Voraussetzungen für den Erwerb neuen Wissens hat. Diese Verständnislücken bestehen schon länger und sind oft aus vorhergehenden Schuljahren verschleppt. Hier hilft es nicht, noch mehr Übungen zu verordnen. Man muss zurück zu den Ursachen des Verständnisproblems, die viele Monate oder gar Schuljahre zurückliegen können.

(2) er oder sie zwar keine hervorstechenden Defizite in den Voraussetzungen hat, aber dem aktuell angebotenen Lernweg dennoch nicht folgen kann: Die Schrittigkeit ist zu groß, die Abstraktion erfolgt zu schnell oder die Art der Darstellung entspricht nicht seinem oder ihrem Zugang. Hier besteht die Gefahr, dass der Lernende versucht, durch das unverstandene Nachahmen von Verfahren hinterherzukommen

und so für sich und die Lehrkraft die Illusion des Verstehens aufbaut. Ein Indikator dafür sind Schülerfragen wie „Wie muss ich das machen?“ anstelle von „Warum ist das so?“. Die erste Frage verweist nur auf das Verfahren, die zweite auf das Verständnis.

(3) er oder sie unterfordert ist. Seine oder ihre Ideen können von der Lehrkraft und der Klasse nicht aufgegriffen werden, weil sie einen zu großen Schritt für die Mitschülerinnen und Mitschüler bedeuten würden. Beim Üben demotiviert eine überflüssige Wiederholung derselben Aufgaben. Gerade in der gymnasialen Oberstufe gibt es vielfältige Möglichkeiten durch Aufgabenöffnung oder Aufgabenvariation auch ad hoc herausfordernde Probleme zu generieren.

In diesem Rahmen konnte nur angedeutet werden, wieso eine diagnostische Sichtweise auf das Lehren und Lernen in der gymnasialen Oberstufe ebenso wichtig ist wie in allen anderen Schulstufen. Lernende sind in dieser Altersstufe zwar mehr denn je herausgefordert, ihr Lernen selbstständig und eigenverantwortlich zu organisieren. Dennoch brauchen sie, wie jeder Lernende, regelmäßiges und angemessenes Feedback von jemandem, der mit einem professionellen diagnostischen Blick Lernprozesse verstehen und unterstützen kann.

Literaturverzeichnis

Bell, A. (1983). Diagnostic teaching. The design of teaching using research on understanding, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 15* (2), 83–89.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005a). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005b). Zentrale Tests und Unterrichtsentwicklung … … bei guten Aufgaben und gehaltvollen Rückmeldungen kein Widerspruch. *Pädagogik, 57* (5), 14–18.

Büchter, A. & Leuders, T. (2008). Leistungen verstehensorientiert überprüfen. Gute Aufgaben für Klassenarbeiten entwickeln. In R. Bruder, A. Büchter & T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikunterricht entwickeln* (S. 149–184). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematikdidaktik, 29* (3/4), 163–198.

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule, 15,* 1–8.

Ingenkamp, K. (1997). *Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik.* Weinheim: Beltz.

Jones, G. A., Langrall, C. W. & Mooney, E. S. (2007). Research in probability. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 909–956). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Kliemann, S. (Hrsg.). (2008). *Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe I, Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Leuders, T. (2006). Erläutere an einem Beispiel … Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern – mit offenen Aufgaben. In G. Becker, M. Horstkemper, E. Risse, L. Stäudel, R. Werning & F. Winter (Hrsg.), *Friedrich Jahresheft XXIV. Diagnostizieren und Fördern* (S. 78–83). Seelze: Friedrich Verlag.

Leuders, J., & Leuders, T. (2014). Erfolgreiches Lernen ermöglichen. Konzepte und Prinzipien des Förderns im Mathematikunterricht. In T. Bohl, A. Feindt, B. Lütje-Klose, M. Trautmann & B. Wischer (Hrsg.), *Friedrich Jahresheft 2014. Fördern* (S. 72–75). Seelze: Friedrich Verlag.

Moser-Opitz, E. & Nührenbörger, M. (2015). Diagnostik und Leistungsbeurteilung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch Mathematikdidaktik* (S. 491–512) Heidelberg: Springer.

Sjuts, J. (2006). Unterrichtliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I* (S. 96–112). Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Sjuts, J. (2008). Aufgaben diagnostisch gestalten, Denkprozesse aufdecken und Verstehen fördern. *Mathematik lehren, 150,* 58–61.

Wittmann, G. (2000). Schülerkonzepte und epistemologische Probleme. In U.-P. Tietze, M. Klika & H. Wolpers (Hrsg.), *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II (Bd 2). Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra* (S. 132–148). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, G. (2003). *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen.* Hildesheim: Franzbecker.

16. Intelligentes Üben im Mathematikunterricht

Timo Leuders[1]

Üben ist ein wichtiger Schritt im Lernprozess. Damit das Üben nicht nur effektiv ist, sondern auch als sinnvoll und vielleicht sogar freudvoll wahrgenommen wird, braucht es geeignete Übungsaufgaben. „Intelligente Übungsaufgaben" dienen nicht nur dem Automatisieren von Fertigkeiten, sondern zugleich dem Aufbau von Vorstellungen und der Reflexion von Wissen. Auch allgemeine Kompetenzen wie Problemlösen oder Argumentieren müssen geübt werden. Dies kann bei „intelligenten Übungsaufgaben" von Anfang an und zusammen mit dem Einüben von Fertigkeiten geschehen, wenn Lernende zum Untersuchen von Strukturen und zum einfachen Problemlösen angeregt werden. Auf diese Weise wird das Üben zu einer sinnstiftenden mathematischen Tätigkeit. Im vorliegenden Beitrag werden vielfältige Anregungen zum intelligenten Üben in der Oberstufe gegeben.

1 Ziele und Formen des Übens

Der Erwerb mathematischer Konzepte, der Aufbau neuen Wissens und seine Vernetzung vollziehen sich im Mathematikunterricht in unterschiedlichen Phasen. Ein großer Teil der Aufmerksamkeit liegt dabei auf der ersten Phase, den Momenten der ersten Begegnung mit neuen mathematischen Phänomenen, der Konstruktion neuer Begriffe oder der Entdeckung und beweisenden Absicherung von Zusammenhängen. Ist ein neues Stück Mathematik erst einmal entdeckt, so beginnt die Phase der langsamen Eroberung, der Untersuchungen all seiner Verzweigungen, der Exploration möglicher Anwendungen und der Vernetzung mit anderen mathematischen Begriffen.

Wenn man schulisches Mathematiklernen auf diese Weise beschreibt, so erscheint es ebenso reichhaltig und lustvoll, wie Mathematikerinnen und Mathematiker ihre Arbeit erleben. Wenn man aber eher an ein klassisches Herbartsches Stufenschema (vgl. Weinert, 1996, S. 26) mit einer *Phase des Erarbeitens* und einer *Phase des Übens* denkt, so erscheinen dieselben Tätigkeiten weitaus profaner. Insbesondere bekommt das Üben womöglich den fahlen Beigeschmack eines freudlosen Trainierens von Techniken oder Algorithmen.

Dass das Üben ein wichtiges Element im Lernprozess darstellt, ist unbestritten (Aebli, 1977). Wie aber kann Üben so gestaltet werden, dass es nicht nur effektiv ist, sondern auch als sinnvoll und vielleicht sogar freudvoll wahrgenommen wird? Die eben beschworene Gegensätzlichkeit von Erarbeiten und Üben ist nämlich keineswegs naturgegeben und

[1] Dieses Kapitel greift in Teilen auf Abschnitte aus Leuders und Prediger (2012) und Leuders (2012) zurück.

wir lernen aus den Unterrichtskonzepten, die in den letzten Jahrzehnten zuerst für die Grundschule und dann auch für die Sekundarstufe I entwickelt wurden, dass Entdecken und Üben Hand in Hand gehen können (Selter, 1995). Außerdem wäre es ein Verkennen der möglichen Breite der Ziele des Übens, wenn man Üben auf das Einschleifen reduzieren würde. Üben hat viele Ziele: Zum einen die Ausbildung von Automatisierungsroutinen, zum anderen aber auch die Erhöhung der Transferfähigkeit, das vertiefte Verständnis und im weitesten Sinne die Qualitätssteigerung des erworbenen Wissens (Renkl, 2000).

Zur Gestaltung von Übungsphasen findet man daher eine wachsende Zahl von Konzepten sowohl in der allgemeinen Didaktik (z. B. Klafki, 1985; Heymann, 1998, 2005; Paradies & Linser, 2001) als auch in der Psychologie (z. B. Schneider, 1985). Diese Übungskonzepte sind in der Mathematikdidaktik immer wieder aufgenommen und fachspezifisch konkretisiert worden (Winter, 1984; Müller & Wittmann, 1992; Wittmann, 1992; Leuders, 2009). Sie haben zu einem breiten Verständnis des Übens unter der Bezeichnung des *produktiven Übens* bzw. des *intelligenten Übens* beigetragen und zeigen sich in typischen Aufgabenformaten. Dabei werden eine Reihe von Anforderungen an Übungsaufgaben formuliert, die jeweils unterschiedliche Aspekte ansprechen, insgesamt aber zum Konzept eines intelligenten Übens beitragen. Diese Anforderungen lassen sich in etwa so zusammenfassen (Leuders, 2012): *Intelligentes Üben* ist charakterisiert durch:

- *Reflexion:* Zum Nachdenken über den Aufgabeninhalt anregen.
- *Struktur:* Mathematische Entdeckungen durch strukturierte Aufgaben ermöglichen.
- *Differenzierungsvermögen:* Starken Schülerinnen und Schülern etwas anbieten, ohne schwache abzuhängen.

Individuelle Aktivität, häufige Wiederholung und Flexibilisierung sind die Voraussetzungen für effektives Üben. Diesen Anforderungen kann man auf verschiedene Weise begegnen. Aufgabenserien in traditionellen Übekonzepten realisieren diese Anforderungen z. B. so (vgl. Wittmann, 1992): Zunächst werden durch eine Wiederholung von vielen kleinschrittigen Einzelaufgaben Fertigkeiten automatisiert und diese auch bei steigender Komplexität der Aufgaben immer sicherer beherrscht. Dadurch wird die oder der Lernende kognitiv von den Denkprozessen bei der Durchführung – etwa der Lösung einer quadratischen Gleichung – entlastet und kann anschließend Anwendungsaufgaben durchführen. Leider sind solche automatisierten Fertigkeiten langfristig oft nicht stabil, wenn ihnen das Fundament inhaltlichen Verstehens fehlt (Schoenfeld, 1992).

Von reflektiertem, auf Verstehen von Zusammenhängen zielendem, d. h. von intelligentem Üben spricht man hingegen, wenn eine Monokultur des Automatisierens durchbrochen wird und das Üben ein breites Spektrum von Kompetenzaspekten anspricht:

- Sichern von *Faktenwissen* und Automatisieren von *Fertigkeiten* – Das Vorhandensein dieser Kompetenzaspekte entlastet bei weiterführenden mathematischen Arbeiten.
- Aufbau und Vertiefen von (Grund)*Vorstellungen* – Auch fundierte inhaltliche Vorstellungen von mathematischen Konzepten, wie z. B. Vorstellungen von der Bedeutung von Brüchen müssen mitgeübt werden, sie machen mathematisches Wissen erst nachhaltig.
- *Reflexion* von Konzepten und deren Anwendung – Wann und warum ein mathematisches Konzept angewendet werden kann, muss ebenfalls mitgeübt werden.
- Anwendung im Rahmen von Problemlösen, Modellieren und Argumentieren – Allgemeine mathematische Kompetenzen erwirbt man nicht unabhängig von inhaltlichem Wissen, sie müssen durch Anwendung immer wieder explizit mitgeübt werden.

- Aufbau eines angemessenen *Mathematikbildes* – Auch die Formen und Inhalte des Übens prägen ein Bild von der Mathematik, die Überzeugungen zur Mathematik werden gleichsam „mitgeübt".

Intelligentes Üben zeichnet sich also durch eine Balance dieser Übeziele aus und durch Aufgaben, die nicht immer alle, aber doch viele dieser Ziele im Blick haben. Die nachfolgenden Beispiele sollen dieses Zusammenspiel illustrieren, wobei jeweils unterschiedliche Aspekte im Vordergrund stehen. Dabei wird auch deutlich, dass das Verfolgen der oben genannten Übeziele und -prinzipien sich nicht etwa nur auf leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler beschränkt.

2 Aufgabenformate für das intelligente Üben

Ein häufiges Missverständnis besteht darin anzunehmen, die Ziele stünden in einer zwingenden Reihenfolge: Erst das Beherrschen von Fertigkeiten ermögliche den Aufbau von Vorstellungen oder gar das Problemlösen – oft genug bleiben schwächere Schülerinnen und Schüler dann beim Training von Fertigkeiten (und einem entsprechenden reduzierten Mathematikbild) stehen. Die nachfolgend beschriebenen Übeformate zeigen aber ganz explizit auf, wie die genannten Übeziele durch geeignete Aufgaben von Anfang an zugleich in den Blick genommen werden können.

Es gibt einige immer wiederkehrende Aufgabentypen, die das Sichern von Faktenwissen und Fertigkeiten fördern und dabei zugleich Reflexions- und Problemlöseprozesse begünstigen. Neben *Anwendungsaufgaben*, die man in Übungsmaterialien bereits regelmäßig findet und die vor allem den Transfer fördern sollen, gibt es zwei weitere Aufgabenformate, die als Formen intelligenten Übens vermehrt Beachtung finden: Dies sind die *Strukturaufgaben* und die *Problemlöseaufgaben* (Wittmann, 1992; Leuders, 2009). Bei all diesen Aufgaben kann zwischen eher *geschlossenen* Aufgaben, bei denen Lernende entlang konkreter Beispiele weiterarbeiten, und *offeneren* Aufgaben, bei denen weitreichendere Explorationen durchgeführt werden können, unterschieden werden. Zudem können bei diesen Aufgaben unterschiedlich hohe Anforderungen an das Niveau der Begründung gestellt werden.

Im ersten Typ von Übungsaufgaben, den *Strukturaufgaben*, werden Aufgabenserien präsentiert, die nicht nur durchgearbeitet werden, sondern gleichzeitig zur Untersuchung der dahinterliegenden mathematischen Strukturen anregen sollen. Dabei können Lernende eine Reihe zusätzlicher Entdeckungen machen. Gelegentlich werden sie auch aufgefordert, Aufgaben in eine strukturelle Ordnung zu bringen. Beides leitet dazu an, die Aufgaben nicht nur als kalkülhafte Exerzierübungen anzusehen, sondern über die Bedeutung und Konsequenzen von Strukturen nachzudenken. Unstrukturierte Aufgabensequenzen („graue Päckchen", Wittmann, 1992) hingegen lassen solche Reflexionen nicht zu, sie vermitteln zudem noch ein Bild von Mathematik als langweiligem Training von Aufgabentypen.

Diese Aufgaben zeigen in der Gegenüberstellung, wie sich ein rein automatisiertes Üben vom intelligenten Üben unterscheidet.

Bestimmen und vereinfachen Sie soweit wie möglich, die Verkettung $f(x) = u(v(x))$ der Funktionen $v(x)$ und $u(x)$

a) $u(x) = 4x$, $v(x) = 3x$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x \cdot 4$, $v(x) = \frac{8}{3}x + 5$

c) $u(x) = x^2 + 3$, $v(x) = \sqrt{x}$

d) $u(x) = 2x^2 \cdot 4x + 1$, $v(x) = \sin x$

… usw. bis k)

Aufgabe 1: Unproduktive Übungsaufgabe

Die Verkettung von Funktionen erzeugt oft komplexere Funktionen, manchmal vereinfachen sich die Funktionen aber auch. Wählen Sie aus der Liste verschiedene v und u (mindestens 10 Paare, es können auch weitere Funktionen hinzugezogen werden) und untersuchen Sie, wann und warum bei der Verkettung $f(x) = u(v(x))$ eine Vereinfachung auftritt. Was verstehen Sie dabei jeweils unter „vereinfachen"?

$2x, 3x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{3}x, -2x, -\frac{1}{3}x, \ldots$

$2x + 1, 2x \cdot 1, \frac{1}{2}x + 1, \ldots$

$x^2, x^3, 2x^2, \sqrt{x}, \ldots$

$x^2 + 1, (x + 1)^2, \sqrt{x - 1}, \sqrt{x} - 1, \ldots$

Aufgabe 2: Produktive Übungsaufgabe

Die unstrukturierte Aufgabe 1 behandelt die Verkettung als zu trainierende Fertigkeit, die man durch Wiederholen und durch Vergleich mit der Musterlösung, also gewissermaßen durch Versuch und Irrtum, bis zur Sicherheit trainieren kann. Aufgabe 2 bettet diese Übung in eine (kleine) mathematische Forschungsfrage ein: Der Blick ist nicht auf die Musterlösung, sondern auf ein zu untersuchendes Phänomen gerichtet. Auf der Ebene der Automatisierung bietet die rechte Aufgabe quantitativ genau dieselben Übungsgelegenheiten („mindestens 10 Paare"), dafür fördert sie aber zugleich den Strukturblick und die Reflexion darüber, welche Elemente der Teilfunktionen bei der Verkettung wie zusammenspielen. Zudem fördert sie auch prozessbezogene Kompetenzen: Probleme lösen („untersuche") und Argumentieren („wann und warum"). Schließlich vermittelt diese Art des Umgangs mit Mathematik ein angemesseneres Bild davon, worum es in der Mathematik geht: Mathematik ist nicht bloß eine Ansammlung von Verfahren, die man erlernen muss, um damit später einmal Probleme zu lösen, sondern vor allem ein beständiges Suchen nach Mustern und Strukturen.

In Abbildung 1 sind zwei exemplarische Schülerbearbeitungen zu dieser Aufgabe dargestellt. Diese zeigen, auf wie unterschiedlichen Niveaus die „Forschungsfrage" bearbeitet wird. Einige Schülerinnen und Schüler beschränken sich darauf, ihre Beobachtungen beschreibend wiederzugeben (erstes Beispiel; oben in Abbildung 1), andere erkennen allgemeine Prinzipien hinter den Beispielen (zweites Beispiel, unten in Abbildung 1). Alle haben aber eine substantielle Zahl von Trainingsbeispielen absolviert.

4.) $u(x) = 2x-1$
$v(x) = \frac{1}{2}x$
$f(x) = x-1$
$\Rightarrow$ keine wirkliche Vereinfachung, da relativ einfache Terme

5.) $u(x) = \sqrt{x}$
$v(x) = x-1$
$f(x) = \sqrt{x-1}$
$\Rightarrow$ auch keine Vereinfachung

6.) $u(x) = \sqrt{x}-1$
$v(x) = (x+1)^2$
$f(x) = \sqrt{(x+1)^2}-1$
$= x+1-1 = x$
$\Rightarrow$ deutliche Vereinfachung: durch Wegfall von Wurzel und Quadrat entsteht der einfachste Term

7.) $u(x) = 2x-1$
$v(x) = x^2+1$
$f(x) = 2x^2+2-1$
$= 2x^2+1$
$\Rightarrow$ keine Vereinfachung

8.) $u(x) = 3x$
$v(x) = -\frac{1}{3}x$
$f(x) = 3\cdot(-\frac{1}{3}x)$
$= -x$
$\Rightarrow$ Vereinfachung durch Wegfall des Bruches

1) $u(x)=x^2;\ v(x)=\sqrt{x} \Rightarrow u(v(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$
$\Rightarrow$ Vereinfachung tritt auf, wenn $u(x)$ und $v(x)$ jeweils Umkehrfunktionen des jeweils anderen sind.

2) $u(x) = x^2;\ v(x) = x^3 \Rightarrow u(v(x)) = (x^3)^2 = x^6$
$\Rightarrow$ Vereinfachung, wenn $u(x)$ und $v(x)$ Potenzfunktionen sind.

3) $u(x) = 2x^2;\ v(x) = 1{,}2x^{-1}) \Rightarrow u(v(x)) = 2\,(1{,}2x^{-1})^2$
$= 2(1{,}44x^2 - 2{,}4x + 1)$
$= 2{,}88x^2 - 4{,}8x + 2$
$\Rightarrow$ keine Vereinfachung.

Abb. 1: Zwei Schülerlösungen zur produktiven Verkettungsaufgabe

Die Grundidee von Strukturaufgaben lautet also: „Untersuche diese Struktur und übe dabei". Wesentlich bei der Bearbeitung dieser Aufgaben ist allerdings das Üben. Dass durch die Reflexion vertiefte Erkenntnisse entstehen können, ist ein hoch zu schätzender Nebeneffekt. Es besteht jedoch keine Notwendigkeit, solche Ergebnisse für alle Lernenden festzuhalten und zu sichern. Die Entdeckungen beim Üben sind mitunter interessante Zusammenhänge, aber nicht unbedingt die Basis für das systematische Weiterlernen.

Der zweite Typ von Übungsaufgaben, die *Problemlöseaufgaben*, verfolgen die Grundidee „Löse das Problem und übe dabei". Problemlöseaufgaben sollten beim Üben nicht zu komplex sein; das Problem kann schlicht darin bestehen, dass es kein fertiges Verfahren gibt, sondern dass die Lernenden sich einer Lösung durch systematisches Probieren nähern. Viele solcher Aufgaben entstehen durch Umkehren von einfachen Verfahrensaufgaben, also statt „Berechne $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$" die Aufgabe „Finde zwei Brüche, so dass $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$. Gibt es mehrere Lösungen?" oder „Zeichne ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 12 cm^2" (Winter, 1984). Diese Formate lassen sich in der gymnasialen Oberstufe ebenfalls durchgehend verwenden. Typische Fragen bei Problemlöseaufgaben lauten: „Wann erhält man die Lösung ....?", „Wie viele Möglichkeiten für ...... gibt es?", „Für welche .... gilt ....?", „Welches ... ist das größte/kleinste/ ...?". Hier ein Beispiel aus der analytischen Geometrie:

Gegeben sind die folgenden neun Geraden.

$$g_1: x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ g_2: x = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ g_3: x = \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$g_4: x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ g_5: x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ g_6: x = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$g_7: x = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ g_8: x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\ g_9: x = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

a) Welche Geraden sind vermutlich identisch? Worauf gründet sich Ihre Vermutung? Überprüfen Sie die Vermutung (Finden Sie eine, finden Sie mehrere, finden Sie alle. Wie können Sie sicher sein, dass Sie alle gefunden haben? Begründen Sie Ihre Vermutung).
b) Welche Geradenpaare haben einen Schnittpunkt? Finden Sie mindestens einen offensichtlichen und einen weniger offensichtlichen Fall. Worauf gründet sich Ihre Vermutung? Überprüfen Sie die Vermutung.
c) Gesucht ist ein Geradenpaar ohne Schnittpunkt, bei dem die Geraden aber möglichst geringen Abstand voneinander haben. Wählen Sie zwei Paare, die vermutlich in Frage kommen, und begründen Sie Ihre Wahl. Prüfen Sie durch Vergleich mit den Mitschülern. Können Sie eine Begründung finden, ohne alle Fälle zu berechnen?

Aufgabe 3: Neun Geraden

Diese Aufgabe zeichnet sich auch dadurch aus, dass sie in Teilen durch inhaltlich-anschauliches Denken lösbar ist und damit für die Lernenden den Nutzen einer solchen Herangehensweise deutlich macht. So wird ein Abrutschen in eine schematische Bearbeitung verhindert. Im Unterricht kann man natürlich nicht jede einzelne Entdeckung wieder an alle zurückspiegeln, das wäre eine zeitliche Überforderung. Beim produktiven Üben ist das Ziel vor allem das individuelle Arbeiten. Als Lehrperson kann man hier zwar punktuell individuell zurückmelden, aber sicherlich nicht jede Entdeckung oder Beobachtung überprüfen. Hier bietet es sich an, dass stärkere Schülerinnen und Schüler, für die die Sicherung der Fertigkeiten keine Herausforderung mehr darstellt, schwächere Lernpartner begleiten und individuell ihre Entdeckungen diskutieren.

Ein Beispiel aus der Analysis zeigt weitere Umsetzungsmöglichkeiten für den Übungstyp *Problemlöseaufgabe* (vgl. Aufgabe 4). Hier sieht man auch, wie man aus einer auf den ersten Blick unstrukturierten Aufgabe, so wie man sie etwa im Schulbuch vorfinden kann, durch Hinzufügen von geeigneten Problemlösefragen eine intelligente Übungsaufgabe erzeugen kann (vgl. Leuders, 2006):

$$(1)\int_{-2}^{3} x\,dx \qquad (2)\int_{-4}^{7} 1\,dx \qquad (3)\int_{-2}^{-1} x^2\,dx \qquad (4)\int_{-3}^{3} x^3\,dx \qquad (5)\int_{-2}^{0} x^4\,dx$$

$$(6)\int_{-1}^{+2} x^2\,dx \qquad (7)\int_{-4}^{-3} x^3\,dx \qquad (8)\int_{-1}^{+2} x^5\,dx \qquad (9)\int_{-2}^{2} x^2\,dx \qquad (10)\int_{-4}^{5} x^2\,dx$$

a) Welches der bestimmten Integrale hat vermutlich den kleinsten/größten Wert? Begründen Sie Ihre Vermutung. Überprüfen Sie sie dann durch Rechnung.
b) Teilen Sie die Aufgaben nach Schwierigkeitsgrad ein: Welche kann man ohne Rechnung lösen?
c) Welche anderen Aufgaben dieser Art könnte man ohne oder fast ohne Rechnung lösen?

Aufgabe 4: Zehn Integrale

Auch hier zeigen einige Schülerlösungen das Potential solcher Aufgabenstellungen (Abbildung 2):

a) (G) ist das Integral mit dem kleinsten Wert, da seine Integrationsgrenzen am weitesten in den Minusbereich gehen.

(B) ist das Integral mit dem größten Wert, da wenn man die untere Integrationsgrenze von der oberen abzieht, dort der größte/positivste Wert ist.

b) $(A) = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{2}\cdot 9 - \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$(B) = [x]_{-4}^{7} = 7 + 4 = 11$

$(C) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}\overline{3}$

$(D) = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{4}\cdot 81 - \frac{1}{4}\cdot 81 = 0$

$(E) = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{0} = 0 - \frac{1}{5}\cdot(-32) = \frac{32}{5} = 6{,}4$

$(F) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$

$(G) = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-4}^{-3} = \frac{1}{4}\cdot 81 - \frac{1}{4}\cdot 256 = \frac{1}{4}\cdot(81 - 256) = \frac{1}{4}\cdot(-175) = -\frac{175}{4} = -43{,}75$

$(H) = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{6}\cdot 64 - \frac{1}{6} = \frac{63}{6} = 10{,}5$

$(I) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$

$(J) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{5} = \frac{125}{3} + \frac{64}{3} = \frac{189}{3} = 63 \Rightarrow$ (B) ist nicht das größte Integral, sondern (J)

c) (D) und (I) kann man ohne Rechnung lösen (wegen der Symmetriegesetze) und sind somit die leichtesten Aufgaben. (B) ist ebenso leicht, weil man beim Einsetzen nichts zu rechnen braucht

Abb. 2: Eine Schülerlösung zur produktiven Integrationsaufgabe

Problemlösende Aufgabenformate gibt es bereits in vielfältiger Form. Insbesondere in der gymnasialen Oberstufe gibt es einen häufig eingeschlagenen Weg, eine Aufgabenstellung in dieser Richtung zu variieren, nämlich das Hinzufügen von Parametern. So wird aus einer Funktion eine Funktionenschar und aus einer Gerade eine Geradenschar. Die nötigen Verfahren werden dadurch anspruchsvoller, weil nicht mehr allein mit Zahlen, sondern mit algebraischen Termen gearbeitet werden muss, um dann abschließend eine Frage wie „Für welche Parameter …" zu beantworten. Solche Aufgabenformate werden oft als Unterscheidungsmerkmal für ein grundlegendes und ein erhöhtes Niveau gewählt und werden in Prüfungsanforderungen „kanonisiert" und dadurch zu definiertem Lernstoff. Die hier vorgeschlagenen Problemlöseaufgaben für das intelligente Üben sind allerdings von anderer Art: Das zu lösende Problem soll nicht primär den technischen Schwierigkeitsgrad erhöhen, sondern einen Problemzusammenhang schaffen, in dem das wiederholende Üben einen mathematischen Sinn bekommt. Das Problem sollte technisch so einfach sein, dass es den Zugang für Schülerinnen und Schüler aller Leistungsniveaus ermöglicht. Schwächere Schülerinnen und Schüler sollen bei Problemlöseaufgaben gerade nicht vom Üben abgehalten werden.

3 Differenzieren beim Üben

Nicht nur beim Erkunden, sondern auch beim Üben will man leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern etwas bieten, ohne leistungsschwächere abzuhängen. Wie gewährleistet man hier, dass das Üben nicht alle Lernenden zu denselben Arbeiten „verdonnert", nicht die Starken langweilt und die Schwachen überfordert? Zentrale Anforderung an ein intelligentes Üben ist die Effektivität hinsichtlich der gesetzten Übeziele, d. h. dass die Übezeit auf bestmöglich lernwirksame Weise verwendet wird. Dies setzt eine gewisse Adaptivität voraus und führt direkt auf die Frage nach dem Differenzierungsvermögen von Aufgaben. Die fachspezifischen Herausforderungen liegen in der wohldosierten Differenzierung nach Lernzielen: Welches sind die Kompetenzen, über die *alle* Lernenden sicher verfügen müssen? Welche Ebenen des Übens können darüber hinaus erreicht werden (z. B. das Erkennen vertiefter begrifflicher Zusammenhänge oder das kreative Weiterdenken in Mustern und Strukturen)? Dies soll an konkreten Beispielen zu verschiedenen Formen des Differenzierens beim Üben erläutert werden.

Bei *geschlossen differenzierenden Übeformaten* bietet man Lernenden unterschiedliche, möglichst auf ihren Bedarf abgestimmte Übungsaufgaben an (wie z. B. die wohlbekannten „Sternchenaufgaben"). Dieses Vorgehen erlaubt Individualisierungen hinsichtlich aller relevanten Aspekte (Lerntempo, Zugangsweise, Anspruchsniveau, Lerninhalt). Aus mathematikdidaktischer Sicht ist es zentral, bei geschlossener Differenzierung durch Aufgaben nicht nur deren technische Kompliziertheit auszuschöpfen (also z. B. durch größere Zahlen oder kompliziertere Terme o. ä.), sondern alle zur Verfügung stehenden schwierigkeitsgenerierenden Merkmale (Büchter & Leuders, 2007; Hußmann & Prediger, 2007; Leuders, 2009) zu berücksichtigen:

- Art der kognitiven Aktivitäten (z. B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten nach dem operativen Prinzip, Explorieren, Formulieren, Verallgemeinern, Begründen),
- Komplexitätsgrad („Wie übersichtlich ist die Situation und wie vielschrittig der Lösungsweg?"),
- sprachliche Komplexität der Aufgabenstellung („Welche Hürden im Textverständnis müssen überwunden werden?"),

- Grad der Formalisierung der Aufgabenstellung und der geforderten Lösung („Erfordert die Aufgabe formale Schreibweisen?“, „Wie vertraut sind diese?“),
- Vorstrukturiertheit der Lösung versus Offenheit („Inwieweit ist durch die Enge der Aufgabenstellung bereits alle Vorstrukturierungsarbeit geleistet?“) und
- Bekanntheitsgrad der Mittel (abhängig von der Positionierung im Lernprozess).

Die weiter oben beschriebene Technik, Aufgaben durch Parameter zu erweitern, ist eine Möglichkeit, Aufgaben auf unterschiedlichem Niveau zu erzeugen. Dabei verändern sich vor allem die kognitiven Aktivitäten und der Abstraktheitsgrad. Im Prinzip bieten die genannten Merkmale die Möglichkeit, eine gegebene Aufgabe auf unterschiedliche Weise systematisch zu variieren (dabei kann man jeweils auch die umgekehrte Richtung der Variation einschlagen):

Ausgangsaufgabe: Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = e^x \cdot (2x + 1)$. Bestimmen Sie die zweite, dritte und vierte Ableitung.

Größere Kompliziertheit (z. B. durch Vielschrittigkeit): Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = 7e^{3x} \cdot (2x^2 + 3x + 1)$. Bestimmen Sie die zweite, dritte und vierte Ableitung.

Größere Abstraktheit: Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = h(x) \cdot e^x$. Bestimmen Sie die zweite, dritte und vierte Ableitung.

Höhere Komplexität (z. B. durch komplexere Struktur): Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = e^x \cdot (2x + 1)$. Stellen Sie eine Formel für die n-te Ableitung der Funktion f auf.

Höhere Formalisierung: Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = e^x \cdot (2x + 1)$. Stellen Sie eine Formel für $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ mit $f^{(0)}(x) = f(x)$ auf und beweisen Sie sie durch vollständige Induktion.

Stärkere Anleitung: Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = e^x \cdot (2x + 1)$. Bestimmen Sie die zweite, dritte und vierte Ableitung. Versuchen Sie dann eine Formel für die n-te Ableitung der Funktion f aufzustellen. Überprüfen Sie ihre Formel durch Ableiten: Ist die Ableitung der Formel für n wieder die Formel für $n + 1$?

Größere Offenheit: Die Funktion $f(x) = e^x \cdot 2x$ verändert sich beim Ableiten „ein wenig“. Untersuchen Sie, nach welchem Muster sie sich verändert, wenn man sie immer weiter ableitet. Stellen Sie eine Vermutung auf und versuchen Sie, diese zu begründen. Untersuchen Sie auf ähnliche Weise weitere Funktionen, die sich beim Ableiten „ein wenig“ verändern.

Aufgabe 5: Verschiedene, gezielte Variationen einer Ausgangsaufgabe

Insgesamt allerdings stellt die Verwendung von ausschließlich geschlossen differenzierenden Übungsphasen die Lehrperson vor die diagnostische Herausforderung, die für die jeweilige Lerngruppe geeignete Auswahl zu finden. Diesem Ansatz sind also Grenzen durch die diagnostischen Möglichkeiten und die Unterrichtsökonomie gesetzt. Setzt man die geschlosseneren Formate hingegen pragmatisch „im Gleichschritt“ für die ganze Klasse ein – und dies entspricht der gängigen Unterrichtspraxis – sind viele Lernende über- oder unterfordert.

Ges*tuft differenzierende Übeformate* können dieses Problem mildern, indem sie Aufgaben auf verschiedenen Niveaus koppeln (Büchter & Leuders, 2007; „Blütenaufgabe“ bei Bruder

& Reibold, 2012). Eher geschlossene, angeleitete Teilaufgaben erlauben jedem Lernenden den Einstieg in einen Problemkontext. Beim Fortschreiten von Teilaufgabe zu Teilaufgabe erhöhen sich die Herausforderungen vor allem durch eine Öffnung der Aufgaben für ganz unterschiedliche Bearbeitungswege. Dieser Ansatz ist eng verwandt mit dem nächsten, gewissermaßen radikalsten Format:

Selbstdifferenzierende Übeformate legen die Lernenden nicht auf ein Bearbeitungsniveau fest, sondern lassen von Anfang an verschiedene Bearbeitungstiefen und Reflexionsniveaus zu. Oft erlauben sie auch deutlich weitergehende kreative Bearbeitungen und bieten somit Möglichkeiten zur Förderung begabter Schülerinnen und Schüler. Aufgabe 2 hat diese Eigenschaft. Für die stärkeren oder technisch schon sicheren Schülerinnen und Schüler gibt es hier die Möglichkeit vielfältiger weitergehender mathematischer Entdeckungen. Diese kann man zusätzlich durch Impulse der Lehrkraft unterstützen und z. B. fragen: „Gibt es zu jeder Funktion u eine andere Funktion v, die durch Verkettung eine besonders einfache Funktion, eine konstante Funktion oder die identische Funktion $f(x) = x$ erzeugt? Wie findet man sie? Ist es egal, in welcher Reihenfolge man verkettet? Beschreiben Sie, wie Sie vorgegangen sind.“

Die Beispiele zeigen den Vorzug selbstdifferenzierter Übeformate: Neben der Offenheit für die Bearbeitung auf verschiedenen Niveaustufen puffern sie die Bearbeitung auch zeitlich, bieten stärkeren Lernenden vertiefte Verstehensoptionen an, ohne sie im Lernprozess zu weit vorauseilen zu lassen, und fördern schließlich bei allen Lernenden prozessbezogene Kompetenzen. Diese Beispiele und Überlegungen verdeutlichen, wie sehr solche Differenzierungsansätze mit fachspezifischen Konzepten verwoben sind und was mit „Offenheit vom Fach“ (Wittmann, 1996) gemeint ist. Die Adaptivität solcher Aufgabenformate ist in der Fachdidaktik auf der Seite der Konstruktionsprinzipien ausführlich beschrieben und ein sinnvoller Einsatz in der Praxis wird aus vielen Modellprojekten berichtet, weil sie den Umgang mit einer große Niveaustreuung innerhalb einer Klasse ermöglichen (Hengartner, Hirt & Wälti, 2006; Krauthausen & Scherer, 2010).

Eine Grenze der Differenzierung durch selbstdifferenzierende Aufgaben wird deutlich bei vertieftem Förderbedarf: Wenn eine Lerngruppe noch substantiell am Grundverständnis der Inhalte arbeiten muss, während andere bereits problemlösend und abstrahierend mit diesen Inhalten umgehen können, ist dies nicht auf der Aufgabenebene alleine zu lösen, dann sind spezifische Förderprogramme notwendig, die durch geeignete Unterrichtsstrukturen verankert sein müssen.

4 Formen des Übens in der gymnasialen Oberstufe

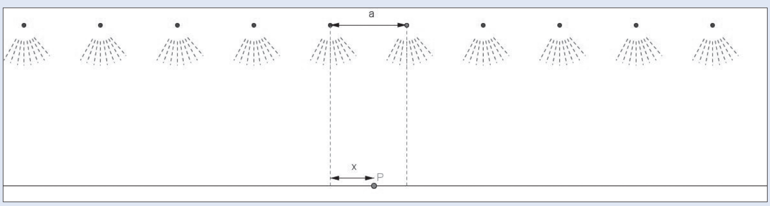
Hinsichtlich der methodischen Gestaltung haben sich Unterrichtsstrukturen bewährt, die die Eigenverantwortlichkeit des Lernens stützen (Bönsch, 2004; Barzel, Büchter & Leuders, 2007; Prediger et al., 2006). Gerade in der gymnasialen Oberstufe muss es verstärkt möglich sein, Lernenden Eigenverantwortung bei der Auswahl von Aufgaben zu geben, um so ihre Autonomieerfahrungen beim Üben zu erhöhen (Deci & Ryan, 1993). Voraussetzung dabei ist, dass sie in der Lage sind, ihre Fähigkeiten angemessen einzuschätzen. Eine in vielen Unterrichtsversuchen bewährte Struktur zur Ermöglichung von Transparenz und Zielorientierung bieten die sogenannten Checklisten (z. B. Prediger, 2007). Diese können für Lernende und Lehrende die Lernziele einer Unterrichtseinheit transparent darstellen in Form von Kompetenzen, illustrierenden Aufgaben, einer Möglichkeit zur Selbsteinschätzung sowie einem Angebot von passenden Übungsaufgaben.

Die bisher in diesem Beitrag dargestellten Aufgabenformate haben eher das effektive Üben ganz eng eingegrenzter Teilkompetenzen im Blick gehabt. Geübt wird aber auch beim „Aus-üben", also beim flexiblen und nicht angeleiteten Anwenden der eigenen Kompetenzen. Hierzu gibt es Aufgabenformate, die in der gymnasialen Oberstufe ihr volles Potential entfalten – die aber auch voraussetzen, dass man sich im Unterricht Freiräume für solche mathematischen Arbeitsweisen offenhält. Zwei solche Methoden für das „Aus-Üben" sind die folgenden:

Bei der Methode *Aufgabenvariation* sind es nicht etwa die Lehrkräfte, die – wie oben mehrfach gesehen – durch Variieren neue Aufgaben entwickeln. Es sind vielmehr die Lernenden selbst, die durch Variieren von Aufgaben neue mathematische Fragestellungen generieren und dann untersuchen (Schupp, 2002). Dabei ist nicht immer vorherzusehen, bei welchem mathematischen Schwierigkeitsgrad sie landen. Dennoch ist dieses Vorgehen ein guter Rahmen, um die mathematischen Kompetenzen, die man sich in einem Bereich angeeignet hat, zu üben und zu vertiefen. Gleichzeitig erfahren die Lernenden dabei, dass Mathematik ein Feld für die Entfaltung von Kreativität und für Überraschungen ist.

Eine weitere Methode des Übens ist ein projektartiges Vorgehen, das mit komplexeren Aufgaben zum Üben von inhaltsbezogenen Kompetenzen, aber auch von allgemeinen Kompetenzen wie Kommunizieren oder Modellieren geeignet ist. Sehr gute Beispiele findet man im Umfeld der niederländischen so genannten „Realistic Math Education". Ins Deutsche übersetzte Beispiele für die Aufgaben findet man u. a. bei LFS (2007) oder Westermann & Leuders (2007); hier ein Beispiel (auch online unter //www.geogebratube.org/material/show/id/160959):

Eine wichtige Anforderung, die an eine Straßenbeleuchtung gestellt wird, ist, dass es überall entlang des erleuchteten Weges ungefähr gleich hell ist, dass es also nicht z. B. in der Mitte zwischen zwei Straßenlaternen viel dunkler ist als unter einer Laterne. Um anzugeben, wie hell es an einer bestimmten Stelle ist, verwendet man den Begriff *Beleuchtungsstärke* (gemessen in Lux). Für einen neu anzulegenden Weg hat man verschiedene Möglichkeiten für den Abstand von zwei aufeinander folgenden Laternen untersucht. Für eine Anzahl von Punkten zwischen zwei Laternen hat man die Beleuchtungsstärke berechnet. Hierbei bedeutet a den Abstand zwischen zwei Laternen (in Metern), und x gibt an, wie viel Meter man von einem Punkt genau unter einer der Laternen entfernt ist. Siehe hierzu die folgende Abbildung :



Für die Beleuchtungsstärke S einer Lampe im Abstand r gilt $S = \frac{K}{r^3}$ mit einer Konstanten K, die von der Art der Lampe abhängt. Untersuchen Sie, wie Lampen aufgehängt werden müssen, damit die Beleuchtungsstärke zwischen zwei Lampen nicht zu stark absinkt.

Aufgabe 6: Beleuchtung

5 Fazit

Der Beitrag sollte verdeutlichen, dass das Üben in der gymnasialen Oberstufe eine große Breite von Kompetenzen in den Blick nehmen muss. Für diesen Zweck gibt es eine ganze Reihe von Aufgabenformaten, die das Sichern von technischen Fertigkeiten und von Faktenwissen mit Reflektieren und dem Üben von allgemeinen mathematischen Kompetenzen verbinden. Diese Aufgabenformate, die bereits eine lange Tradition in der Grundschuldidaktik haben, können noch weitaus regelmäßiger auch in der Mittel- und Oberstufe eingesetzt werden, denn sie verleihen dem Üben einen Charakter, der stärker dem entspricht, was wir unter reflektiertem mathematischem Denken und Arbeiten verstehen.

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1977). *Grundformen des Lehrens*. Stuttgart: Klett.

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2007). *Mathematik – Methodik – Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen.

Bönsch, M. (2004). *Intelligente Unterrichtsstrukturen. Eine Einführung in die Differenzierung*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Bruder, R. & Reibold, J. (2012). Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 67–92). Heilbronn: Verlag Julius Klinkhardt.

Büchter, A. & Leuders, T. (2007). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen.

Deci, E. & Ryan, R. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik, 39,* 223–238.

Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B. & Primarschulteam Lupsingen (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Zürich: Verlag Klett und Balmer.

Heymann, H.-W. (1998). Üben und Wiederholen – neu betrachtet. *Pädagogik, 50* (10), 7–11.

Heymann, H.-W. (2005). Was macht Üben „intelligent"? *Pädagogik, 57* (11), 6–10.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2007): Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49* (17), 2–8.

Klafki, W. (1985). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Weinheim: Beltz.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen*. Kiel: IPN.

Leuders, T. (2006). Reflektierendes Üben mit Plantagenaufgaben. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU), 59* (5), 276–284.

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. (2012). Einüben oder Ausüben? Übekonzepte im Mathematikunterricht. *Pädagogik, 64* (12), 17–21.

Leuders, T. & Prediger, S. (2012). „Differenziert Differenzieren" – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35–66). Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

LFS (2007) = Landesinstitut für Schule Soest. (2007). *Offene und anwendungsbezogene Aufgaben aus den Niederlanden.* Stuttgart: Klett.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (Hrsg.). (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Band 1, 2). Stuttgart: Klett.

Paradies, L. & Linser, H. J. (2001). *Differenzieren im Unterricht.* Berlin: Cornelsen.

Prediger, S., Bialek, S., Fernholz, J., Heckmann, L., Kraatz-Röper, A. & Vernay, R. (2006). *Eigenverantwortliches Lernen auf vielfältigen Wegen – Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht.* Endbericht des Schulbegleitforschungsprojekts 165. Bremen: Landesinstitut für Schule.

Renkl, A. (2000): Automatisierung allein reicht nicht aus: Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive. In R. Meier, U. Rampillon, U. Sandfuchs & L. Stäudel (Hrsg.), *Üben und Wiederholen (Jahresheft 2000)* (S. 16–19). Seelze: Friedrich Verlag.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sensemaking in mathematics. In National Council of Teachers of Mathematics & D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334–370). New York: MacMillan.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen (Aufgabenvariation im Mathematikunterricht).* Hildesheim: Franzbecker.

Selter, C. (1995). Entdeckend üben – übend entdecken. *Grundschule, 27* (5), 30–34.

Weinert, F. E. (1996). Lerntheorien und Instruktionsmodelle. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie* (Themenbereich D, Serie I, Band 2, S. 1–48). Göttingen: Hogrefe.

Westermann, B. & Leuders, T. (2007). Blick über den Zaun – Mathematik in den Niederlanden. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49* (15), 38–42.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren, 2,* 4–16.

Wittmann, E. C. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. *Grundschulunterricht, 6,* 3–7.

Wittmann, E. C. (1992). Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Band 1, S. 152–166). Stuttgart: Klett.

17. Grundsätzliches und Konkretes zu Aufgaben des Typs „Bestimme die Funktionsgleichung“

Michael Neubrand

Aufgaben des Typs „Bestimme die Funktionsgleichung“ kommen im Analysis-Unterricht häufig vor. Der folgende Beitrag umreißt den Sinn solcher Aufgaben und arbeitet grundsätzliche Probleme anhand einer bei der Aufgabenentwicklung für die Bildungsstandards konkret diskutierten Aufgabe heraus. Ergänzend werden Ideen für mögliche Weiterentwicklungen solcher Aufgaben vorgeschlagen.

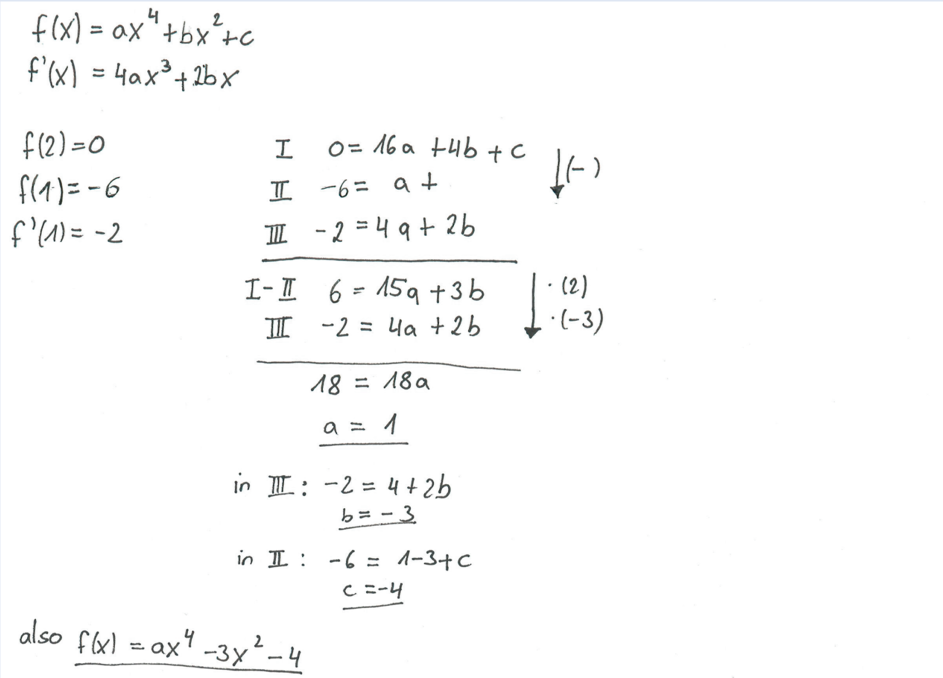
1 Zur Entstehung dieses Beitrags

Der folgende Text entstand ursprünglich im Rahmen der mathematikdidaktischen Bewertung der von den Entwicklergruppen eingereichten Aufgabenentwürfe im Rahmen der Entwicklung der Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Es sollten also seinerzeit (im Februar 2012) die eingereichten Aufgaben möglichst konkret, aber gleichzeitig auch exemplarisch-grundsätzlich und produktiv für eine Weiterentwicklung besprochen und diskutiert werden. Diese Intention soll auch in dem nun nachträglich redigierten Text möglichst lebendig durchscheinen. Ich behalte daher gelegentlich das „ich“ als Stilmerkmal bei, um den Vorschlagscharakter des Textes und die Notwendigkeit weiterer Diskussionen zu betonen. Auf diese Weise soll zugleich ein gewisser Einblick in den durchaus komplexen Prozess der Aufgabenentwicklung für die Bildungsstandards zur Allgemeinen Hochschulreife gegeben werden.

2 Die ursprüngliche Aufgabe

Die ursprünglich im Team der Aufgabenentwickler zur Diskussion eingereichte Aufgabe lautete:

Die folgende Abbildung zeigt eine Schülerlösung zur Rekonstruktion einer Funktionsgleichung.



$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$f(2) = 0$ I $0 = 16a + 4b + c$ $(-)$

$f(1) = -6$ II $-6 = a +$

$f'(1) = -2$ III $-2 = 4a + 2b$

I−II $6 = 15a + 3b$ $\cdot(2)$

III $-2 = 4a + 2b$ $\cdot(-3)$

$18 = 18a$

$a = 1$

in III: $-2 = 4 + 2b$

$b = -3$

in II: $-6 = 1 - 3 + c$

$c = -4$

also $f(x) = ax^4 - 3x^2 - 4$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aufgabentexte zu der abgebildeten Schülerlösung gehören könnten!

Aufgabentext	wahr	falsch
Der Graph einer ganzrationalen zur y-Achse symmetrischen Funktion vierten Grades hat bei $x = 2$ eine Nullstelle. Der Graph von f hat im Punkt P(1|–6) eine Wendetangente mit dem Anstieg 2.	☐	☐
Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat bei $x = 2$ eine Nullstelle. Der Graph von f hat im Punkt P(1|–6) eine Tangente mit der Steigung –2.	☐	☐
Eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, hat bei $x = 2$ eine Nullstelle. Der Graph von f hat im Punkt P(1|–6) eine Tangente, die senkrecht zur Geraden $y = 0{,}5x + 2$ steht.	☐	☐
Eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, verläuft durch die Punkte A(2|0), B(1|–6) und C(1|–2).	☐	☐

Aufgabe 1: Aufgabenvorschlag „Bestimme die Funktionsgleichung“

Die genannte Aufgabe beschäftigt sich offenbar mit dem allgemein bekannten und in zahlreichen Fällen – im alltäglichen Mathematikunterricht ebenso wie in Schulbüchern – benutzten Aufgabentyp: „Bestimme die Funktionsgleichung, wenn die Funktionsklasse und einige Informationen über den Verlauf des Funktionsgraphen vorliegen“. Dieser Typ kommt in dieser Aufgabe geradezu in Reinform vor, allerdings in origineller, freilich auch zu hinterfragender Weise verfremdet durch die Analyse einer Schülerlösung. Dies gibt Gelegenheit, auf diesen Aufgabentyp im Lichte der Bildungsstandards und des Lehrens und Lernens von Mathematik in der gymnasialen Oberstufe ausführlich und grundsätzlich einzugehen. Zusätzlich will ich auch versuchen, die Aufgabe aus sich heraus weiterzuentwickeln und weitere konkrete Ideen zur Umsetzung des in Frage stehenden Aufgabentyps beizusteuern.

3 Zum „Sinn“ der Bestimme-die-Funktionsgleichung-Aufgaben

Nicht jede Aufgabe kann man so gestalten, dass eine bestimmte Grundidee direkt und nur für sich allein abgebildet wird; dazu haben die Kontexte und die Situationen, die in einer Aufgabe angesprochen werden, immer auch ihr je eigenes Gewicht. Aber bei Aufgaben eines ganz bestimmten Typs kann man sich fragen (und das gilt gleichermaßen, ob die Aufgabe gestellt oder bewertet, nur gelesen oder sogar gelöst werden soll), wofür die Aufgaben dieses Typs stehen, welche Ziele verfolgt werden, welche Kompetenzen auf lange Sicht damit ausgebildet werden sollen.

Hinter den Aufgaben des Typs „Bestimme die Funktionsgleichung“ können zwei Grundintentionen stecken:

Lokal: Man braucht die Parameter der Funktion, weil man einen Kontext hat, den man mittels einer bestimmten Funktionenklasse modellieren möchte. Dann steht der Kontext im Mittelpunkt (Beispiel: Die Schwankungen der Durchschnittstemperaturen im Jahresverlauf mit einer Sinus-Funktion modellieren), und der mathematische Teil der Aufgabe dient vorwiegend dem Zweck, den Kontext mathematisch einzubinden.

An Kompetenzen erwerben Schülerinnen und Schüler dabei die Fähigkeiten, (a) sich aktiv des eigenen Wissens zu bedienen („Welche Funktionen-Klassen kenne ich, welche passen in den aktuellen Kontext, welche will ich nehmen?“), aber auch (b) so flexibel zu sein, dass sie Urteile über die Angemessenheit der gewählten Funktionen-Klasse für genau diesen Kontext fällen können („Periodische Verläufe erfasst man vorteilhafterweise über eine angepasste Sinus-Funktion!“).

Global: Es gibt noch einen anderen Gesichtspunkt, eine viel grundsätzlichere Idee, die mit solchen Aufgaben transportiert werden kann: Die Differentialrechnung gibt die Möglichkeit, aus einigen wenigen Informationen über die Kurve die ganze Funktion zurück zu erschließen, vorausgesetzt man sucht in einer ganz bestimmten Funktionenklasse, das heißt in unserem Aufgabenbeispiel bei den „geraden Polynomen vierten Grades“. Das Besondere ist nun, dass diese „Informationen“ nicht nur Punkte sein können, durch die der Funktionsgraph verläuft, sondern auch andere Arten des Verhaltens einer Funktion, wie z. B. die Steigung in einem Punkt, ein Extremum an bestimmter Stelle usw.

Die grundlegende Idee, aus dem Verhalten an einigen Stellen die ganze Funktion erschließen zu können, ist für die Analysis geradezu charakteristisch (Danckwerts & Vogel, 2006). So approximieren die Ableitungen in diesem Sinne die Funktion in einer ganzen Umgebung; das ist die Idee der Taylorreihe (Danckwerts & Vogel, 1991), die freilich weit über die Standards hinausweist. Auch die Inter- und Extrapolationsaufgaben gehören hierher. Die Splines sind in diesem Zusammenhang nichts anderes als eine ganz bestimmte Funktionenklasse mit gewissen „guten“ Eigenschaften. Bei dem hier debattierten Aufgabentyp kommt nur ein ganz kleiner, dafür aber eben leicht handhabbarer Ausschnitt aus dieser Grundidee vor. Dennoch (besser: gerade deshalb) sollte man hinter den Aufgaben dieses Typs immer auch diese Grundidee sozusagen durchschimmern sehen. Das ist dann eine andere Art von „kontextueller“ Einbindung, die solche Aufgaben sinnvoll machen kann.

Auch hier werden Kompetenzen ausgebildet: Flexibel mit dem ganzen Vorrat an Funktionen umgehen können, den man sich im Laufe der Zeit (in der Schule) erarbeitet hat, und einsehen, dass unterschiedliche Funktionen(-Klassen) unterschiedliche Eigenschaften haben können und nicht alle die gleichen (beispielsweise: erst ab kubischer Funktion gibt es das Phänomen Wendepunkt, u. dgl.). Das sind Kompetenzen, die z. B. Weinert (1998) als den Erwerb eines hochgradig intern vernetzten inhaltlichen Wissens bezeichnet. Dies ist die Voraussetzung für effektives Weiterlernen. Es ist auch z. B. die Grundlage dafür, dass Abiturientinnen und Abiturienten, die nicht(!) Mathematik studieren wollen, aber dennoch Mathematik als Werkzeug brauchen, diese Werkzeuge verständig einsetzen können; die „technische Rechnerei“ nimmt ihnen die jeweils domänenspezifische Software ab, aber das Verständnis für Funktionen (die Typen, die es gibt, die unterschiedlichen Arten, über Wachstum zu sprechen, die grundlegenden Eigenschaften usw.) müssen sie sich in der Schule zunächst gedanklich erarbeitet haben.

Resümierend zu diesen Überlegungen: Einer der roten Fäden durch die Bildungsstandards von der Grundschule bis zur Allgemeinen Hochschulreife ist sicher der, dass man im Mathematikunterricht (wie in jedem anderen Unterricht auch) auf den *Sinn* zu achten hat. Und *Sinn* bei den „Bestimme-die-Funktionsgleichung“-Aufgaben hat sowohl kontextuelle wie innermathematische Ausprägungen.

4 Die Absicht bei dieser Aufgabe und deren Unterlaufen im Lösungsprozess

Also: Auch bei den Bestimme-die-Funktionsgleichung-Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler wenigstens noch ahnen können, auf welche Grundideen sie zurückgreifen und welches die Kompetenzen sein können, die man damit ausbilden will und kann. In diesem Licht muss man die vorliegende Aufgabe jetzt sehen. Wenn man bei Aufgaben des Bestimme-die-Funktionsgleichung-Typs alles wie gewohnt in traditioneller Weise durch-rechnen lässt, könnte es immerhin noch sein, dass manche Schülerinnen oder Schüler Bruchstücke der genannten Grundideen noch erkennen und inhaltlich mitdenken, vorausgesetzt im Mathematikunterricht wird so etwas ernstgenommen und thematisiert.

Was aber wird nun in dieser Aufgabe – in guter und origineller Absicht; ich komme mehrfach darauf zurück – den Schülerinnen und Schülern abverlangt (vgl. Aufgabe 1)? Das Ganze ist in der vorliegenden Form möglicherweise nur ein Puzzle-Spiel. Man kann die Aufgabe weitgehend ohne Vorstellung davon beantworten, dass man von Funktionen und ihren Eigenschaften redet. Ich mache eine solche „Lösung“ hier einmal vor:

Zeile 1: Es kommt „Wende-…“ vor, und keine zweite Ableitung: Passt nicht. Ich verwerfe! – *Zeile 2:* Beim 4. Grad kommen im Normalfall immer *a, b, c, d, e* als Koeffizienten vor, nicht nur wie in der Schülerlösung *a, b, c*. Passt nicht. Ich verwerfe! (Man beachte: Ich (als Schüler) habe nichts „gedacht“, was auch nur annähernd so etwas wie „symmetrische Funktion“, „gerade Funktion“ bedeuten und implizieren könnte! Nur dass weniger als die sonst üblichen Parameter vorkommen, wird konstatiert.) – *Zeile 4:* In der Lösung kommt doch auch noch die Ableitung vor, hier in der Tabelle jetzt nicht mehr. Passt nicht. Ich verwerfe! (Ich räume ein: Hier kommt noch am ehesten eine inhaltliche Überlegung zum Zuge) – Also ist es wohl Variante 3, denn eine Variante wird ja richtig sein.

Diese Lösung will ich keineswegs verdammen, sie ist ja „clever“, und, seien wir ehrlich, viele von uns würden es auf die Schnelle vielleicht ebenso machen. Mit dieser Aufgabe muss es also GRUNDSÄTZLICHE Probleme geben:

Sie stammt aus einer sehr guten, durch die Beschäftigung mit den Bildungsstandards sogar geförderten Absicht: Wir können nicht immer die üblichen rein reproduktiven Rechenaufgaben stellen (Bedingungen hinschreiben, Gleichungssystem bilden, Gleichungssystem lösen), sondern wir müssen uns bemühen, dass die Schülerinnen und Schüler auch ohne Rechnungen das Wesentliche einer Aufgabe erkennen und ohne Rechnung ihre Schlüsse ziehen können. „Begriffliches Vorgehen“ wurde das bei PISA genannt (Neubrand et al., 2001; Neubrand, 2004). Ja, das ist in der Tat eine sehr gute Absicht! ABER:

Eine Aufgabe wird nicht dadurch mathematisch-inhaltlich und begrifflich angereichert und damit für die Bildungsstandards eher tauglich, wenn man einfach nur das Rechnen als solches zurückschraubt. Es muss auch noch ein Problem-Kontext (innerhalb der Mathematik, oder von außerhalb) aufgestellt werden, in dem man die mathematischen Kenntnisse als Werkzeuge einsetzen kann, in dem die „Begriffe“ ihren Sinn und ihre Bedeutung bekommen. Weiter müssen die mathematischen Inhalte, die man „begrifflich angereichert“ in einer Aufgabe thematisieren will, dort wirklich kontext-bezogen gebraucht werden und eben nicht durch Cleverness umgangen werden können.

Man frage sich also: Wenn Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe lösen können, was „konnten“ sie dann wirklich: Haben sie über Funktionen nachdenken müssen? Haben sie eine inhaltliche Vorstellung von Ableitung gebraucht? Mussten sie wissen, was gerade Exponenten bewirken? Ruft man visuelle Vorstellungen von Funktionen und ihren Graphen ab? Musste man sich in dem unübersichtlichen Gewirr der vielen Funktionen irgendwie aktiv orientieren? Die Antwort auf alle diese Fragen ist tendenziell wohl eher nein. Aber dennoch ist die Aufgabe sehr lehrreich. Sie ist gerade in ihrer Problematik durchaus eines der Beispiele, die exemplarisch als „Leitplanke“ für die Umsetzung der Bildungsstandards wirken könnten, wie im nächsten Abschnitt ausgeführt wird.

5 Ein Versuch der Weiterentwicklung der Aufgabe

In diesem Abschnitt versuche ich nun, zunächst *aus der Aufgabe selbst heraus* eine Version zu entwickeln, die einige der soeben aufgezeigten Probleme vermeidet. Ich schiebe Kommentare dazwischen, damit man die Absichten hinter den Teilaufgaben erkennen kann. Es wird sichtbar, dass nun eher eine komplexe Aufgabe für den Mathematikunterricht beschrieben wird denn eine Testaufgabe (worauf in der ursprünglichen Aufgabe ja das Multiple-Choice Format hindeutet); aber das soll hier nicht stören. Es kommt auf die möglichen Gedanken der Schülerinnen und Schüler an, die eine solche Aufgabe evozieren soll. Ich versuche, dies in den dazwischen geschobenen Kommentaren konkret zu verdeutlichen. Klar ist zudem, dass es sich hier – wie dann auch in Abschnitt 6 – um Aufgaben-Ideen und nicht um schon voll ausgebildete und durchformulierte Aufgaben handelt.

Im Mathematikunterricht und in zahlreichen Schulbuchaufgaben kommt es immer wieder vor, dass man eine Funktion vollständig bestimmen soll, von der man nur einige wenige Eigenschaften (etwa: „der Graph geht durch einen bestimmten Punkt“; „der Graph hat an einer bestimmten Stelle die Steigung …“ usw.) kennt. Den Anfang der Lösung einer solchen Aufgabe im Heft einer Schülerin ist hier abgebildet:

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$f(2) = 0$	I	$0 = 16a + 4b + c$
$f(1) = -6$	II	$-6 = a +$
$f'(1) = -2$	III	$-2 = 4a + 2b$

Kommentar: Aus dem langen Schüler-Text, der in der ursprünglichen Aufgabe abgedruckt ist, würde ich also nur das nehmen, worauf es uns (mir ebenso wie dem Steller der Aufgabe) zentral ankommt: Welcher Ansatz wird gemacht und worauf baut dieser Ansatz auf? Sodann nehme ich nicht das Multiple-Choice-Format, denn das oben karikierte Ausschließungsverfahren soll vermieden werden. (Freilich gilt nicht generell, dass MC-Aufgaben „immer“ ohne inhaltliche Überlegungen zu lösen sind!)

a) *Unter welchen Funktionen sucht die Schülerin die Lösung? Geben Sie eine graphische und eine algebraische Beschreibung dieses Typs von Funktionen an.*

b) *Welche Eigenschaften sind der Schülerin in dieser Aufgabe vorgegeben worden? Schreiben Sie diese Eigenschaften so auf, dass einmal eine „geometrisch-graphische“ Ausdrucksweise (die „Kurve“, der „Funktionsgraph“, …) und einmal eine algebraische Darstellung („es muss dann als Gleichung gelten …“) verwendet wird.*

Kommentar: Die Absicht ist – ganz wie es auch in der ursprünglichen Aufgabe beabsichtigt war – die Schülerinnen und Schüler zu „zwingen“, die Bedeutung der Bedingungen zu erkennen und auszusprechen.

c) *Im Text der Schülerin geht es offenbar (s. erste Zeile) um ganzrationale Funktionen vierten Grades. Skizzieren Sie drei qualitativ möglichst unterschiedliche Beispiele (drei Farben) für Graphen solcher Funktionen in das gegebene Koordinatensystem.*
(es folgt ein Koordinatensystem ohne Achsenskalierungen)

d) *Hier sind drei x-y-Koordinatensysteme gezeichnet. Nach allen Informationen, die sich aus a) und b) ergeben, kann man nun bereits mögliche Funktionsgraphen der speziellen hier gesuchten Funktion skizzieren. Verwenden Sie in der Zeichnung die Eigenschaften, die die Schülerin in dem Text-Ausschnitt benutzt hat, und kennzeichnen Sie diese Eigenschaften graphisch im Koordinatensystem.*
(es folgen nebeneinander drei Koordinatensysteme ohne Achsenskalierungen)

Kommentar: Nun soll, mit Absicht ohne Rechnung, eine „Vorausschau" gemacht werden. Man soll sich über den ganzen Bestand der hier möglichen Funktionen klar werden. (Man erkennt, dass man lieber andere Zahlenwerte nimmt, wenn man derart graphisch vorgehen will, aber das wäre dann das Fein-Tuning der Aufgabe.)

e) *Berechnen Sie nun selbst die gesuchte Funktion. Bestätigen sich die vorab in d) gezeichneten Skizzen?*

f) *Was sollte man zusätzlich noch wissen, und was kann man nun auch schnell ausrechnen, um den Funktionsgraphen noch sicherer zeichnen zu können? (Geben Sie solche Eigenschaften an. Berechnen Sie die Werte.)*

Kommentar: Mit Absicht eine so offene Frage! Man macht die „Litanei der Ableitungen" ja zu bestimmten Zwecken, und nicht immer brauche ich alles bei jeder Funktion. Dafür muss man letztendlich auch ein Gefühl kriegen. Auch hier wird wieder „zunächst nichts gerechnet", sondern vorab entschieden, was man denn – wenn es schon sein muss – unbedingt (und leicht!) berechnen soll. Da wären wir wieder bei dem in der zu bewertenden Aufgabe beabsichtigten Zurückdrängen des Rechnens, aber nun sozusagen von der Intention her. Und erst dann kann sich zeigen, wie die Kenntnis der entsprechenden Werte, sagen wir z. B.: wo die Extrema liegen, tatsächlich zu einer genaueren Skizze des Graphen führt.

g) *In e) und f) wird sich ergeben, dass die gesuchte Funktion drei Extrema hat. Begründen Sie, dass Funktionen des Typs $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ immer entweder ein oder drei Extrema haben, dass also „kein Extremum" und „zwei Extrema" nie vorkommen. Argumentieren Sie sowohl graphisch als auch algebraisch über die Lösbarkeit von Gleichungen. In der Argumentation kann man der Einfachheit halber von $a > 0$ ausgehen.*

Kommentar: Das ist der „kleine Schritt ins Allgemeine", mithin eine typische Aufgabe aus dem höchsten „Anforderungsbereich III".

6 Einige weiterführende Aufgabenideen

Im Folgenden sollen nun einige Ideen genannt werden, die ausschließlich von der Art sind, dass das Rechnen zurückgedrängt und die qualitativ-inhaltlichen, oft (auch wenn ich keine Zeichnungen beifüge) visuell angereicherten Überlegungen in den Vordergrund geschoben werden, so wie ich es in Abschnitt 5 schon versucht habe. Es sind dies wiederum bewusst keine voll ausformulierten Aufgabentexte, sondern nur Skizzen mit Anregungspotential zu weiteren Ausgestaltungen. Wieder kommen jeweils Kommentare dazwischen, um die Intentionen und das Potential der Aufgaben zu umreißen.

- *Warum ist es so, dass durch zwei Punkte immer genau eine Gerade gezogen werden kann?*
  - *Machen Sie zuerst eine Skizze und argumentieren Sie geometrisch!*
  - *Argumentieren Sie nun mit Funktionsgleichungen und der Lösbarkeit von Gleichungen.*

Kommentar: Diese Aufgabe sieht zunächst ganz anders aus, als man erwarten mag. Aber es ist der Kern der ganzen Sache: Die Lösung und Lösbarkeit von Gleichungen drückt ein geometrisches Phänomen aus (s. den Beitrag von Filler, Kapitel 4 in diesem Band).

- *Warum ist es so, dass durch drei nicht kollineare Punkte immer genau eine (quadratische) Parabel(-Funktion) festgelegt ist (d. h. gezeichnet werden kann)?*
  - *Machen Sie zuerst eine Skizze und argumentieren Sie anhand der Skizze geometrisch-anschaulich! – Sie können die Argumente gern auch mit Software, die Funktionsgraphen zeichnen kann (CAS, DGS), illustrieren.*
    (Es hilft vielleicht bei der Argumentation, wenn zuerst von einer Situation ausgegangen wird, bei der zwei der Punkte auf gleicher Höhe über der x-Achse liegen)
  - *Argumentieren Sie nun mit Funktionsgleichungen und der Lösbarkeit von Gleichungen.*

Kommentar: Viel zu selten machen wir in diesem Kontext vermutlich Anknüpfungen an die Elementargeometrie aus dem 7./8./9. Schuljahr:

Zunächst noch weiter dorthin zurück: Ein Kreis ist durch drei Punkte bestimmt! – Klar, niemand macht das rechnerisch, sondern geometrisch! Aber: Der Kreis kann auch durch drei Parameter (die zwei Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius) analytisch als quadratische Gleichung beschrieben werden. Dann macht jeder Punkt, der auf dem Kreis liegen soll, eine Gleichung auf, und wenn alles gut geht, dann machen die drei Gleichungen die drei Unbekannten „dingfest“; es sind dies übrigens quadratische Gleichungen, denn die Koeffizienten sind nicht mehr „linear“ in der Gleichung enthalten wie bei den Polynomfunktionen, sondern quadratisch, wie man an der Gestalt der Gleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ erkennt. Es sollte bei solchen qualitativen Überlegungen bleiben. Keineswegs plädiere ich dafür, auf diese Weise, sagen wir, den Umkreisradius eines Dreiecks ausrechnen zu lassen!

So ist es auch bei der Parabel: Durch zwei Punkte (am einfachsten zu erkennen bei horizontaler Verbindungsstrecke) „sehe“ ich (ja, ganz konkret: Sehen und Argumentieren an Skizzen!) eine ganze Schar von Parabeln, alle mit Achse durch den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke, und wenn ein dritter Punkt auf der Parabel liegen soll, dann enthält eine und nur eine dieser Parabeln diesen Punkt (mit einem CAS/DGS anschauen! Ich stelle mir einen „Film“ vor, der zeigt, wie sich die Parabeln immer weiter öffnen, bis sie den dritten

Punkt erreichen). Dann gibt es also nur noch diese eine an diesen dritten Punkt angedockte Parabel, und das hat die die dritte Bedingung bewirkt!

- *Warum ist es so, dass es genügt, einen Punkt und einen anderen Punkt zusammen mit der Steigung dort (also eine Tangente) zu kennen, um eine (quadratische) Parabel(-Funktion) eindeutig festzulegen?*
  - *Machen Sie zuerst eine Skizze und argumentieren Sie anhand der Skizze geometrisch-anschaulich! – Man kann dies auch mit einem CAS/DGS illustrieren.*
  - *Argumentieren Sie nun mit Funktionsgleichungen und der Lösbarkeit von Gleichungen.*

Kommentar: Im Mathematikunterricht (und ggf. auch bei einer konkreten Aufgabe) könnte man z. B. mit einer waagrechten Tangente anfangen: Ich kenne also den Scheitel. Dann gibt es eine Schar sich öffnender Parabeln (Skizze! „Sehen“! CAS/DGS!). Eine solche Schar wird von genau einem Parameter gesteuert, diesmal kenne ich ihn sogar: das a; aber b und c sind an das a gebunden – das zeigt die Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn man sie qualitativ anschaut, oder direkt ein Ansatz mittels der Scheitelform. Eine weitere Gleichung genügt also! Und diese kommt aus der Bedingung, dass ein bestimmter Punkt auf der Kurve liegen soll. Und nun mit schräger Tangente und einem Punkt darauf: Da habe ich schon zwei Gleichungen verbraucht, eine mit der Funktion, eine mit der Ableitung. Und ich schaue mir wieder das Bild an (CAS/DGS!). Da läuft auch ein Film ab: zu jedem Zeitpunkt (t) gibt es genau eine Parabel, also ist wieder die ganze Schar von genau einem Parameter (dem t) abhängig. Fehlt noch genau eine Gleichung.

Hier sollte man auf keinen Fall konkrete Zahlen verwenden! Das würde alles wieder zunichtemachen. Immer ist auf das Wechselspiel von vielen Kurven („visuell“) und der Gleichung („algebraisch“), die die Vielfalt einschränkt, zu achten. Immer ist auf das Wechselspiel von Lösungsvielfalt und Anzahl der Gleichungen zu achten (wie analog bei den linearen Gleichungssystemen in der linearen Algebra).

In einer konkreten Aufgabe kann das dann so umgesetzt werden, dass man im Aufgabentext als „Hinführung“ formuliert: „… betrachte zunächst diese beiden Punkte …“ oder dergleichen. Und schließlich will man ja von den Schülerinnen und Schülern auf die zweite Frage etwas haben wie: „… die Parabel wird von drei Parametern bestimmt, nämlich a, b und c. Die Bedingung, dass die Kurve durch zwei gegebene Punkte verläuft, kann zwei Gleichungen liefern und damit im Allgemeinen zwei Unbekannte eliminieren, die Tangentenbedingung eine weitere …“.

Übrigens ist die Aufgabe d) im Abschnitt 5, die ja der ursprünglich zu bewertenden Aufgabe am meisten nachgemacht wurde, genau diesem Typ zuzuordnen: Punkt und Tangente gegeben. Nur wollen wir jetzt eben auch das „geometrische Bild“ dazu sehen!

Von hier aus gibt es zahlreiche Varianten, wie man zugleich geometrisch-visuell und algebraisch-rechnerisch fortfahren könnte: Schnittpunkte von Geraden und Funktionsgraphen, ausdrückliche Erzeugung nach Vorab-Skizzen von bestimmten Anzahlen von Schnittpunkten und vielen anderen mehr. Ich deute nur ein solches Beispiel an:

- *Reichen eine Tangente (mit Berührpunkt) und ein Punkt (auf der Kurve), um eine kubische Funktion festzulegen?*
  - *Argumentieren Sie graphisch (Skizze genügt) und mit der Lösbarkeit von Gleichungen.*

Kommentar: Wir sind hiermit erneut beim Typ der Bestimme-die-Funktionsgleichung-Aufgaben. Aber wir urteilen über die Lösbarkeit, wir rechnen die Lösung nicht konkret aus. In diesem Sinne geht es nun weiter, ab jetzt anhand einer konkreten Funktion.

- *Die einfachste kubische Funktion und die einfachste, an der man „alles Kubische“ sehen kann, ist vermutlich $y = (x + 1)\,x\,(x - 1)$; wir nennen sie daher „EKU“.*

  – *Skizzieren Sie die EKU – ohne Rechnereien, nur ihr qualitatives Verhalten! Begründen Sie, was man bereits an der hier gegebenen Form der Funktionsgleichung direkt ablesen kann.*

  – *Was wäre besonders nützlich zu wissen, um die Skizze an den entscheidenden Punkten noch besser machen zu können? Verschaffen Sie sich diese Daten durch entsprechende Gleichungen.*

  – *Schneiden Sie die EKU mit der Geraden $y = -x$. Was sagt das Ergebnis über den Verlauf des Graphen der EKU?*

Kommentar: Für die Skizze braucht man noch keine Ableitung. Aber dass die Steigung bei 0 tatsächlich –1 ist, ist eines der Fakten, die man gern auch rechnerisch bestätigt haben will. Andererseits: Wenn man herausbekommt, dass $y = -x$ und die EKU nur einen Schnittpunkt haben und nicht drei, dann muss diese Gerade die Tangente sein, und das ergibt auch den Wert der Ableitung.

  – *Schneiden Sie die EKU mit $y = x$. Ergebnis?*

  – *Schneiden Sie die EKU mit allen diesen zueinander parallelen Geraden: $y = x + b$. Für welche b ergeben sich 1 bzw. 2 bzw. 3 Schnittpunkte? Zuerst eine Skizze, dann ein Urteil, dann rechnen.*

  – *Wir schneiden EKU mit diesen parallelen Geraden: $y = \frac{1}{3}x + b$.*
  Machen Sie zuerst eine Skizze und formulieren Sie das Problem so, dass man gut mit der Ableitung der EKU rechnen kann. – Formulieren Sie nun das Problem allein mit der Schnitt-Gleichung. Welcher der beiden Wege ist leichter, welcher zeigt mehr „was da los ist“?

Kommentar: Diese Aufgabe bewirkt, dass man über das Verfahren (!) zur Lösung einer Gleichung nachdenken muss. Der rechnerisch naheliegende, aber geometrisch „blinde“ Ansatz über kubische Gleichungen ist für Schülerinnen und Schüler wohl nicht mehr zu bewältigen: Für welche b hat die kubische Gleichung $\frac{1}{3}x + b = x^3 - x$ eine oder zwei oder drei Lösungen? Aber das Entfalten des Problems aufgrund geometrischer Betrachtungen macht alles zugänglich. Es kommen nun nur noch quadratische Gleichungen vor (die Ableitung reduziert den Grad!), das andere machen der mächtige Begriff der Steigung und die Anschauung.

Und die Sache hat sozusagen kein Ende. Man kann zu Polynomfunktionen höherer Grade übergehen und wieder kombinierend visuell vs. algebraisch vorgehen. Die Details können hier offen bleiben.

Das eigentliche Problem bei der Konstruktion von solchen nicht-rechnerischen Aufgaben liegt darin, dass man durch die Aufgabenstellung verhindern muss, dass die Schülerinnen und Schüler nun doch wieder ins Rechnerisch-Schematische ausweichen: Vorher konnten sie sich in vordergründige Ausschließungsstrategien retten, jetzt besteht die Gefahr, dass nur noch „herumgeschwafelt“ und der mathematische Kern nicht präzise getroffen wird, kurz, dass nur beschrieben, nicht aber argumentiert wird. Das kann man (jedenfalls im Ansatz) verhindern (oder doch erschweren), wenn die Aufgabenstellung präzise und explizit einfordernd gestaltet wird, etwa durch genaue Anweisungen (viel genauer jedenfalls, als ich das in den obigen Skizzen gemacht habe!): „Verwende Variablen!“, „Schreibe die verwendeten Gleichungen in algebraischer Notation hin!“, „Prüfe, ob Dein Argument auch noch im Falle … gilt!“ u. ä. (vgl. dazu in anderem Zusammenhang Neubrand & Neubrand, 2012).

Literaturverzeichnis

Danckwerts, R. & Vogel, D. (1991). *Analysis für den Leistungskurs*. Stuttgart: Metzler.

Danckwerts, R. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Elsevier Spektrum.

Neubrand, M., Biehler, R., Blum, W., Cohors-Fresenborg, E., Flade, L., Knoche, N., Lind, D., Löding, W., Möller, G. & Wynands, A. (2001). Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – Berichtsteil, 33* (2), 45–59.

Neubrand, M. (Hrsg.). (2004). *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000*. Wiesbaden: VS-Verlag für Sozialwissenschaften.

Neubrand, J. & Neubrand, M. (2012). Argumentieren und Kommunizieren: Sind Explikationsaufgaben zur Erfassung geeignet? In W. Blum, R. Borromeo Ferri, K. Maaß (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität. Festschrift für Gabriele Kaiser* (S. 275–283). Wiesbaden: Springer-Spektrum.

Weinert, F. E. (1998). Neue Unterrichtskonzepte zwischen gesellschaftlichen Notwendigkeiten, pädagogischen Visionen und psychologischen Möglichkeiten. In Bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.), *Wissen und Werte für die Welt von morgen. Dokumentation zum Bildungskongress 29./30. April 1998 an der Ludwig-Maximilians-Universität München* (S. 101–125). München: Bayerisches Kultusministerium.

18. Die Aufgabe „Globe-Tower“: Einkleidung und Authentizität

Jürgen Kowalewski und Wolfgang Löding

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie kontextuelle Authentizität und Einkleidung mathematischer Sachverhalte in ihrem Zusammenwirken einen authentischen Lernprozess initiieren. Heuristisch geleitet durch die Konfrontation mit schon realisierter avantgardistischer Architektur werden die geometrischen Eigenschaften eines ungewöhnlichen fiktiven „Bauwerks“ mit vernetzten Methoden von analytischer Geometrie und Analysis exploriert und dabei auch Erkenntnisse über jene realen Bauten gewonnen. Damit kann die Aufgabe „Globe-Tower“ als Lernaufgabe für einen schülerzentrierten, forschenden Unterricht aber auch als Gegenstand einer Präsentationsleistung oder der Präsentationsprüfung im Abitur eingesetzt werden.

1 Die Aufgabe und ihr didaktisches Potential im Rahmen der Bildungsstandards

Globe-Tower: Ein neues Wahrzeichen für Hamburg

Aus dem Hanseatischen Anzeiger vom 2. 1. 2020:
Kaum ist zu Beginn des neuen Jahrzehnts das Eröffnungskonzert der weltberühmten Elb-Philharmonie unter den Jubelstürmen des Publikums mit Hamburgs Hymne „Heil dir Hammonia“ zu Ende gegangen, werden die Planungen des Senats der Freien und Hansestadt für das nächste Jahrhundert-Bauwerk öffentlich: Der 212 m hohe glasverkleidete Globe-Tower soll bis zu einer Höhe von 160 m 40 Stockwerke erhalten und gekrönt werden von einer 16 m im Radius messenden silberglänzenden Weltkugel. So entsteht ein Symbol, das die Welt auf den starken Schultern Hamburgs ruhen lässt. Grundfläche und Dachfläche des Turms werden gemäß der Abbildung des Entwurfs mit Flächeninhalten von 784 m² bzw. 196 m² quadratisch ausgeführt. Ihre Mittelpunkte werden ebenso wie der der Weltkugel zentral auf der vertikalen Symmetrieachse des Turms angeordnet. Die Führung der geraden Seitenkanten verleiht dem Globe-Tower eine elegante Drehung.
Während in der Weltkugel exklusive Eigentumswohnungen geplant sind, soll der Turm selbst gewerblich vermietet werden.

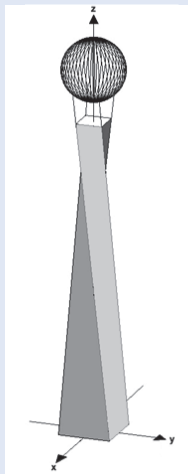


Abb. 1: Globe-Tower

Präsentieren Sie den Entwurf des Globe-Tower. Untersuchen Sie dazu seine architektonischen Eigenschaften. Vergleichen Sie seine Architektur mit der bereits realisierter „Twisted Towers“ sowie hyperbolischer Bauformen. Recherchieren Sie dazu im Internet. Erstellen Sie Riss- und Schnittzeichnungen. Entwickeln Sie auf dieser Grundlage ein Mietpreis-Konzept für den Globe-Tower.

Wenn Authentizität im Mathematikunterricht die Auseinandersetzung mit außerhalb von Schule konstituierten erfahrungsweltlichen Gegebenheiten, Ereignissen oder Problemstellungen meint, so ist offensichtlich, dass die vorgelegte Aufgabe solche kontextuelle Authentizität nicht beansprucht[1]. Denn es wird in ironisch-satirischer Verfremdung der Realität eine fiktive Situation in einer noch durchaus ungewissen Zukunft konstruiert, die keine „faire Chance" hat, tatsächlich stattzufinden (Palm, 2009, S. 9). Darin liegt Absicht, denn so wird kenntlich, dass nicht wirkliche Architektur und Statik betrieben werden sollen und nicht fälschlich eine unhintergehbare Differenz zwischen einer mit ihren inhaltlichen Möglichkeiten zwingend zu kurz greifenden Schulmathematik und professioneller mathematischer Praxis negiert wird. Die Aufgabe stellt aber einen Realitätsbezug in doppelter Weise her: Inhaltlich entwirft sie ein „Gebäude", dessen architektonische Idee in ähnlicher Weise in etlichen Bauwerken – in Hyperboloidkonstruktionen und sogenannten „Twisted Towers" – in aller Welt verwirklicht ist. Methodisch zielt sie die Simulation einer Präsentation an, wie sie vergleichbar z.B. in einem Architekturwettbewerb durchgeführt wird. Sie bezieht also authentische Objekte in die Untersuchung ein und erwartet mit Riss- und Schnittzeichnungen die Durchführung authentischer Verfahren aus der Architektur.

Die Aufgabe versteht sich auch als Einkleidung, der es darum geht, einen ungewöhnlichen geometrischen Körper vorstellbar zu machen, um Einsicht in seine Struktur und Eigenschaften zu ermöglichen (Jahnke, 2005, S. 272 f.). Es wird sich zeigen, dass seine architektonische Interpretation in besonderer Weise geeignet ist, diese Einsicht heuristisch zu fördern. Zentrale Idee ist es, seine Exploration zu leiten durch die Konfrontation mit den genannten realen Gebäudetypen und ihren geometrischen Eigenschaften, über die Informationen im Internet gefunden werden. Damit werden Fragen an die Mathematik des Körpers herausgefordert, die im Medium reiner Geometrie womöglich ungestellt blieben, wie auch umgekehrt Aspekte der Konstruktion jener Bauwerke einer weitergehenden Untersuchung zugeführt werden können[2].

Die Aufgabe ist insofern nicht offen, als wichtige Parameter des Globe-Tower eindeutig definiert und quantitativ bestimmt sind. Anlass zu einer – normativen – Modellierung bietet diese Aufgabe im Wesentlichen in der Entwicklung eines Mietpreis-Konzepts. Darüber hinaus offeriert sie aber vielfältige Möglichkeiten zu mathematischer Aktivität und zur Förderung bzw. Bewährung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Die Lernenden vernetzen Begriffe, Konzepte und Kompetenzen aus analytischer Geometrie und Analysis und entwickeln sie weiter. Indem die Aufgabe eine eigenständige Formulierung und Bearbeitung von Problemstellungen veranlasst und dabei unterschiedliche Lösungswege offen lässt, initiiert sie einen forschenden Lernprozess: Vermutungen werden aufgestellt, mathematisch bestätigt oder verworfen. Fragestellungen unterschiedlicher Reichweite und Qua-

1 Ob kontextuelle Authentizität überhaupt einer Aufgabe oder Lernsituation zugeschrieben werden kann, hängt von dem zugrundeliegenden Begriff von Authentizität ab: Wenn etwa Authentizität als nach verschiedenen Kategorien beschreibbare Qualität der schulischen Simulation realweltlicher Aufgabenstellungen angesehen wird, sind Aufgaben in unterschiedlicher Abstufung der Ausprägung von Authentizität möglich (Palm, 2009). Wenn hingegen ein der klassischen Definition von Authentizität als Auszeichnung des Originals gegenüber einer Kopie verpflichteter Begriff vertreten wird, ist offensichtlich, dass eine ja immer mit pädagogischer Intention formulierte Aufgabe im Ganzen nicht authentisch sein kann. Authentizität kann dann nur Aspekten der Aufgabe dualistisch zu- oder abgesprochen werden (Vos, 2011; vgl. Jahnke, 2005).

2 Wegen der Begrenztheit des Raumes für diesen Beitrag wird darauf verzichtet, auf die mit der Weltkugel verbundenen Aspekte einzugehen.

lität werden verfolgt – auch solche, die nun eine Variation der Ausgangsparameter, etwa der Höhe, erforderlich machen. Diese Fragestellungen können sowohl aus dem Bezug auf die architektonische Realität erwachsen als auch aus dem Interesse an der mathematischen Struktur des Körpers. Einkleidung und Realitätsbezug befördern so in ihrem Zusammenwirken einen Lernprozess, der methodisch sehr wohl professionelle mathematische Praxis erreicht, bildet er doch die Struktur mathematischer Forschung in einer Weise ab, die nur graduelle, nicht prinzipielle Unterschiede offenbart. Damit wird eine andere, entscheidende Art von Authentizität realisiert, nicht kontextuelle, sondern „Prozessauthentizität“ (Büchter & Leuders, 2006b, S. 19; Büchter & Leuders, 2006a, S. 14). Die Lernenden machen in selbstbestimmter Forschungspraxis authentische, nämlich „herausfordernde, echte mathematische Erfahrungen“, die sie in die Lage versetzen, das „individuelle mathematische Handlungsrepertoire zu erweitern“ (Lutz-Westphal, 2006, S. 4 f.).

Die Entwicklung der Aufgabe war für die Autoren selbst ein authentischer Prozess: Die Aufgabe hatte ihren Ursprung als Beispielaufgabe „Hafenturm“ zum 2005 in Hamburg eingeführten zentralen schriftlichen Abitur. Deren Inhalte waren begrenzt, die Aufgabenstellungen eng gefasst. Unser Interesse an der Aufklärung der Zusammenhänge mit realer Architektur hat uns zu fortgesetzten Untersuchungen veranlasst. Wir stießen immer wieder auf interessante neue Aspekte und entwickelten zusätzliche Fragestellungen. Der inhaltliche Umfang wuchs über das für eine Aufgabe im schriftlichen Abitur Vertretbare hinaus, und die Einsicht griff Platz, dass der eigene Erkenntnisprozess doch auch Modell sein könne für den der Schüler. So kam es zu einer Reformulierung der Aufgabe mit der Zielsetzung, einen authentischen Zugang zu fördern. Mit dieser Qualität kann sie nun zu einer unterrichtlichen Lernaufgabe werden, die einen materialen und situativen Anstoß gibt für einen von den Lernenden weitgehend selbstorganisierten Lernprozess, in dem der Lehrende sich auf eine Rolle als Berater beschränkt (Leisen, 2011). Ebenso ist sie jetzt als Gegenstand einer außerhalb des Unterrichts zu erarbeiteten Präsentationsleistung oder gar der Präsentationsprüfung im Abitur einsetzbar[3]. Denn im Unterschied zu schriftlichen Prüfungen und Leistungskontrollen bieten diese Situationen weitgehende Möglichkeiten der Anerkennung individueller Wege der Kompetenzaneignung und entsprechender Lösungsvielfalt (vgl. den Beitrag von Heintz, Drüke-Noe und Greefrath, Kapitel 14 in diesem Band).

Abgesehen von der Weltkugel ist der Globe-Tower als geometrisches Objekt zwar nicht ebenflächig, wohl aber geradlinig begrenzt. Den Turmkörper betreffend geht die Aufgabe daher im Grundsatz nicht über den Rahmen der in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife zur Leitidee Raum und Form gestellten Forderungen hinaus (KMK, 2012). Dies umso weniger, als die Begriffe und Konzepte, mit denen die Untersuchung weitgehend geleistet werden kann, zumeist schon im grundlegenden Anforderungsniveau verbindlich sind. Es sind dies elementare Vektoroperationen, analytische Beschreibung von Geraden und ihrer Lagebeziehungen, Skalarprodukt, Funktionsbegriff und Ableitung (Leitidee funktionaler Zusammenhang) und die Nutzung des Integrals als Flächeninhalt (Leitidee Messen). Die Weltkugel und die als realweltliche Referenz bedeutsamen Hyperboloidkonstruktionen sind Rotationskörper und werden als solche im erhöhten Niveau behandelt

3 Einer der beiden Autoren (J. K.) hat als Lehrer an der Hamburger Heinrich-Hertz-Schule 2011 Präsentationsprüfungen mit dieser Aufgabe erfolgreich durchgeführt. Die Einkleidung war etwas abweichend, die Parameter des Towers unterschieden sich leicht. Unter anderem wurde die entgegengesetzte Drehrichtung des Turmkörpers angenommen. Hervorzuheben ist die herausragende Leistung der Schülerin Juliane Entzian, die in ihrem Vortrag wichtige, von den Verfassern für diesen Beitrag genutzte Ideen entwickelt hat.

(ebenfalls Leitidee Messen). Wenn nun die Lernenden ihre Fragestellungen und Gesichtspunkte formulieren und bearbeiten, so entscheiden sie selbst, zu welchem – möglicherweise die Forderungen der Bildungsstandards überschreitenden – Niveau sie ihre Kompetenzen weiterentwickeln. Dem entspricht eine Auffassung, die die Bildungsstandards nicht als ein den Entdeckungs- und Forscherimpetus abschneidendes starres Normengefüge versteht.

2 Das hyperbolische Modell

2.1 Kanten und Querschnitte

Die Aufgabenstellung verweist auf hyperbolische Bauformen. Die Internet-Recherche dazu führt zunächst auf *Hyperboloidkonstruktionen,* wie sie zuerst von Wladimir G. Schuchow in Russland realisiert wurden. Noch heute existieren von Schuchows revolutionären Arbeiten u. a. der Leuchtturm von Adziogol von 1911 und der nach seinem Erbauer benannte mehrstöckig rotationshyberbolische Moskauer Radioturm von 1922 (Abbildung 2). Bereits 1917/18 wurden in den Niederlanden die ersten hyperbolischen Kühltürme errichtet. Nach dem 2. Weltkrieg setzte sich diese Form allgemein für Kühltürme von Kraftwerken durch. Darüber hinaus sind architektonisch bedeutsame moderne rotationshyperbolische Türme u. a. der Kobe Port-Tower von 1963 (Abbildung 3) und der 2008 fertiggestellte Tornado-Tower in Katars Hauptstadt Doha.

Abb. 2: Schuchow-Tower

Abb. 3: Kobe Port Tower

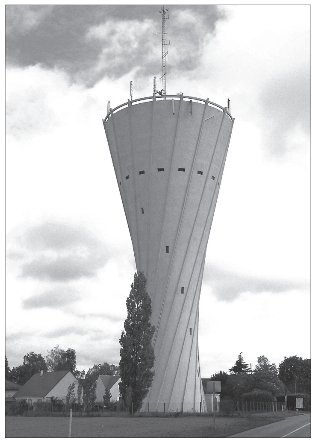


Abb. 4: Château d'eau à La-Roche-De-Glun von philetisa

Hyperboloide Tragwerke weisen eine hohe Stabilität auf, sodass sie materialökonomisch äußerst vorteilhaft sind und daher als filigrane Konstruktionen in besonderer Weise ästhetisch beeindrucken. Sie sind technisch einfach zu realisieren, da sie weitgehend aus nicht gekrümmten, geraden Bauteilen erstellt werden können. Denn geometrisch ist das einschalige Hyperboloid eine sogenannte Regelfläche, die erzeugt werden kann durch zwei Scharen von Geraden. Dabei sind je zwei Geraden derselben Schar windschief zueinander, während sich je zwei Geraden verschiedener Scharen in genau einem Punkt schneiden. Jede Gerade der einen Schar wird durch Spiegelung an der x-y-Ebene in eine Gerade der anderen Schar überführt (Nestler, 2002/2003a, 2002/2003b; Wikipedia, 2014b).

Während alle genannten Bauwerke sich konstruktiv auf beide Scharen stützen, gibt es auch kleinere Bauten, die sich auf lediglich eine davon beschränken, so den Schlossberg-Turm in Freiburg im Breisgau und den Wasserturm von La Roche de Glun (Abbildung 4) im französischen Rhonetal. Hier fällt die konstruktive Verwandtschaft zum Globe-Tower sofort ins Auge. Dass dessen Seitenkanten keinen gemeinsamen Schnittpunkt aufweisen, sondern ebenfalls auf paarweise windschiefen Geraden liegen, legte schon die Entwurfskizze in Abbildung 1 nahe. Die Auseinandersetzung mit den Hyperboloidkonstruktionen gibt nun zusätzlich Anlass, dies zu überprüfen. Dazu sind verschiedene Lösungswege möglich. Die Kompetenz zu mathematischer Argumentation bewährt sich, wenn – die Lösung vereinfachend – die Symmetrie des Globe-Tower ausgenutzt wird, aufgrund derer ein Schnittpunkt nur auf der z-Achse liegen kann. Dann muss lediglich für eine der Kantengeraden gezeigt werden, dass kein Parameter existiert, so dass $x = y = 0$. Nimmt man etwa die Gerade $k_A: \vec{x} = (14|14|0) + t \cdot (-7|-21|160)$, so erhält man $14 - 7t = 0 \wedge 14 - 21t = 0$, d. h. $t = 2 \wedge t = \frac{2}{3}$.

Fehlt aber dem Globe-Tower nicht die Eleganz, die bei den Hyperboloidkonstruktionen dadurch entsteht, dass die Inhalte der waagerechten Querschnitte zunächst mit wachsender Höhe abnehmen, um nach Erreichen eines Minimums wieder anzusteigen? Die Klärung dieser Frage geht von einem nicht zu übersehenden Unterschied aus: Während rotationshyperbolische Türme immer Kreise als waagerechte Schnitte liefern, hat der Globe-Tower eine quadratische Grund- und Dachfläche, so dass aus seiner Symmetrie unmittelbar folgt, dass auch alle zu diesen beiden parallelen Querschnittsflächen Quadrate sind. Deren Flächeninhalt kann als Funktion ihrer Höhe über der Grundfläche bestimmt werden. Der wohl einfachste der möglichen Lösungswege: Geht k_A in der Höhe $h = 160\,t$ mit $0 \leq t \leq 1$ durch den Eckpunkt $(14 - 7\,t|14 - 21\,t|160\,t)$ des Quadrats, so wird dessen Halbdiagonale durch den Vektor $\vec{d}_t = (14 - 7\,t|14 - 21\,t|0)$ beschrieben. Sein Flächeninhalt ist dann $A(t) = 2 \cdot |\vec{d}_t|^2 = 980\,t^2 - 1568\,t + 784$. Der Graph von A ist eine nach oben geöffnete Parabel. Ihre Minimalstelle ergibt sich analytisch oder durch quadratische Ergänzung zu $t = 0{,}8$, liegt also in 128 m Höhe und bildet damit genau die Grundfläche des 32. Geschosses. Sie hat eine um etwa 1,50 m geringere Seitenlänge als das Dachquadrat.

2.2 Ein Mietpreismodell

Für den Entwurf eines Mietpreiskonzepts ist vor allem Modellierungskompetenz gefragt: An erster Stelle steht die Analyse der gegebenen Situation, die zwar eine fiktive ist, aber doch als beispielhaft für jedes kommerzielle Immobilienprojekt gelten kann. Diese spezielle Fragestellung wird zunächst nicht unmittelbar ökonomische, etwa städtebauliche Aspekte des Baus aus der Betrachtung ausschließen. Zusätzlich wird man auch die ökonomische Komplexität zu reduzieren suchen, vielleicht von relevanten Größen wie Verwaltungs- und Instandhaltungskosten absehend sich lediglich auf die Annahme stützen, dass mit dem für den Bau aufgewendeten Kapital eine angemessene Rendite erwirtschaftet werden soll. Damit ist der Übergang zu einem einfachen, auf die Verwirklichung einer Zielsetzung absehenden, also normativen Situationsmodell vollzogen, das im Folgenden zu mathematisieren ist. Nimmt man mit Blick auf vergleichbare Projekte etwa Baukosten von 200 Mio. € und eine angezielte Kapitalrendite von 4 % an, so sind 8 Mio. € an Mieteinnahmen im Jahr aus der zu vermietenden Gesamtgeschossfläche A_{ges} zu realisieren. Da genau die Querschnittsflächen zu $t = \frac{n}{40}$ mit $n \in \{0, 1, \ldots, 39\}$ auch Geschossflächen sind, ergibt sich A_{ges} als deren Summe, die mit einem CAS leicht mit ungefähr 13 365 m^2 zu ermitteln ist. Daraus ergäbe sich in einfachster Überlegung ein monatlicher Mietpreis von 50 € für jeden Quadratmeter der Geschossfläche. Eine solche Annahme ist nun aber gar zu unrealistisch, lassen sich doch die Eigentümer selbstverständlich auch den Ausblick bezahlen, den ihre Immobilie auf Stadt, Hafen und Elb-Philharmonie bietet, und sind Mieter durchaus geneigt, sich die Repräsentativität ihres Firmensitzes den einen oder anderen Euro kosten zu lassen. Man wird die Quadratmeter-Miete also vom Erdgeschoss bis zum obersten Stockwerk ansteigen lassen. Das kann ganz willkürlich geschehen – mit der Folge, in einem möglicherweise aufwändigen nicht-algorithmischen Trial-und-Error-Verfahren jene 50 € nun als Mittelwert zu garantieren. Denkbar ist aber auch die Annahme eines funktional definierten, etwa linearen Anstiegs. Man hätte in diesem Fall mit b als Mietpreis pro qm im Erdgeschoss die Gleichung

$$\left(\sum_{n=0}^{39} A\left(\frac{n}{40}\right) \cdot \left(m \cdot \frac{n}{40} + b\right)\right) / A_{\text{ges}} = 50$$

nach der Steigung m zu lösen, um dann Quadratmeter- und Geschossmieten für die einzelnen Stockwerke angeben zu können.

Diese Modellierung könnte wegen ihres normativen Charakters nur dann an der Realität überprüft und ggf. an ihr korrigiert werden, wenn der ökonomische Erfolg eines solchen Mietpreiskonzepts tatsächlich empirisch zu messen wäre. Dies kann hier natürlich nicht der Fall sein. Wenn damit auch der Modellierungskreislauf nicht vollständig absolviert werden kann, so ist doch das Modell sicher noch weiter zu differenzieren. Die Berücksichtigung etwa von Aufzugsschächten und Treppenhaus kann durch Subtraktion eines konstanten Summanden von den Geschossflächeninhalten einfach realisiert werden. Die Konkurrenzsituation am Markt für gewerbliche Immobilien könnte durch einen von der Quadratmetermiete abhängigen Leerstandsfaktor abgebildet werden.

2.3 Volumen und Oberfläche

Kehren wir zu den unmittelbar geometrischen Eigenschaften des Globe-Tower zurück: Das Volumen ist als sog. Brutto-Rauminhalt Grundlage der Ermittlung des Verkehrswertes eines Gebäudes. Das Volumen des Globe-Tower zu berechnen, erscheint mit Mitteln der Schulmathematik zunächst aussichtslos. Seine Verwandtschaft zu den rotationshyperbolischen Bauformen und in diesem Zusammenhang seine Betrachtung als durch Geschosse, also Querschnitte strukturiertes Bauwerk weist aber den Weg: Ganz wie das Volumen eines Rotationskörpers durch Integration über die Querschnittsfunktion zu berechnen ist, kann das auch hier geschehen. In der Herleitung treten lediglich an die Stelle von Zylindern nun quadratische Säulen. Man erhält so das Volumen des Globe-Tower durch

$$V = 160 \cdot \int_0^1 A(t)dt = 160 \cdot \int_0^1 2\,|\vec{d}_t|^2\, dt.$$

Umgekehrt haben wir so gerade eine Möglichkeit entdeckt, das Volumen eines rotationshyperbolischen Bauwerks mit Hilfe einer seiner erzeugenden Geraden zu berechnen, denn dieses können wir uns aus dem Globe-Tower hervorgegangen denken durch Übergang jedes Querschnittsquadrats in den umbeschriebenen Kreis mit dem Radius $|\vec{d}_t|$.

Wenn der Globe-Tower in jeder Höhe einen quadratischen Querschnitt aufweist, ist offensichtlich damit jede seiner Seitenflächen als eine vom einschaligen Hyperboloid abweichende Regelfläche zu konstruieren, die erzeugt werden kann durch eine Schar *e* von Geraden, die parallel zu einer sogenannten Richtebene, z. B. der Grundflächenebene, sind. Untereinander sind sie paarweise windschief, da sie wegen der Drehung der Dachfläche gegen die Grundfläche auch gegeneinander gedreht sind und daher nicht parallel sein können. Eine solche Fläche ist ein *hyperbolisches Paraboloid,* das in der modernen Architektur als selbsttragende Dachfläche eine große Bedeutung hat. Zu den Bauten mit einem solchen Satteldach gehört z. B. die Berliner Kongresshalle (Abbildung 5; vgl. Nestler, 2002/2003a, 2002/2003b; Wikipedia, 2014a; Kourilova, 2010/2011).

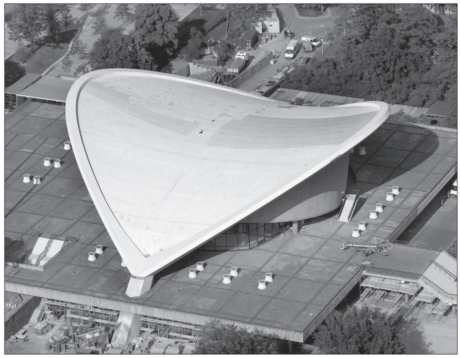


Abb. 5: Berliner Kongresshalle

Ein hyperbolisches Paraboloid enthält immer eine zweite Schar *f* von untereinander windschiefen erzeugenden Geraden, die alle von jeder Geraden der ersten Schar geschnitten werden und mit ihr die Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloids in ihrem Schnittpunkt aufspannen. Die Geraden dieser Schar sind definiert durch Punktepaare, die Grund- und Dachkante bei gleicher Orientierung im gleichen Verhältnis zerlegen. Nimmt man realistisch an, dass die gläserne Fassade des Globe-Tower aus einer großen Anzahl von Bauelementen gebildet wird, so kann man diese bestimmen durch das von einer passenden Anzahl von Repräsentanten beider Scharen gebildete Netz, das die Seitenfläche in kleine hyperbolische Paraboloide $H_{t,u}$ mit $0 \leq t < 1$ und $0 \leq u < 1$ zerlegt. Diese werden sinnvoller Weise durch ebene Flächen angenähert, die produktionstechnisch einfacher und damit deutlich preiswerter zu realisieren sind[4]. Naheliegend sind hier zwei Wege, die auch ästhetisch einen unterschiedlichen Eindruck vermitteln: die Zerlegung dieser kleinen hyperbolischen Paraboloide in jeweils zwei Dreiecke, oder deren Annäherung durch Parallelogramme $P_{t,u}$, die von zwei ihrer Seitenvektoren aufgespannt werden. So wird dann auch die erforderliche Materialmenge für die Glasverkleidung zwar aufwändig, aber doch mit elementaren Methoden der analytischen Geometrie berechenbar. Im letzten – rechnerisch einfacheren – Fall hat man die Flächeninhalte $\left|\Delta u \cdot \vec{a}_t \times \Delta t \cdot \vec{b}_u\right| = \left|\vec{a}_t \times \vec{b}_u\right| \cdot \Delta t \cdot \Delta u$ aufzusummieren (Abbildung 6 auf S. 223).

[4] Die Kostenexplosion bei der Hamburger Elbphilharmonie ist wesentlich dadurch verursacht, dass große Teile der Seitenflächen des Gebäudes aus Sonderanfertigungen gekrümmter Flächenelemente bestehen.

Darüber hinaus wird möglicherweise mit Hilfe des Grenzübergangs $\Delta t \to 0$ und $\Delta u \to 0$ der exakte Term

$$\int_0^1 \int_0^1 \left|\vec{a}_t \times \vec{b}_u\right| \, dt \, du$$

für den Flächeninhalt des gesamten hyperbolischen Paraboloids entdeckt.[5]

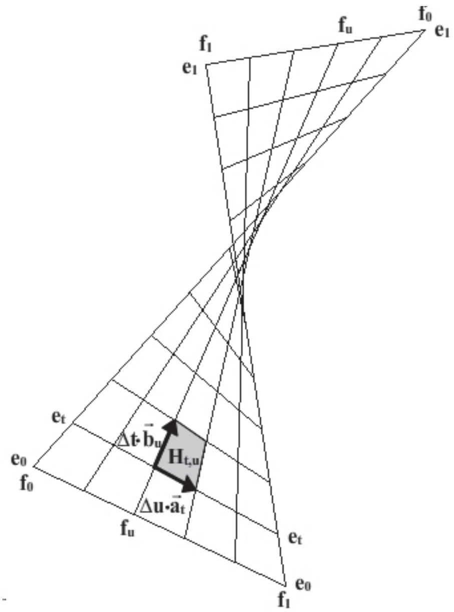


Abb. 6: Zerlegung in hyperbolische Paraboloide

Es ist ersichtlich, dass die Auseinandersetzung mit der Problemstellung der Fassadenverkleidung ganz unterschiedlich tiefgehend erfolgen kann: Schon eine mit Methoden der elementaren Geometrie der Mittelstufe vorgenommene einfache Näherung des Inhalts der Seitenfläche durch ihre Teilung in lediglich zwei Dreiecke oder ihre Ersetzung durch ein Trapez mit gleichen Seitenlängen kann Kompetenzen zu Problemlösung und mathematischer Argumentation nachweisen, wenn – etwa unter Heranziehung von grafischen Darstellungen – eine qualitative Abschätzung von deren Güte geleistet wird. Dem steht am anderen Ende der Skala die Entwicklung der Flächeninhaltsformel des hyperbolischen Paraboloids gegenüber, die natürlich die Bewährung der genannten Kompetenzen auf einem außerordentlich hohen Niveau erfordert, wenn die von der Koordinatenebene in den -raum zu übertragende Herleitung des Integralbegriffs der Analysis als geeignete Lösungsstrategie erkannt und adäquat angewendet werden soll. Zugleich aber ist es wiederum das Sachproblem, die Kachelung der Oberfläche des Globe-Tower mit Glaselementen, also die Einkleidung des mathematischen Inhalts, die einen entscheidenden Anstoß gibt, diese Strategie zu entwickeln.

5 Zu diesem Ergebnis gelangt man mit der folgenden Überlegung: Die Spannvektoren der Parallelogramme, die die Flächenelemente annähern, sind Richtungsvektoren von je einer *e*- und *f*-Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids. Die Parallelogramme $P_{t,u}$ liegen also in dessen jeweiliger Tangentialebene und gehen daher im infinitesimalen Fall exakt über in dessen Flächenelemente $H_{t,u}$. Da diese die Flächeninhalte $\left|\vec{a}_t \times \vec{b}_u\right| \cdot dt \cdot du$ besitzen, ergibt sich durch deren Aufsummierung über dem Intervall [0, 1] das angegebene Doppelintegral.
Alle Berechnungen zum Flächeninhalt erlaubt die auf der CD beigelegte Derive-Datei Seitenflaeche.dfw.

3 Das Modell „Twisted Tower"

Abb. 7: Turning Torso

Betrachtet man die Projektion der Seitenkanten des Globe-Tower im Grundriss, so erkennt man, dass die Bilder von deren unteren Endpunkten durch eine Drehstreckung mit dem Koordinatenursprung als Zentrum und dem Faktor 0,5 sowie dem Winkel 90° (in mathematisch negativer Drehrichtung) in die Bilder der zugehörigen oberen Endpunkte übergehen. Spricht man in diesem Sinne von einer Drehung der Dachfläche gegen die Grundfläche um 90°, so findet der Globe-Tower weitere architektonische Verwandte unter herausragenden modernen Bauten. Santiago Calatrava verwirklichte die Idee eines solchen „Twisted Tower" mit dem 2005 fertiggestellten Turning Torso im schwedischen Malmö (Abbildung 7), zu dem ihn seine Skulptur eines sich windenden menschlichen Rumpfes inspirierte. Turning Torso ist mit 54 Stockwerken und einer Höhe von 190 m das höchste Gebäude Skandinaviens. Der 2013 eröffnete Cayan-Tower in Dubai sprengt diese Dimension mit 76 Geschossen und einer Höhe von 306 m.

Bei beiden Türmen ist die Größe der Grundfläche in allen Etagen gleich, jedes Stockwerk ist gegen das vorhergehende um den gleichen Winkel – ca. 1,6° beim Turning Torso, ca. 1,2° beim Cayan-Tower – gedreht, so dass sich wie beim Globe-Tower 90° als Gesamtdrehung ergibt. Ein Unterschied fällt aber sofort auf: Die Geschossgrundflächen sind bei letzterem, wie wir gesehen haben, nicht gleich. Den Globe-Tower betreffend entsteht sofort die weitere Frage, ob sich dann nicht auch die gegeneinander gemessenen Drehwinkel aufeinanderfolgender Geschosse abweichend verhalten. Eine Antwort erhält man sehr einfach, wenn man den Drehwinkel eines beliebigen Geschosses gegen die Grundfläche berechnet. Betrachtet man wie oben die Diagonalen, so gilt für diesen Winkel

$$\alpha(t) = \arccos \frac{\vec{d}_0 \cdot \vec{d}_t}{|\vec{d}_0| \cdot |\vec{d}_t|} = \arccos \frac{392 - 392t}{\sqrt{392 \cdot (490t^2 - 784t + 392)}} = \arccos \frac{1 - t}{\sqrt{1{,}25t^2 - 2t + 1}}$$

und somit z. B. für das 20. Stockwerk $\alpha(0{,}5) = 26{,}57° \neq 45°$. Also sind die gegeneinander gemessenen Drehwinkel benachbarter Geschosse hier keineswegs gleich.

Weitere Fragen schließen sich an: Wie verhalten sich diese Drehwinkel? Wo liegt der maximale, wo der minimale Drehwinkel aufeinanderfolgender Geschosse? Will man nicht mit einem CAS erstellte Listen von Winkelbeträgen abarbeiten, so kann man sich einen Einblick durch den Graph der Funktion α verschaffen. Er erreicht offenbar seine maximale Steigung bei etwa $t = 0{,}8$. Die Lösung von $\alpha''(t) = 0$ mit einem CAS bestätigt exakt dieses Ergebnis. Dies war ja nun gerade der Parameterwert, den man für die minimale Querschnittsfläche gefunden hatte. Liegt hierin eine notwendige Übereinstimmung? Zur Beantwortung dieser Frage kann man den Tower von oben senkrecht auf die Bodenebene ($t = 0$) projizieren (Abbildung 8). So zeigt sich: Die den Flächeninhalt einer Querschnittsfläche bestimmende Halbdiagonale $\overline{A_tM}$ ist offenbar genau dann minimal, wenn sie zur Kantengeraden k_A orthogonal ist. Wertet man diese Bedingung mit Hilfe des Skalarprodukts aus, so erhält man in der Tat dasselbe Resultat $t = 0{,}8$. Jeder weitere Punkt A_t auf der Strecke $\overline{A_0A_1}$ bestimmt dann ein rechtwinkliges Dreieck $A_{0,8}MA_t$, dessen Innenwinkel im Scheitelpunkt M die Drehung der zu t gehörigen Querschnittsfläche gegen die minimale Querschnittsfläche definiert. Sein Betrag ergibt sich zu $\arctan(\overline{A_{0,8}A_t}/\overline{A_{0,8}M})$. Wegen der Rechtskrümmung der arctan-Funktion für nichtnegative Argumente wachsen diese Winkel mit zunehmender Länge von $\overline{A_tA_{0,8}}$ – also mit wachsendem Abstand der zu A_t gehörigen Querschnittsfläche von der minimalen Querschnittsfläche – immer langsamer. Mithin ist auch der Differenzdrehwinkel zweier benachbarter Geschosse notwendig dann am größten, wenn eines der beteiligten Stockwerke dasjenige mit minimaler Querschnittsfläche ist. Es folgt unmittelbar, dass der minimale Drehwinkel zwischen Grundfläche und erstem Geschoss liegt.

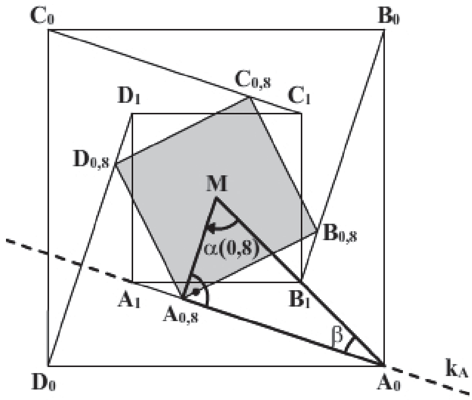


Abb. 8: Ebene Projektion der Querschnittsflächen des Globe-Tower

Man erkennt: Das durch den Vergleich mit den Eigenschaften von Turning Torso und Cayan-Tower angestoßene Interesse entfernt sich von den baulichen Eigenschaften zur Exploration mathematischer Zusammenhänge, die kaum entdeckt worden wären, wenn man den geometrisch nackten, nicht eingekleideten Körper sich zum Gegenstand gemacht oder auch eine andere Einkleidung gewählt hätte, die nicht die Stockwerksstruktur aufwiese. Noch weiter auf diesem Weg in die reine Mathematik führt die Fragestellung, wie sich eigentlich die Drehwinkel entwickeln, wenn man den Globe-Tower mit einer immer größeren Höhe baute. Die Antwort ist durch die CAS-gestützte Bestimmung des Grenzwertes von $a(t)$ für $t \to \infty$ mit – gerundet – 153,4° leicht zu finden. Es werden also keineswegs alle Grenzen überschritten, wie dies bei den beiden realen Türmen mit ihren konstanten Drehwinkeln der Fall wäre. Auf das gleiche Ergebnis kommt man aber auf eine zweite, sehr anschauliche Weise: Abbildung 8 zeigt, dass der Punkt A_t mit über $t = 1$ hinaus wachsender Höhe auf dem Bild der Kantengeraden k_A immer weiter nach links wandert. Damit geht der Winkel MA_tA_0 gegen 0°, der Drehwinkel $\alpha(t)$ also gegen den Winkel 180° – β. β wird durch die Lage von A_0, A_1 und M definiert, ist daher unabhängig von t und lässt sich leicht mit Hilfe der ebenen Vektoren $\overrightarrow{A_0M} = (-14|-14)$ und $\overrightarrow{A_0A_1} = (-21|-7)$ zu 26,6° berechnen, so dass der Grenzwert von $\alpha(t)$ wie oben folgt[6].

Umgekehrt entsteht durch die Konfrontation mit dem Globe-Tower auch mindestens eine Frage an die Konstruktion von Turning Torso und Cayan-Tower: Wenn windschiefe gerade Kanten zu unterschiedlichen Flächeninhalten der Querschnittsflächen und zu unterschiedlichen gegeneinander gemessenen Drehwinkeln aufeinanderfolgender Geschosse führen, welcher Art sind dann die Kanten bei diesen beiden Bauwerken? Ein Blick auf den Grundriss des Turning Torso

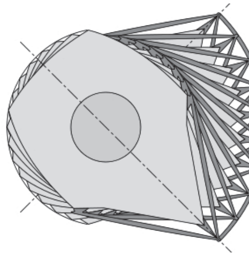


Abb. 9: Querschnittsflächen des Turning Torso von Cmglee lizensiert durch GNU-Lizenz zur freien Dokumentation

6 Diese Lösung hat Juliane Entzian in ihrer wundervollen Präsentationsprüfung vorgetragen.

(Abbildung 9) führt schnell auf die Spur: Natürlich bilden die Projektionen der Gebäudekanten in die Ebene je einen Viertelkreis. Wegen der gleichen Stockwerkshöhen entstehen so im Raum Kurven, die sich mit konstanter Steigung auf einem fiktiven Zylindermantel in die Höhe winden. Das sind also Schraubenlinien, die wegen der großen Ganghöhe – eine Umdrehung wäre beim Turning Torso erst in 760 m Höhe, beim Cayan-Tower erst in 1224 m Höhe erreicht – am Gebäude kaum als solche erkennbar werden.

4 Ergebnispräsentation

Die Präsentation der Arbeitsergebnisse eröffnet die Möglichkeit, neben Kompetenzen zur mathematischen Argumentation vor allem solche zur mathematischen Darstellung mit unterschiedlichen kognitiven Anforderungen zu entwickeln und nachzuweisen. Die Erstellung von Risszeichnungen und ihre Interpretation realisieren hier sicherlich noch nicht höchste kognitive Ansprüche. Dies kann allerdings der Fall sein, wenn man zur anschaulichen Unterstützung der vorzutragenden Inhalte zielgerichtet die Qualitäten einer Dynamischen-Geometrie-Software (DGS) nutzt, etwa um eine dynamische Darstellung der Geschossflächen und Drehwinkel zu erstellen, wie es in der auf der beiliegenden CD enthaltenen Datei Globe_Tower.ggb geschehen ist.

Insbesondere aber stellt die mögliche Anfertigung eines Längsschnitts hohe Anforderungen an die Darstellungskompetenz, verlangt doch die problemadäquate Entwicklung dieses Schnitts eine mehrstufige komplexe Problemlösungsstrategie. Will man z.B. den Schnitt mit der x-z-Ebene darstellen, so ist folgender Weg möglich. Man berechnet zunächst die Schnitthöhe h_s einer passenden Kantengeraden – etwa der bereits definierten Geraden k_A – mit dieser Koordinatenebene und erhält $h_s = \frac{2}{3} \cdot 160$ m. Unterhalb von h_s kommt eine andere der Seitenflächen des Globe-Tower zum Schnitt als oberhalb dieser Höhe. Bildet man nun zu jeder Höhe h eine Parameterdarstellung $e_{h,u}$ der zur Grundfläche parallelen e-Erzeugenden der passenden Seitenfläche und löst die Gleichung $y = 0$, so erhält man zunächst den Parameter u für den Schnittpunkt mit der x-z-Ebene und durch Einsetzen des gefundenen Werts den Schnittpunkt selbst zu dieser Höhe. Diese Punkte können bei Weglassen der y-Koordinate in der x-z-Ebene gezeichnet werden. Durch Spiegelung an der z-Achse gewinnt man die zweite Schnittlinie (Abbildung 10)[7]. Alternativ

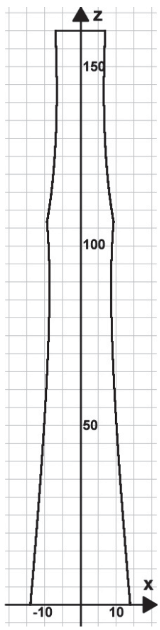


Abb. 10: Längsschnitt des Globe-Tower in der x-z-Ebene

Abb. 11: Modell des Globe-Tower

[7] Die auf der CD beigelegte Datei Laengsschnitt.dfw erlaubt die Zeichnung mit Derive.

wäre die dynamische Erzeugung der Längsschnittzeichnung mit einem DGS möglich. Etwa könnte in der beiliegenden Datei Globe_Tower.ggb eine solche Funktion mit Hilfe der Spuraufzeichnung passender Schnittpunkte implementiert werden.

Schließlich: Das Highlight der Präsentation kann die Anfertigung eines räumlichen Modells wie in Abbildung 11 sein, das in vielfacher Weise theoretische Überlegungen und Argumentationen durch Anschauung zu stützen vermag[8]. Darüber hinaus hat die Erstellung eines solchen Objekts aber eine eigene didaktische Dignität, denn sie ist ein genuiner Modellierungsprozess, ein solcher allerdings, in dem nicht mehr Realität mathematisiert, sondern nun umgekehrt Mathematik real wird: Entsprechend der Intention der Veranschaulichung wird Komplexität reduziert, in Abhängigkeit von Materialwahl und Bauweise werden bestimmte Aspekte des mathematischen Gegenstands hervorgehoben und andere vernachlässigt. Das abgebildete Modell etwa, bei dem ein Nylonstrumpf über Holzleisten gezogen wurde, macht zuvörderst die Lagebeziehung der Seitenkanten und die Krümmung der Seitenflächen sichtbar. Der Absicht dagegen, die Geschossflächen und ihre Drehung zu veranschaulichen, würde eher ein z. B. aus Holzplättchen aufgebautes Schichtenmodell entgegenkommen. So kann auch in der Konzeption der Präsentation des Globe-Tower noch einmal das zum Ausdruck kommen, was didaktisch die Aufgabe durchweg auszeichnet, die Herausforderung zu individuell entwickelten Fragen und Lösungen – zu authentischem mathematischen Lernen.

8 Das abgebildete Modell hat Juliane Entzian maßstäblich sehr präzise gebaut.

Literaturverzeichnis

Büchter, A. & Leuders, T. (2006a). Was ist eine gute Aufgabe? Das kommt darauf an!. *Praxis der Naturwissenschaften – Chemie in der Schule, 55* (8), 9–15.

Büchter, A. & Leuders, T. (2006b). Ein Aufgabenmodell für die Praxis. Einschätzung, Auswahl und Entwicklung von Mathematikaufgaben. *Praxis der Naturwissenschaften – Chemie in der Schule, 55* (8), 16–20.

Jahnke, T. (2005). Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 271–275). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Kourilova, T. (2010/2011). *Lernpfad Mathe Online. Hyperbolisches Paraboloid.* Zugriff am 19.09.2014 unter http://www.mathe-online.at/lernpfade/hypar/

Leisen, J. (2011). *Lernaufgaben im Lehr-Lern-Modell (Skript, Stand 27.7.2011).* Zugriff am 29.09.2013 unter http://www.aufgabenkultur.de/seiten/0%20Aufgabenkultur%20im%20Lehr-Lern-Modell/7%20Lernaufgaben%20im%20Lehr-Lern-Modell.pdf

Leuders, T. & Leiss, D. (2006). Realitätsbezüge. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 194–206). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lutz-Westphal, B. (2006). *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht, Dissertation an der TU Berlin.* Zugriff am 28.09.2013 unter http://page.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf

Nestler, K. (2002/2003a). *Einschaliges Hyperboloid.* Zugriff am 26.08.2014 unter http://www.math.tu-dresden.de/~nestler/diffgeo/regelfl/hyper.html

Nestler, K. (2002/2003b). *Regelfläche.* Zugriff am 26.08.2014 unter http://www.math.tu-dresden.de/~nestler/diffgeo/regelfl/regel.html

Palm, T. (2009). Theory of Authentic Task Situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Hrsg.), *Words and Worlds. Modelling Verbal Descriptions of Situations* (S. 3–19). Rotterdam, Boston, Taipei: Sense Publishers.

Vos, P. (2011). What is ‘Authentic’ in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling? In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA 14* (S. 713–722). Dordrecht: Springer.

Wikipedia (2014a). *Hyperbolisches Paraboloid.* Zugriff am 27.08.2014 unter http://de.wikipedia.org/wiki/Hyperbolisches_Paraboloid

Wikipedia (2014b). *Hyperboloidkonstruktion.* Zugriff am 27.08.2014 unter http://de.wikipedia.org/wiki/Hyperboloidkonstruktion

Teil 4
Zum Mathematik-unterricht in der Sekundarstufe II

19. Von der Änderungsrate zum Bestand

Eine kompetenzorientierte Einführung in die Integralrechnung für das grundlegende Niveau

Ursula Schmidt

Auch Schülerinnen und Schüler, die Mathematikkurse auf einem grundlegenden Anforderungsniveau besuchen, müssen sich keinesfalls nur auf die Anwendung einfacher Kalküle beschränken, sondern können sich mit geeignet gestalteten Lernumgebungen grundlegende mathematische Ideen und Begriffe erarbeiten und dabei prozessbezogene Kompetenzen aufbauen. Im Folgenden wird ein Lernarrangement dargestellt, das inhaltlich eine Einführung in die Integralrechnung zum Ziel hat und von den Schülerinnen und Schülern weitgehend selbstständig bearbeitet werden kann.

1 Ziele des Unterrichtsvorhabens

Schülerinnen und Schüler von Kursen, die auf einem grundlegenden Anforderungsniveau unterrichtet werden, haben bis zur Oberstufe vielleicht nicht nur Erfolgserlebnisse im Mathematikunterricht gehabt und haben erfahrungsgemäß sicherlich die eine oder andere Wissenslücke. Viele ziehen sich zurück, wenn sie in der Oberstufe zu schnell mit formaler, abstrakter Mathematik konfrontiert werden. Gerade dies stellt im traditionellen Zugang zur Integralrechnung eine große Hürde dar, werden dort doch zunächst an ein bis zwei Beispielen aufwändig Ober- und Untersummen berechnet, wobei etliche Hilfsformeln „vom Himmel fallen“. Danach werden Grenzwerte gebildet und heraus kommt aus Sicht der nicht so leistungsstarken Schülerinnen und Schüler ein Rezept zur Berechnung von Flächeninhalten zwischen Kurven, dessen Anwendung sie anschließend trainieren. Der Schwerpunkt der Kompetenzentwicklung der Lernenden liegt damit in der Beherrschung des Integralkalküls mit Hilfe von Stammfunktionen.

Unterricht, der ein vertieftes und nachhaltiges Begriffsverständnis anstrebt, sollte dagegen nicht die stark algebraisch orientierte Theorie an den Anfang stellen, um diese anschließend auf Beispiele anzuwenden, sondern sollte umgekehrt vorgehen: Schülerinnen und Schüler, insbesondere wenn sie nur auf dem grundlegenden Anforderungsniveau unterrichtet werden, brauchen für einen verständnisorientierten Zugang, der auch ihre Problemlösefähigkeiten schult, motivierende und sinnstiftende Lernumgebungen, die sie auf ihrem Wissens- und Erfahrungsstand abholen und Fragen bzw. Probleme aufwerfen, die auch von den Schülerinnen und Schülern als solche angenommen werden oder – im Idealfall – auch von ihnen selbst gestellt werden können. Ziel ist eben nicht das schnelle Erlernen von Rezepten, sondern ein solider Aufbau von Grundvorstellungen zu den zentralen Begriffen der Analysis (Funktion, Ableitung, Integral), so wie es auch durch die Bildungsstandards Mathematik (KMK, 2012, S. 21) gefordert wird.

In seiner ganzen Breite lässt sich der Integralbegriff inhaltlich in fast allen Leitideen der Standards verorten: unter der Leitidee Messen ist die Idee des Messens (von Längen, Flächeninhalten und Volumina) verankert, unter der Leitidee funktionaler Zusammenhang die Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate, das Kumulieren und Bilanzieren (einen Bestand verwalten), unter der Leitidee Daten und Zufall die Mittelwertbildung und unter der Leitidee Algorithmus und Zahl die näherungsweise Berechnung von diskreten Summen und deren Grenzwerten. Beim Einstieg in die Integralrechnung spricht einiges dafür, den Schwerpunkt auf die *Rekonstruktion eines Gesamtbestandes aus den Änderungsraten* zu legen bzw. – etwas weiter gefasst – auf die Kumulation einer Größe. Zentral ist bei diesem Vorgehen die Deutung der dabei auftretenden Produktsummen, sowohl im Kontext als auch geometrisch-anschaulich als orientierte Flächeninhalte. Inhaltlich ergeben sich Möglichkeiten der Vernetzung mit den Konzepten und Kontexten zu Änderungsraten, die die Lernenden bereits im Rahmen der Differenzialrechnung kennengelernt haben. Im Gegensatz zur rein geometrischen Einführung über Flächeninhaltsprobleme wird der Bilanzaspekt gleich mitgedacht, und es muss später nicht zusätzlich erarbeitet werden, warum Integrale auch negative Werte annehmen können.

Es lohnt auf jeden Fall, in den Aufbau sicherer Grundvorstellungen etwas mehr Unterrichtszeit zu investieren, da diese ein wichtiges Fundament für den weiteren Kompetenzaufbau bilden. Damit empfiehlt sich ein derartiger Einstieg in das Thema nicht nur für das grundlegende, sondern auch für das erhöhte Anforderungsniveau. Erst im Anschluss an diese Einführung wird auf den beiden Anforderungsniveaus die Art der weiteren Begriffsbildung unterschiedlich ausgedehnt und auch ein anderer Grad der Formalisierung entwickelt.

Das im Folgenden beschriebene Unterrichtsvorhaben kann in der dargestellten Form auch in weniger leistungsstarken Kursen durchgeführt werden. Für Lernende mit schon stärker ausgeprägten mathematischen Kompetenzen lassen sich sowohl die Aufgaben als auch die Methoden leicht variieren, wozu weiter unten noch Hinweise gegeben werden.

2 Sinnstiftung durch Kontexte

Lernen in konstruktivistischer Sicht ist ein aktiver Prozess der ständigen Reorganisation und Erweiterung vorhandenen Wissens durch die Lernenden. Was sie nicht in ihre vorhandenen Strukturen einfügen können, geht verloren. Unterrichtsmaterialien und -methoden sollten also Schülerinnen und Schüler aktivieren, eigene Fragen zu stellen und nach eigenen Lösungswegen zu suchen. Um bei der Einführung neuer Begriffe und Verfahren an den vorhandenen Erfahrungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen, ist es hilfreich und motivierend, zunächst einmal einen Bezug zu deren Lebenswelt herzustellen.

Für den Oberstufenunterricht ausgewählte Kontexte können reale Anwendungen zwar nur selten vollständig umsetzen – sie können sich aber an realen Anwendungen orientieren und damit einen Rahmen zum Aufbau der mathematischen Begriffe und Verfahren bilden und den Begriffen Bedeutung verleihen. Die Lernenden sollten eine Idee davon bekommen, wofür die neu zu erlernenden Inhalte entwickelt wurden. Die Beispiele sollten möglichst viele Aspekte des Begriffs erfassen und so angelegt sein, dass Fehlvorstellungen vermieden werden. In der Arbeit mit Kontexten lernen die Schülerinnen und Schüler Sachsituationen zu mathematisieren und mathematische Ergebnisse wiederum im Kontext zu bewerten (vgl. den Beitrag von Kaiser und Stender, Kapitel 8 in diesem Band). Sie lernen auch, wie sie unbekannte Situationen für sich handhabbar machen können, indem sie heuristische Strategien anwenden. Die so erworbenen mathematischen Kompetenzen im Modellieren und Problemlösen tragen damit auch über die konkrete Aufgabe oder das Unterrichtsvorhaben hinaus.

In diesem Sinne wurden für die Aufgaben Kontexte ausgewählt, die Schülerinnen und Schüler ansprechen oder aber zumindest aus dem Alltag bekannt sind (Wassertank, Freizeitpark, Fußball, Sportmedizin[1]) und die sich von den Fragestellungen her so aufbereiten lassen, dass die Lernenden möglichst selbstständig in die Mathematik hineingeführt werden, eigenständige Lösungsideen entwickeln und die Grundidee der Rekonstruktion von Beständen erarbeiten können. Alle Aufgaben enthalten sowohl positive als auch negative Änderungsraten, um den Bilanzierungsaspekt von Anfang an adäquat betrachten zu können. Die Bearbeitung verschiedener Kontexte soll später helfen, die gemeinsame Struktur herauszufiltern.

Bei allen vier Aufgaben sind die Änderungsraten zunächst über Situationsbeschreibungen, Diagramme oder Tabellen gegeben, nicht aber über Funktionsgleichungen. Damit müssen die Schülerinnen und Schüler Strategien zur Rekonstruktion des Gesamtbestands entwickeln, die über das „Aufleiten" der Änderungsratenfunktion hinausgehen. Erst in der letzten Teilaufgabe, die zu Beginn auch abgetrennt werden kann, wird im gleichen Kontext die Änderungsrate mit einem Funktionsterm in Verbindung gebracht. Die bereits erarbeitete Strategie soll dann darauf angewendet werden, wobei einige Lernende vielleicht schon erkennen, dass es sich um eine Umkehrung der Differenzialrechnung handelt und damit eine Vermutung äußern, wie die Funktionsgleichung der Bestandsfunktion lauten könnte. In diesem Fall ist es aber spannend zu vergleichen, ob beide Zugänge zum gleichen Ergebnis führen.

In der eigenen Arbeit mit nicht ganz so leistungsstarken Kursen hat es sich herauskristallisiert, dass es günstig ist, mit einem Zufluss-/Abflussproblem zu beginnen (s. Aufgabe Wassertank). Häufig können die Lernenden an das Wissen anknüpfen, das sie im Zusammenhang mit Füllaufgaben in der Sekundarstufe I erworben haben. Aber auch sonst kann sich jeder diese Vorgänge aufgrund von Alltagserfahrungen vorstellen. Außerdem fällt in diesem Sachzusammenhang die geometrische Deutung des Produktes Zuflussrate mal Zeit als Flächeninhalt leichter als bei einem Einstieg über Geschwindigkeits-Weg-Probleme. Dort stolpern immer einige Lernende über die Deutung eines Flächeninhaltes als Länge, während bei anderen die Vorkenntnisse aus dem Physikunterricht zur schnellen Anwendung von bekannten Formeln verleiten.

Im Anschluss an das gemeinsame Einstiegsbeispiel wird von allen – arbeitsteilig – noch ein weiteres Beispiel bearbeitet, wobei die verschiedenen Kontexte der anderen drei Aufgaben genutzt werden können, um die individuellen Interessen der Schülerinnen und Schüler besser zu berücksichtigen. Motivierend ist auch, wenn man eine Aufgabe durch eigene Experimente vorbereiten kann, wie z. B. in der Aufgabe Atemvolumen. Hier kann man Diskussionsprozesse anstoßen durch die Frage, was der Computer, an den das Messgerät angeschlossen ist, eigentlich mit den Messdaten macht.

1 Die Aufgaben sind im Anschluss an dieses Kapitel abgedruckt und auch auf der CD zu finden.

Da in der Literatur (z. B. MSW NRW, 2007; Henn, 2000; Hußmann, 2003) oder auch in Schulbüchern mittlerweile eine ganze Reihe von weiteren geeigneten Sachsituationen zu finden sind, ist es nicht schwer, je nach Größe und Interessen der Lerngruppe die hier vorgestellten Beispiele noch zu ergänzen oder auch zu ersetzen (z. B.: Hybridauto bei Griesel, Gundlach, Postel & Suhr, 2011, S. 55–57; Bordcomputer bei Leuders, 2010; Pumpspeicherkraftwerk bei Schmidt, 2007).

3 Schüleraktivierung und selbstständiges Arbeiten

Um wirklich alle Schülerinnen und Schüler kognitiv zu aktivieren, empfiehlt es sich, die Aufgaben mit Methoden des kooperativen Lernens bearbeiten zu lassen (s. z. B. Brüning & Saum, 2009). Zu dessen Prinzipien gehört, dass alle Lernprozesse immer eine individuelle Denkzeit enthalten sollen. In dem hier beschriebenen Unterrichtsvorhaben wird die Aufgabe 1 (Wassertank, ohne Teil d) zunächst einmal von allen in Einzelarbeit bearbeitet *(Think).* Daran schließt sich eine Phase des Austauschs entweder in Partnerarbeit *(Pair)* oder in Kleingruppen an. Zum Schluss werden die Ergebnisse im Kurs vorgestellt, diskutiert und korrigiert *(Share).* Durch diese Methode wird auch die Kompetenzentwicklung in den Bereichen Kommunizieren und Argumentieren gefördert, neben den bereits oben angesprochenen Kompetenzen im Modellieren und Problemlösen.

In den ersten Teilaufgaben wird eigentlich nur mathematisches Wissen und Können aus der Sekundarstufe I zur Lösung benötigt. Dies ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, eher intuitiv zu beginnen und in ihrem individuellen Lerntempo die Idee der Rekonstruktion weitestgehend selbstständig für sich zu entwickeln.

Das Ergebnis sollte nach der Share-Phase etwa Folgendes sein:

- Wenn die Änderungsrate auf einem Intervall konstant ist, wird der neu hinzukommende Bestand durch Multiplikation der Änderungsrate mit der Länge des Intervalls berechnet (Anwendung der Kenntnisse über Proportionalitäten). Der Bestand wird geometrisch als orientierter Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Graphen der Änderungsratenfunktion gedeutet.
- Wenn die Änderungsrate auf dem Intervall eine lineare Funktion ist, kann sie durch den Durchschnittswert aus den Werten der Änderungsrate zu Beginn und am Ende des Intervalls ersetzt und mit der Länge des Intervalls multipliziert werden (Strategie: Zurückführen auf Bekanntes, hier: auf eine konstante Änderungsrate). Dies liefert das gleiche Ergebnis wie die Berechnung des orientierten Inhalts der Trapezfläche unter der Geraden. (In der Regel nutzen die Lernenden in der Erarbeitungsphase beide Zugänge; in der *Share*-Phase werden sie „vereint".)

In einer weiteren *Think-Pair-Share*-Schleife kann danach Teil d) bearbeitet werden, wobei auch hier wieder die Problemlösestrategie „Zurückführen auf Bekanntes" weiterhilft:

- Wenn die Änderungsrate auf dem Intervall nicht linear ist, wird das Intervall in Teilintervalle zerlegt, auf denen sie jeweils entweder durch eine konstante oder eine lineare Funktion angenähert wird (Zurückführung auf die beiden ersten Fälle). Hier kann man durchaus unterschiedliche Lösungen stehen lassen. Aus dem Wunsch heraus, möglichst genau arbeiten zu wollen, tendieren die Lernenden aber häufig dazu, den Durchschnitt aus den beiden Randwerten zu bilden. Um den Gesamtbestand zu erhalten, werden die Teilergebnisse sukzessive addiert.

Damit haben die Schülerinnen und Schüler eine Orientierung, was bei der Bearbeitung der anderen Aufgaben von ihnen erwartet wird. Wie bereits oben beschrieben, können diese Aufgaben im Unterricht nun arbeitsteilig in Gruppen bearbeitet werden. Dabei bekommen alle zunächst nur die ersten Aufgabenteile, für leistungsstärkere Gruppen steht dann der letzte Aufgabenteil (mit dem Funktionsterm) zunächst als zeitlicher Puffer zur Verfügung. Diese Phase dient zur Vertiefung und Sicherung des bereits Gelernten, sie soll aber den Lernenden auch zeigen, dass durch das neu gewonnene Verfahren Probleme in ganz unterschiedlichen Sachzusammenhängen bearbeitet werden können und ihnen damit dessen Relevanz verdeutlichen.

Die Gruppen können mit ihren Lösungen jeweils ein Plakat gestalten und diese anschließend in einem *Museumsgang* präsentieren. Da jeder dabei mindestens einmal das Plakat seiner Gruppe erklärt, werden alle Gruppenmitglieder aktiv tätig und es müssen alle Gruppenmitglieder die Ergebnisse und Lösungswege gut verstanden haben. Dieses methodische Vorgehen wurde im Rahmen von SINUS-Transfer erprobt (MSW NRW, 2007) und fördert Kompetenzen im Kommunizieren und Argumentieren.

Alternativ können die Aufgaben auch in Form eines *Lernens an Stationen* bearbeitet werden. Dabei käme es für die Lernenden dann mehr darauf an, dass jeder die Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse seiner Gruppe in einer Mappe dokumentiert (entweder als Forschungsheft, Lerntagebuch oder Portfolio).

Bei leistungsstärkeren Gruppen kann auf das gemeinsame Einführungsbeispiel verzichtet und sofort mit der arbeitsteiligen Gruppenarbeit begonnen werden, dann mit allen vier Aufgaben. Möglich ist auch, die Aufgabenstellungen zu öffnen und weniger detailliert zu formulieren. Hier wurden sie enger gefasst, damit auch die nicht ganz so leistungsstarken Schülerinnen und Schüler mit selbstständigem Arbeiten zu Erfolgserlebnissen gelangen.

4 Systematisieren und Verallgemeinern

Im Anschluss wird zur Systematisierung ein Arbeitsblatt mit der folgenden Tabelle zum Vergleich bereitgestellt. Der Aufbau der Tabelle wird erklärt, danach wird sie von den Schülerinnen und Schülern zunächst in *Einzelarbeit* ausgefüllt. Damit sollen sie für sich testen, ob sie auch die Ausarbeitungen der anderen Gruppen verstanden haben. Schließlich erarbeiten die Lernenden als Gemeinsamkeit aller Aufgaben, dass von einer Änderungsrate auf einen Bestand geschlossen wird. Außerdem wird der Bezug zwischen dem jeweiligen Kontext und den orientierten Flächeninhalten hergestellt.

Tabelle 1: Rückblick

	Gegeben		Welche Größe wird berechnet?	Bedeutung der Flächeninhalte	
	unabhängige Größe	abhängige Größe		oberhalb der Abszisse	unterhalb der Abszisse
Beispiel: Hybridauto	*Zeit in min*	*Energiefluss (in kWh/min)*	*in der Batterie gespeicherte Energie (in kWh)*	*zugeführte Energie (in kWh)*	*entnommene Energie (in kWh)*
Wassertank					
Fußballspiel					
Freifallturm					
Atemvolumen					

In einer *Strategiekonferenz* können die Verfahren, wie die einzelnen Gruppen vorgegangen sind, beschrieben und unter dem Aspekt, inwieweit sie verallgemeinerbar sind, verglichen werden. Damit scheiden spezielle Zerlegungen der Flächen (etwa in Dreiecke und Quadrate) aus. Die Darstellung der Strategie wird gut durch eine Tabelle unterstützt. (Die Daten in Tabelle 2 beziehen sich auf die Aufgabe Atemvolumen.)

Tabelle 2: Von der Änderungsrate zum Bestand

unabhängige Variable (z. B. Zeit in Sek.)	Änderungsrate (z. B. Durchflussrate in Litern/Sek.)	neu hinzugekommener Bestand (z. B. Luftmenge in Litern)	Gesamtbestand (Menge der eingeatmeten Luft in Litern)
0	0	0	0
0,3	0,18	0,027	0,027
0,6	0,32	0,075	0,102

Die Schrittfolge zum Ziel ist damit:
- Bilden von Teilintervallen,
- auf jedem Teilintervall: Annähern durch eine konstante (oder lineare) Funktion,
- Berechnen der zugehörigen Produkte, d. h. der zugehörigen Rechtecks- (bzw. Trapez-) flächeninhalte,
- sukzessives Aufsummieren dieser Produkte.

Um genauere Ergebnisse zu erzielen, wird die Breite der Teilintervalle verringert und die Schrittfolge noch einmal durchlaufen. Um diesen Prozess zu automatisieren, sollten digitale Werkzeuge zum Einsatz kommen.

5 Werkzeugeinsatz

In Lerngruppen, die daran gewöhnt sind, mit digitalen Werkzeugen zu arbeiten, haben evtl. einige Gruppen bereits die Berechnungen in einer Tabellenkalkulation vorgenommen. Diese Ansätze können im Folgenden bei der Bearbeitung der letzten Teilaufgabe aufgegriffen werden. Ansonsten sollten jetzt alle ein Tabellenkalkulationsblatt planen, mit dem aus der Änderungsrate, die durch eine Funktionsgleichung gegeben ist, schrittweise der Gesamtbestand zu verschiedenen Zeitpunkten berechnet wird. Die Struktur eines solchen Tabellenblatts ist bereits durch Tabelle 2 vorgegeben und kann jetzt verallgemeinert werden. Wenn die Änderungsrate durch einen Funktionsterm vorgegeben ist, müssen nur in den ersten beiden Zeilen die Anfangswerte und die Formeln von Hand eingegeben werden, der Rest kann automatisch ausgefüllt werden. Das Tabellenkalkulationsblatt (vgl. Tabelle 3) ist im Weiteren flexibel nutzbar, da sich einerseits der Funktionsterm leicht durch beliebige andere Terme ersetzen lässt und andererseits sich auch die Abstände zwischen den Stützstellen schnell verkleinern lassen und so die Genauigkeit in der Berechnung des Gesamtbestandes erhöht werden kann. Zunächst werden damit aber noch kontextbezogen die Aufgabenteile d) der vorliegenden Aufgaben bearbeitet und gelöst.

Tabelle 3: Einsatz einer Tabellenkalkulation

	A	B	C	D
1	0	= f(A1)	0	0
2	= A1+0,3	= f(A2)	= 0,5*(B1+B2)*(A2–A1)	= D1+C2
3				
4				

6 Weiterarbeit

Im weiteren Unterricht wird es darum gehen, Beziehungen zwischen der gegebenen Änderungsratenfunktion und der daraus rekonstruierten Bestandsfunktion herzustellen. Dazu können die bisherigen Ergebnisse noch mithilfe der folgenden Fragen reflektiert werden:

- In welchen Bereichen nehmen die Werte der Bestandsfunktion $B(x)$ mit wachsendem x zu? Welche Eigenschaft haben in diesen Bereichen die Werte $f(x)$?
- Wo erreicht die Bestandsfunktion ihren größten Wert? Begründen Sie mithilfe der Werte von f und den Formeln in dem Tabellenkalkulationsblatt, warum das so ist.
- Wo ist die Bestandsfunktion monoton fallend? Und warum?
- Übersetzen Sie die Formeln aus der Tabellenkalkulation in normale mathematische Schreibweise. Können Sie auch damit das Monotonieverhalten von B erklären?

Vielleicht stehen aber auch schon Vermutungen im Raum: „Da die Änderungsratenfunktion die Ableitung der Funktion ist, wird die Bestandsfunktion wohl die ‚Aufleitung' der Änderungsratenfunktion sein." Aber ist sie das tatsächlich? Der nächste Unterrichtsschritt kann dann so beschrieben werden: „Wir werden das untersuchen, indem wir uns unabhängig von einem Sachzusammenhang beliebige Funktionen ausdenken, dafür wie bisher auch Produktsummen bilden und schauen, ob diese Werte mit den Funktionswerten der ‚Aufleitung‘ übereinstimmen.“ Die Schülerinnen und Schüler sollen sich damit von den konkreten Kontexten lösen und ihre Erkenntnisse auf eine stärker innermathematische Ebene bringen. Die Aufgabe 5.1 (Änderung und Bestand) der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012, S. 62 ff.) zeigt, wie man dabei vorgehen kann: Gegeben sind eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades f, ein Intervall $[0; b]$ und der Auftrag, die Produktsummen wie in Tabelle 3 zu berechnen und mit den Funktionswerten einer passenden Stammfunktion F von f zu vergleichen. Da die Funktion f auf dem Rechner schnell ausgetauscht werden kann, können sich die Lernenden immer wieder überzeugen, dass der Integrationskalkül mithilfe von Stammfunktionen zum gleichen Ergebnis führt wie die schrittweise Rekonstruktion des Bestandes aus den Änderungsraten. Während der Integrationskalkül davon abhängig ist, dass eine Stammfunktion gefunden werden kann, führt das numerische Verfahren auch noch in weiteren Fällen zum Ziel, ist also nicht nur eine „Herleitung“, die anschließend schnell wieder vergessen werden kann.

Literaturverzeichnis

Brüning, L. & Saum, T. (2009). *Erfolgreich unterrichten durch kooperatives Lernen* (Band 1 und 2). Essen: NDS Verlagsgesellschaft.

Griesel, H., Gundlach, A., Postel, H. & Suhr, F. (Hrsg.). (2011). *Elemente der Mathematik Nordrhein-Westfalen, Qualifikationsphase.* Braunschweig: Schroedel.

Henn, H.-W. (2000). Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis. In F. Förster (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (Band 6, Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe, S. 1–13). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Hußmann, S. (2003). *Mathematik entdecken und erforschen – Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II.* Berlin: Cornelsen.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

MSW NRW (2007) = Minsterium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). (2007). *Impulse für den Mathematikunterricht in der Oberstufe – Konzepte und Materialien aus dem Modellversuch SINUS-Transfer.* Stuttgart: Klett.

Leuders, T. (2010). Wie funktioniert ein Bordcomputer? *Praxis der Mathematik, 52* (31), 30–33.

Schmidt, U. (2007). Kumulation statt Flächeninhalt. In G. Geefrath & M. Maaß (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (Band 11, Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe, S. 168–177). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Anhang: Aufgaben

Aufgabe 1: Wassertank

Auf dem Bild sehen Sie einen Wassertank aus Kunststoff. Er ist annähernd quaderförmig, hat aber leicht abgerundete Ecken und Kanten, und zur Stabilisierung leichte Rillen an den Wänden. Der Wassertank ist 1,20 m lang, 1,00 m breit und 1,16 m hoch.
Er hat oben eine verschraubbare Öffnung, durch die er befüllt werden kann. An einer Seitenfläche hat er 10 cm über seiner Bodenfläche einen Auslass mit Hahn.
Im Moment ist so viel Wasser im Tank, dass es 70 cm hoch steht.

Der Hahn wird geöffnet, und es fließen 10 $\frac{\text{Liter}}{\text{min}}$ ab. 5 Minuten nachdem der Wasserstand im Tank die Höhe des Hahns erreicht hat, wird der Hahn geschlossen. 8 Minuten später wird der Tank mit einem Schlauch wieder von oben mit Wasser befüllt. Die Zuflussrate beträgt dabei 15 $\frac{\text{Liter}}{\text{min}}$. Der Füllvorgang wird beendet, wenn das Wasser im Tank 1,00 m hoch steht.

a) Stellen Sie für diesen Vorgang die Höhe des Wasserstands in dem Tank in Abhängigkeit von der Zeit dar.

b) Stellen Sie auch die Zufluss-/Abflussrate in Abhängigkeit von der Zeit dar.

Ein Besitzer eines derartigen Wassertanks fängt darin Regenwasser auf, das vom Dach seiner Garage abläuft, um damit seinen Garten zu gießen. Dazu kann er das Regenrohr der Garage in der oberen Öffnung des Wassertanks enden lassen.

c) Vor einem Sommergewitter war der Tank vollständig geleert. Zu Beginn des Gewitters stieg die Zuflussrate von 0 $\frac{\text{Liter}}{\text{min}}$ zu Beginn auf 22 $\frac{\text{Liter}}{\text{min}}$ nach 6 Minuten, blieb dann die nächsten 10 Minuten unverändert und klang danach innerhalb von 8 Minuten wieder auf 0 $\frac{\text{Liter}}{\text{min}}$ ab.
Nehmen Sie vereinfachend an, dass sich die Zuflussrate jeweils gleichmäßig ändert. Stellen Sie die Zuflussrate während des Gewitters grafisch dar und untersuchen Sie, ob der Tank die Wassermenge fassen kann.
Stellen Sie auch die Wassermenge im Tank in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar. Nimmt die Wassermenge ebenfalls gleichmäßig zu?

d) Die Zuflussrate während eines Regenschauers soll nun durch die Funktion $f(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 4t$, $t \in [0; 24]$ modelliert werden.
Dabei wird t in Minuten und die Zuflussrate in Liter/Minute gemessen. Der Wassertank ist zu Beginn leer.
Erstellen Sie damit eine Tabelle, aus der man in Abständen von zwei Minuten jeweils die Zuflussrate, die Menge des in den letzten zwei Minuten neu hinzugekommenen Wassers und die Wassermenge im Tank entnehmen kann.
Stellen Sie die Zuflussrate und die Wassermenge im Tank in Abhängigkeit von der Zeit auch grafisch dar.
Beschreiben Sie, welche Zusammenhänge Sie zwischen beiden Größen sehen oder auch vermuten.
Überlegen Sie außerdem, wie sich der Graph der Wassermenge verändern würde, wenn der Tank zu Beginn nicht leer wäre.

Aufgabe 2: Freifallturm

Freifalltürme sind Attraktionen in einigen Freizeitparks. Der Freifallturm „The High Fall “ im Movie Park Germany hat eine Gesamthöhe von 61 m. Die Passagiere erreichen im freien Fall Geschwindigkeiten von 90 km/h. Der Turm weist auch noch die Besonderheit auf, dass vor der Auskopplung der Gondel die Sitze hydraulisch nach vorne geneigt werden.

Quelle: Movie Park Germany

An der Außenseite des Turms wird eine Gondel mit Passagieren durch einen Aufzug hochgezogen. Das dauert 45 Sekunden, und die Geschwindigkeit beträgt gemütliche 1,3 $\frac{m}{s}$. Oben bleibt die Gondel noch 10 Sekunden stehen, damit die Passagiere die Aussicht genießen können. Danach wird die Gondel ausgeklinkt und fällt – von Schienen geführt – 2,5 Sekunden lang frei nach unten, bevor sie wieder durch ein magnetisches Bremssystem gestoppt wird.

Diagramm 1 stellt den Geschwindigkeitsverlauf während einer Fahrt dar, in Diagramm 2 wurde daraus der Abschnitt mit dem freien Fall herausgezoomt.

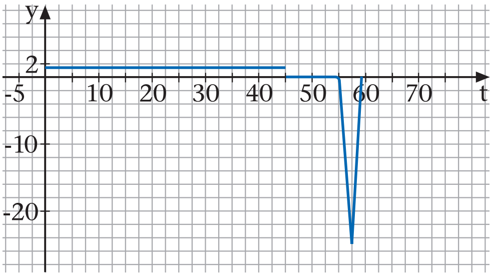


Diagramm 1

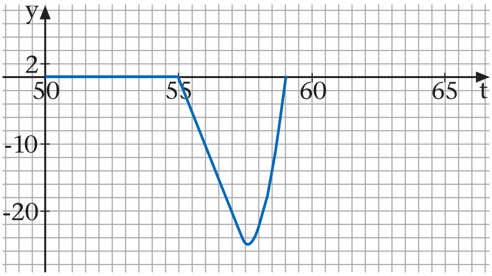


Diagramm 2

a) Erklären Sie anhand der Diagramme, welcher Teil der Graphen jeweils welchen Teil der Fahrt auf dem Freifallturm beschreibt. Woran erkennen Sie eine Aufwärts- bzw. eine Abwärtsbewegung?

b) Berechnen Sie, auf welche Höhe die Gondel durch den Aufzug gezogen wird.
Erläutern Sie, wie Sie Ihre Rechnung und das Ergebnis in Diagramm 1 auch geometrisch veranschaulichen können.

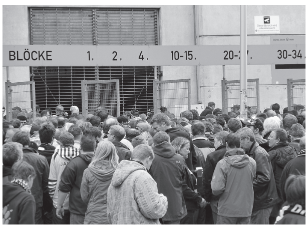
c) Bestimmen Sie mithilfe von Diagramm 2 die Länge der Strecke, welche die Passagiere frei fallen.
Schätzen Sie anschließend den Bremsweg bis zum Stillstand der Gondel so gut wie möglich ab. Erklären Sie Ihr Vorgehen. Gibt es unterschiedliche Lösungswege?

✂✂✂ --

d) Die Geschwindigkeit in der Bremsphase wurde für Diagramm 2 durch eine Parabel modelliert, da die Bremskraft während des Vorgangs zunimmt.

Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel auf und erstellen Sie eine Tabelle, aus der man in Abständen von 0,1 Sekunden jeweils die Geschwindigkeit, die im letzten Zeitabschnitt zurückgelegte Strecke, die insgesamt in der Bremsphase zurückgelegte Strecke und die Höhe über dem Boden entnehmen kann.
Stellen Sie für $t \geq 55$ s die von der Gondel zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.
Beschreiben Sie, welche Zusammenhänge Sie zwischen dem Streckendiagramm und dem Geschwindigkeitsdiagramm sehen oder auch vermuten.

Aufgabe 3: Fußballspiel



Bei einem Fußballspiel öffnen die Eingänge $2\frac{1}{4}$ Stunden vor Spielbeginn. Es können dann maximal 600 Personen pro Minute in das Stadion eingelassen werden.
Erfahrungsgemäß kommen die ersten Fans aber schon $3\frac{1}{2}$ Stunden vor dem Spiel am Stadion an. Eine halbe Stunde später treffen ca. 100 Personen pro Minute am Stadion ein. Die Ankunftsrate erhöht sich innerhalb der nächsten dreiviertel Stunde auf 300 Personen pro Minute und dann innerhalb der nächsten 45 Minuten noch einmal auf 700 Personen pro Minute. Sie bleibt etwa eine halbe Stunde lang gleich hoch und wird dann gleichmäßig weniger. Aber auch bei Spielbeginn kommen noch 100 Personen pro Minute am Stadion an. Die letzten Besucher erscheinen erst 10 Minuten nach Anpfiff an den Eingängen.

a) Veranschaulichen Sie den zeitlichen Verlauf der im Text beschriebenen Ankunftsrate in einer Grafik. Wählen Sie auf der Zeitachse den Spielbeginn als $t = 0$; z. B. bedeutet $t = -30$: 30 Minuten vor dem Spiel.

b) Ermitteln Sie,
- wie viele Personen bereits 135 Minuten vor dem Spiel, also in dem Moment, wo die Eingänge geöffnet werden, vor dem Stadion warten.
- wie viele Personen sich verspäten.
- wie viele Besucher insgesamt zu dem Spiel kommen.

c) Da an den Eingängen immer lange Schlangen stehen, stellen sich alle angekommenen Besucher spätestens nach Öffnung der Tore auch an. Erstellen Sie eine Tabelle, aus der man entnehmen kann, wie sich die Anzahl der angekommenen Besucher und die Anzahl der vor dem Stadion wartenden Personen im Laufe der Zeit entwickeln.

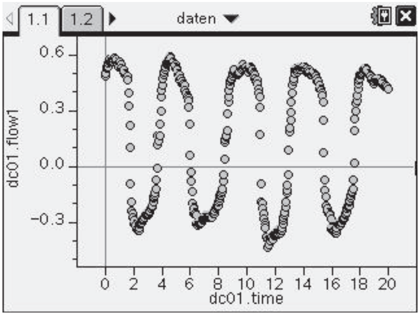
✂✂✂ --

d) Die Ankunftsrate soll nun durch die Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{2500}(t-5)\cdot(t+215)^2 = -0{,}0004t^3 - 0{,}17t^2 - 17{,}63t + 92{,}45$, $t \in [-215; 5]$ modelliert werden. Dabei wird t in Minuten und $f(t)$ in Personen/Minute gemessen.

Erstellen Sie eine Tabelle, aus der man in Abständen von zehn Minuten jeweils die Ankunftsrate, die Anzahl der in den letzten zehn Minuten angekommenen Besucher und die Anzahl der bis zu diesem Zeitpunkt insgesamt schon eingetroffenen Besucher des Fußballspiels entnehmen kann.
Stellen Sie die Ankunftsrate und die Gesamt-Besucherzahl in Abhängigkeit von der Zeit auch grafisch dar.
Beschreiben Sie, welche Zusammenhänge Sie zwischen beiden Größen sehen oder auch vermuten.

Aufgabe 4: Atemvolumen

In der Sportmedizin, aber auch bei der Diagnose von Lungenkrankheiten, wird das Atemvolumen gemessen. Dies geschieht mit einem Gerät namens „Spirometer".
In das Spirometer wird über ein Mundstück ein- bzw. ausgeatmet. Dadurch entsteht im Gerät eine Druckdifferenz, aus der das Gerät die Durchflussrate der Luft beim Ein- und Ausatmen bestimmt $\left(\text{in } \frac{\text{Liter}}{\text{Sek.}} = \frac{\ell}{\text{s}}\right)$.



Das Spirometer wird an einen Computer angeschlossen, der im Abstand von kurz hintereinander folgenden Zeitpunkten die Messwerte der Durchflussrate aufnimmt.
Das Bild zeigt die graphische Darstellung einer Messung:
Hier wurde 20 Sekunden lang die Durchflussrate *(flow)* der Luft beim Ein- und Ausatmen aufgezeichnet (im Abstand von 0,04 s). Der Graph beginnt in der Phase des Einatmens.

a) Beziehen Sie den Graphen auf den Atmungsvorgang der Testperson:
- Wie lange dauert etwa eine vollständige Einatmungsphase?
- Wann nimmt die Menge der eingeatmeten Luft am meisten zu?
- Wie viel Liter Luft pro Sekunde werden in diesem Moment eingeatmet?
- Schätzen Sie ab, wie viel Liter Luft während einer Einatmungsphase in die Lunge gelangen.

Erstellen Sie auf der Grundlage Ihrer Ergebnisse für eine vollständige Einatmungsphase eine qualitative Skizze für die Menge der eingeatmeten Luft in der Lunge in Abhängigkeit von der Zeit.

In der folgenden Tabelle finden Sie aus einer ähnlichen Messung einige Werte aus der *Einatmungsphase* einer Person in Ruhe.

Tabelle 1

Zeit in s	0	0,3	0,6	1,0	1,5	1,8	2,1	2,5	2,75	3
Durchflussrate in $\frac{\ell}{s}$	0	0,18	0,32	0,45	0,50	0,48	0,42	0,28	0,15	0

b) Stellen Sie die Daten in einem Koordinatensystem grafisch dar.

c) Bestimmen Sie möglichst genau, wie viel Liter Luft diese Versuchsperson in den ersten drei Sekunden insgesamt eingeatmet hat.
Tipp: Helfen Ihnen die Überlegungen dieser beiden Schüler?
Leon rechnet so: „0,18 $\frac{\ell}{s}$ · 0,3 s = 0,054 ℓ. Das ist die Luftmenge, die im ersten Zeitintervall eingeatmet wird.“ Marie meint dazu: „Das ist zu viel, weil die Durchflussrate ja erst am Ende des Intervalls so groß war.“

d) Modellieren Sie die Daten aus Tabelle 1 durch eine geeignete Funktion.
Erstellen Sie damit eine Tabelle, aus der man in Abständen von 0,5 Sekunden jeweils die Durchflussrate, die im letzten Zeitabschnitt eingeatmete Luftmenge und die in dieser Phase bis dahin insgesamt eingeatmete Luftmenge entnehmen kann.
Stellen Sie die insgesamt eingeatmete Luftmenge in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.
Beschreiben Sie, welche Zusammenhänge Sie zwischen dem Graphen der Durchflussrate und dem Graphen der insgesamt eingeatmeten Luftmenge sehen oder auch vermuten.

20. Digitale Werkzeuge im Analysis-Unterricht

Hans-Jürgen Elschenbroich

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie digitale Werkzeuge wie z.B. GeoGebra in der Sekundarstufe II fruchtbar beim Lehren und Lernen von Mathematik genutzt werden können. Das Entdecken und die Verständnisförderung stehen hier im Vordergrund. Thematisch liegt der Fokus auf der Leitidee funktionaler Zusammenhang. Ausgehend von einem dynamischen Verständnis von Funktionen und funktionalem Denken werden Möglichkeiten für einen entdeckenden und schüleraktiven Zugang zu Transformationen von Funktionen, zur Ableitungsfunktion und zur Integralfunktion aufgezeigt. Dabei spielt die Fähigkeit der Software, aus Punkten eine Ortslinie zu erzeugen, die dann als Funktionsgraph verstanden werden kann, eine entscheidende Rolle. So werden Herangehensweisen, die auch ohne digitale Hilfsmittel schon denkbar, aber schwierig umsetzbar waren, allgemein, einfach und schülernah handhabbar.

1 Funktionen und funktionaler Zusammenhang

Seit Jahrtausenden beschäftigt sich die Menschheit mit Geometrie. Das Thema Funktionen ist dagegen vergleichsweise jung. Für den Mathematikunterricht in den Schulen sind Funktionen erst seit gut 100 Jahren ein Thema, von Felix Klein wegweisend formuliert in der Meraner Reform 1905. Dort wurde explizit die „Erziehung zur *Gewohnheit des funktionalen Denkens* [Hervorhebung v. Verf.]“ gefordert, und „diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie durch *fortwährende Betrachtung der Änderungen* [Hervorhebung v. Verf.] gepflegt werden“ (Gutzmer, 1908, S. 113).

In der unterrichtlichen Praxis mutierte das funktionale *Denken* aber bald zu einer Behandlung des Funktions*begriffs*, der im Laufe der Jahrzehnte immer exakter und formaler wurde. Dabei ging die dynamische Sichtweise des funktionalen Denkens weitgehend verloren und wurde durch eine an mathematischer Exaktheit ausgerichtete, statische Sicht ersetzt. Erst seit den 90er Jahren gibt es eine Rückbesinnung (s. dazu auch Leuders & Prediger, 2005 und Laakmann, 2011). Vollrath definierte funktionales Denken als „eine *Denkweise* [Hervorhebung v. Verf.], die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“, und unterschied drei Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff, wobei insbesondere die Kovariationsvorstellung diese dynamische Sichtweise betont („eine Funktion ist ein Zusammenhang, eine wechselseitige Abhängigkeit“, Vollrath 1989, S. 36). In den Bildungsstandards der KMK für den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2004) und für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) wird jetzt funktionaler Zusammenhang als eine von fünf mathematischen Leitideen aufgeführt (s. dazu den Beitrag von Henn und Oldenburg, Kapitel 5 in diesem Band).

Es ist für das Folgende hilfreich, einige Aspekte von Funktionen und Variablen zu erwähnen, die beim Lehren und Lernen von Funktionen und Gleichungen eine wesentliche Rolle spielen. Bei Funktionen unterscheidet man *Zuordnung, Änderungsverhalten/Kovariation und Objektcharakter/Ganzheitlichkeit* (s. auch Malle, 2000). Bei Variablen unterscheidet man u. a. den *Einzelzahlaspekt* und den *Bereichsaspekt,* der weiter nach dem *Simultanaspekt* und dem *Veränderlichenaspekt* untergliedert wird (Malle, 1993). Wie diese Aspekte mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge zusammenhängen, wird in den folgenden Abschnitten angesprochen.

2 Werkzeuge und Basisoperationen

Ein Werkzeug ist ein Hilfsmittel, um auf etwas einzuwirken. Bei Werkzeugen im unterrichtlichen Zusammenhang sprechen wir von Lernwerkzeugen. Im Unterrichtsalltag geht die Spannweite von Heft und Stift, Tafel und Kreide, Zirkel und Lineal bis zu Taschenrechnern, Computerprogrammen und digitalen Tafeln. Gute Lernwerkzeuge sorgen für eine Arbeitserleichterung und ermöglichen bzw. unterstützen wichtige *Lernaktivitäten:*

> Der Fortschritt der Menschheit dokumentiert sich in seinen Werkzeugen. Werkzeuge sind zum einen Ergebnis von Erkenntnissen, und zum anderen sind neue Erkenntnisse nicht ohne Werkzeuge möglich. Wir sagen oft, daß eine Zeit nicht reif gewesen sei für gewisse Einsichten; häufig müsste es aber heißen, daß die jeweilige Zeit nicht über geeignete Werkzeuge verfügte, um entsprechende Einsichten gewinnen zu können. (Claus, 1990, S. 43)

Waren ohne Hilfsmittel nur einfache Additionen und Multiplikationen Basisoperationen, so machte der Taschenrechner beispielsweise das Berechnen von Wurzeln, das Potenzieren oder Logarithmieren zu Basisoperationen, der Funktionenplotter das Zeichnen von Funktionsgraphen, die Computeralgebra das Gleichungslösen, Differenzieren, Integrieren oder Matrizenrechnen (Elschenbroich, 2010a).

Lange Zeit gab es kein geeignetes Werkzeug zur direkten Darstellung und Manipulation von Funktionen. Erst seit Mitte/Ende der 80er Jahre hat sich diese Sachlage geändert, Programme wie MatheAss, TurboPlot und das Computeralgebrasystem Derive boten erstmals komfortable Möglichkeiten, Funktionsgraphen zu zeichnen. Es wird die Funktionsgleichung bzw. der Funktionsterm eingegeben und dann auf Knopfdruck „auf einen Schlag" der Funktionsgraph (im Rahmen einer gewählten Bildschirmskalierung) gezeichnet. Das Zeichnen von Funktionsgraphen wurde so ebenfalls zur Basisoperation.

Dies war ein Riesensprung nach vorne, der die Kurvendiskussion in der bisherigen Form eigentlich obsolet machte und diesbezügliche Aufgaben vom Kopf auf die Füße stellte. Aus didaktischer Sicht ist ein solch großer Schritt aber nicht unproblematisch. Denn zwar wird der Simultanaspekt bzw. die Objektvorstellung so realisiert, aber der Veränderlichenaspekt kommt nicht zum Tragen. Am Graphen von $y = \frac{1}{2}x + 1$ beispielsweise kann der Schüler nicht gut den funktionalen Zusammenhang verstehen und erkennen, denn die Gerade als Funktionsgraph bleibt schließlich unverändert, wenn x variiert wird! Der Funktionsgraph *insgesamt* erscheint hier als ein statisches Objekt. Dies ist bei der Einführung von Funktionen in der Sekundarstufe I ein häufig übersehenes, aber ernstes Problem.

Wünschenswert wäre es für den Aufbau von adäquaten Grundvorstellungen, zunächst erst einmal nur zu *einem* x das *zugehörige* y zu betrachten, die Auswirkungen der Änderung der unabhängigen Veränderlichen x auf die abhängige Veränderliche y zu untersuchen und hierbei die Dynamik zu erleben (Abbildungen 1 und 2). Hier steht offensichtlich der Kovariationsaspekt im Vordergrund. Dynamische Geometrie-Software (DGS) wie z. B. GeoGebra (www.geogebra.org) erweist sich dabei als enorm hilfreich, denn sie bietet die Möglichkeit, zunächst einen Punkt $P(x/y)$ zu konstruieren und dessen Verhalten bei Veränderung von x zu studieren. Der Funktionsgraph *entsteht* dabei zunächst punktweise als Spur von P. Die Schülerinnen und Schüler erleben, wie der Funktionsgraph durch ihr Ziehen an x immer mehr sichtbar wird. So ermöglicht DGS eine didaktisch wichtige Entschleunigung. Anschließend wird dann durch die Konstruktion einer Ortslinie von P ein *Objekt* erzeugt, mit dem weiter konstruiert und gearbeitet werden kann. (Elschenbroich, 2005; Elschenbroich & Seebach, o. Jg, in Vorbereitung).

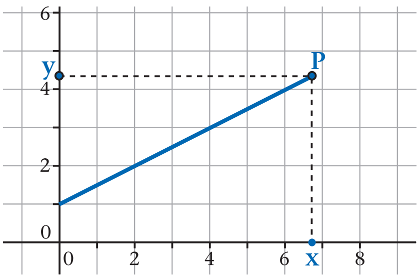


Abb. 1: Eine Gerade entsteht[1]

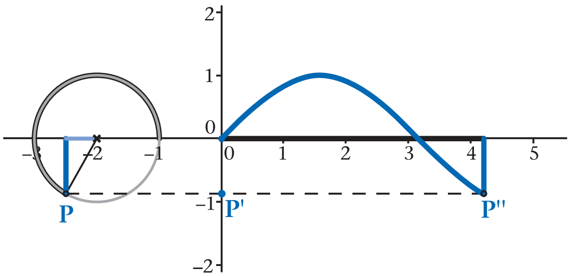


Abb. 2: Die Sinuskurve entsteht

Ist damit erst einmal ein Grundverständnis für funktionalen Zusammenhang und Funktionen gelegt, kann man dann wie bei jedem Funktionenplotter den Funktionsterm oder die Funktionsgleichung eingeben und erhält unmittelbar den Funktionsgraphen als Basisobjekt.

Dies lässt sich zu einem dynamischen Funktionenplotter erweitern, indem über *Schieberegler* Koeffizienten (Parameter) gesteuert werden können. Ein Schieberegler repräsentiert eine Zahl, die in einem bestimmten Intervall schrittweise verändert werden kann. Auf diese Weise werden Funktionsklassen (statisch: Kurvenscharen) zum Gegenstand von Untersuchungen. Dabei ist zur *jeweiligen* Parameter-Konstellation nur der *jeweils zugehörige* Funktionsgraph sichtbar. Hier sind der Veränderlichenaspekt (bei den Parametern) und vor allem der Objektaspekt von Bedeutung. Eine Funktion wird als Ganzes betrachtet und weiterhin als Repräsentant einer Klasse von Funktionen.

3 Angesprochene Leitideen

Eine herausragende Rolle spielt in diesem Beitrag die Leitidee funktionaler Zusammenhang. Hier geht es darum, „die funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen und den Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern“ (KMK 2012, S. 23), insbesondere durch Ableitung und Integral. „Der axiomatisch-deduktive Aufbau der Mathematik ist das Produkt eines langen Entwicklungsprozesses, nicht der Ausgangspunkt. Dementsprechend soll auch der Lernpro-

[1] Sämtliche Abbildungen entstammen dynamischen Arbeitsblättern, die von Elschenbroich und Seebach (in Vorbereitung) veröffentlicht werden.

zess gestaltet werden“ (Büchter & Henn, 2010, S. 1).

Eine wichtige Rolle spielt weiter die Leitidee Messen (s. den Beitrag von Leuders, Kapitel 3 in diesem Band). Sie

> erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina. (KMK 2012, S. 23)

Des Weiteren ist die Leitidee Algorithmus und Zahl relevant (s. den Beitrag von Kleine, Kapitel 2 in diesem Band), wenn es darum geht, „Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral (zu) nutzen“ (KMK 2012, S. 22).

4 Transformationen von Funktionen

In der Einführungsphase der Sekundarstufe II bietet es sich an, Funktionen aus der Sekundarstufe I unter dem Gesichtspunkt Transformationen und deren Verknüpfung zu thematisieren.

Durch geschicktes Experimentieren finden Schülerinnen und Schüler z. B. heraus, dass Funktionsgraphen vierten Grades achsensymmetrisch sind, wenn die Koeffizienten von x-Termen mit ungeraden Exponenten gleich Null sind, und entsprechend dass Funktionsgraphen dritten oder fünften Grades punktsymmetrisch sind, wenn die Koeffizienten von x-Termen mit geraden Exponenten gleich Null sind. Um dies zu entdecken, erweist es sich als vorteilhaft, zunächst an den Schiebereglern alle Koeffizienten auf Null zu setzen und dann gezielt einzelne Parameter zu variieren (Elschenbroich, 2010b).

Auch Verschiebungen spielen bei Funktionen eine Rolle, z. B. wenn man (möglichst schon in der Sekundarstufe I) untersucht, wie man eine Normalparabel so verschieben kann, dass sie mit dem Graphen einer gegebenen quadratischen Funktion $y = x^2 + p\,x + q$ zur Deckung kommt. Dies wird zunächst in zwei separate Verschiebungen in x-Richtung und in y-Richtung aufgeteilt. Geht man dann, nachdem die Aufgabe im Zugmodus experimentell gelöst wurde, der Frage nach, wie man das mit einer einzigen Verschiebung bewerkstelligen kann und wie diese insbesondere mit den Werten von p und q zusammenhängt, so erhält man schnell $x_S = -\frac{p}{2}$ und mit etwas mehr Überlegung noch $y_S = \frac{-p^2}{4} + q$ (s. Abbildung 3). Dieser Zusammenhang zwischen Scheitelpunkt und Koeffizienten liefert ein tieferes Verständnis quadratischer Funktionen und führt zu einer neuen Sicht auf die Lösung quadratischer Gleichungen mit $x_{1,2} = x_S \pm \sqrt{-y_S}$.

Des Weiteren kann mit Verschiebungen untersucht werden, wie man die Sinuskurve so verschieben muss, damit man die Cosinuskurve (oder wieder die Sinuskurve) erhält. Dies ist ein explorativer Zugang zu Gleichungen wie $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ oder auch $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$. Dabei ist es hilfreich, die Skalierung der x-Achse an π zu orientieren, damit man Vielfache oder Bruchteile von π betrachten kann.

Eine kleine Überraschung kann man bei einer zentrischen Streckung erleben. Streckt man z. B. die Parabel zu $f(x) = x^2$ vom Ursprung aus mit dem Faktor $k = 3$, so erhält man nicht die Parabel zu $f(x) = 3x^2$, wie man vielleicht vorschnell meinen könnte. Vielmehr erhält man die Parabel zu $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ (siehe Abbildung 4). Nach der ersten Verblüffung erkennt man dann, dass z. B. der Punkt $P(1/1)$ auf den Punkt $P'(3/3)$ abgebildet wird usw. Will man die Parabel zu $f(x) = 3x^2$ erhalten, so müsste man statt einer *zentrischen* Streckung vom Ursprung aus eine *Achs*streckung parallel zur y-Achse aus durchführen!

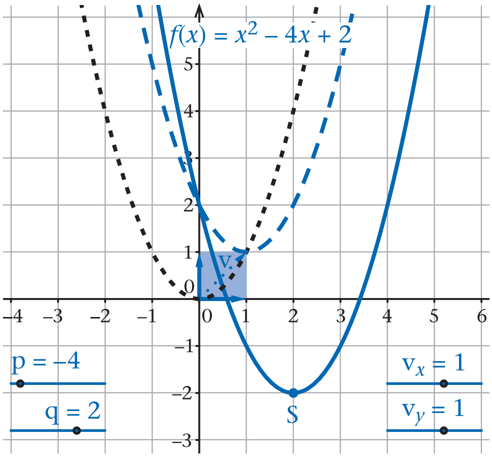


Abb. 3: Scheitelpunktsform

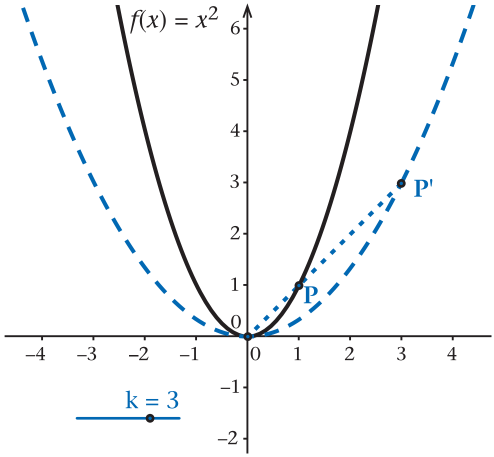


Abb. 4: Parabel-Streckung

5 Von der Sekante zur Ableitungsfunktion

Die Einführung in die Differentialrechnung in der Sekundarstufe II leidet traditionell darunter, dass zu früh der Kalkül die Oberhand gewinnt. Zu oft werden Ableitungen ohne tragfähige Grundvorstellungen nur kalkülhaft ermittelt und dann werden Funktionen nach Regeln differenziert, ohne zu wissen, was man warum tut.

Je nach geometrischem oder realitätsbezogenem Kontext kann man beim typischen Einstieg in die Analysis Sekantensteigungen oder durchschnittliche Änderungsraten betrachten. Die Frage nach der lokalen Steigung bzw. momentanen Änderungsrate führt ins Zentrum der Differentialrechnung. Mit geeigneter Software-Unterstützung können die Schülerinnen und Schüler heute zunächst „ohne jeden Kalkül adäquate Grundvorstellungen zum Begriff der Ableitung und des Integrals aufbauen“ (Büchter & Henn, 2010, S. 80).

Mit geeigneten dynamischen Werkzeugen und insbesondere mit dynamischen Arbeitsblättern können Schülerinnen und Schüler zunächst den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Näherungsprozess von Sekanten an einer Stelle a erleben.

Wird h immer näher an Null angenähert, so erkennt man (ohne zuvor die Hürde komplizierter Termumformungen überwinden zu müssen!), dass die linksseitige und die rechtsseitige Sekante einander immer näher kommen und anschaulich zur Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkte A werden (sofern die Funktion hinreichend „gutartig“, d. h. differenzierbar ist).

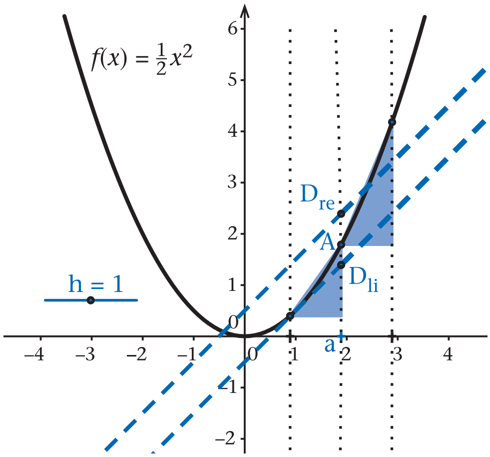


Abb. 5: Sekantensteigungsfunktionen mit $h = 1$ für $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

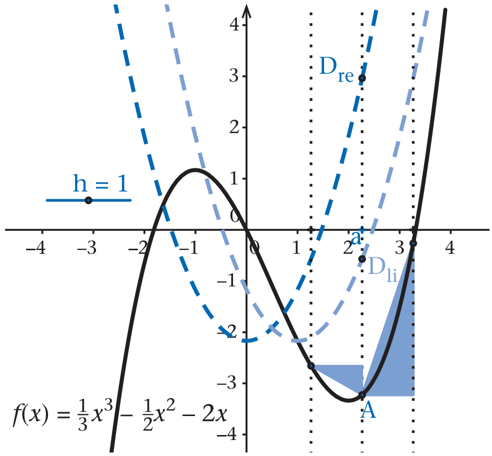


Abb. 6: Sekantensteigungsfunktionen mit $h = 1$ für $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Dies alles war auch schon mit statischen Funktionenplottern machbar. Aus der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigung für ein zunächst festes h kann man nun mit geeigneter dynamischer Software Punkte D_{re} und D_{li} erzeugen, die die linksseitige und rechtsseitige Sekantensteigung an der Stelle $x = a$ repräsentieren. Bei Variation von a entstehen dann als Ortslinie die Graphen der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigungs*funktion* (für festes h, s. Abbildungen 5 und 6), die gegeneinander in Richtung der x-Achse verschoben eine Art „Schlauch" bilden (Lergenmüller & Schmidt, 2010, S. 159–166).

Nun kann man h am Schieberegler immer kleiner werden lassen. Dabei lässt sich schön beobachten, dass die Graphen der beiden Sekantensteigungsfunktionen sich immer mehr annähern, bis sie schließlich im Rahmen der Bildschirmauflösung praktisch zusammenfallen. Man kommt so anschaulich zur Tangentensteigungsfunktion (s. Abbildungen 7 und 8).

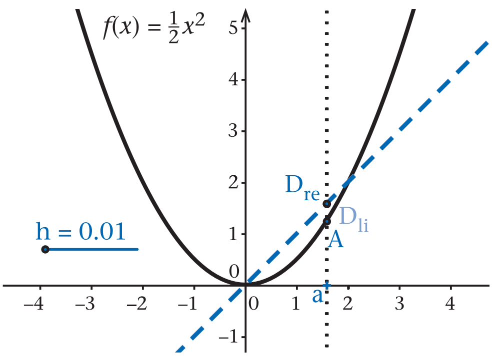


Abb. 7: Tangentensteigungsfunktion für $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

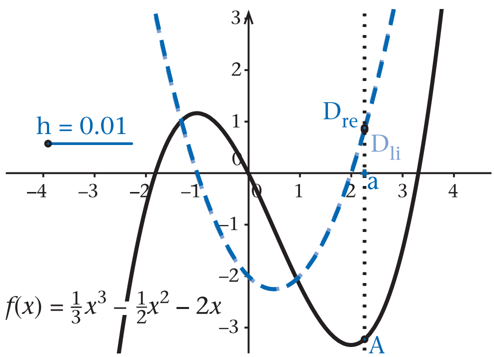


Abb. 8: Tangentensteigungsfunktion für $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Für die Untersuchung weiterer Funktionen braucht man in GeoGebra dann nur eine neue Funktionsgleichung $f(x) = \ldots$ in die Eingabezeile zu schreiben.

Dies ist ein anschaulicher und für die Schüler praktisch kalkülfreier Weg[2] zur Ableitungsfunktion, der Verständnis vor Kalkül setzt (und mit akzeptabler Näherung auch dann gangbar ist, wenn der Grenzwertprozess der Differenzenquotientenfunktion algebraisch nicht handhabbar ist). Das soll jetzt wohlgemerkt keine Absage an den Kalkül sein, aber ein Plädoyer dafür, zu Beginn mehr Aufmerksamkeit auf den Aufbau von Grundvorstellungen zu richten, bevor man zum üblichen Kalkül mit Differenzenquotienten, Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln kommt. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass ein solch visuell-dynamischer Zugang nur für hinreichend gutartige Funktionen zulässig ist (was aber bei den in der Schule vorkommenden Funktionen erst einmal der Fall ist). Natürlich erreicht man dann auch die Grenzen der Anschauung und es muss eine Theoriebildung stattfinden.

6 Vom Kreis zur Krümmung

So wie der Zugang zur Steigung mittels Sekanten durch die drei Punkte $A(a; f(a))$, $A_{li}(a–h; f(a–h))$ und $A_{re}(a+h; f(a+h))$ erfolgt, ist es naheliegend, einen gekrümmten Funktionsgraphen mit der einfachsten gekrümmten Linie, einem Kreis, durch diese drei Punkte anzunähern (Büchter & Henn, 2012) und sein Verhalten zu untersuchen, wenn h immer mehr an Null angenähert wird. Konstruiert man noch den Mittelpunkt M und den Radius $r = \overline{MA}$, so wird deutlich, dass (bei hinreichend gutartigen Funktionen) Kreismittelpunkt M und der Radius r sich schließlich nur noch geringfügig ändern, wenn h immer mehr an Null angenähert wird (s. Abbildungen 9a und 9b).

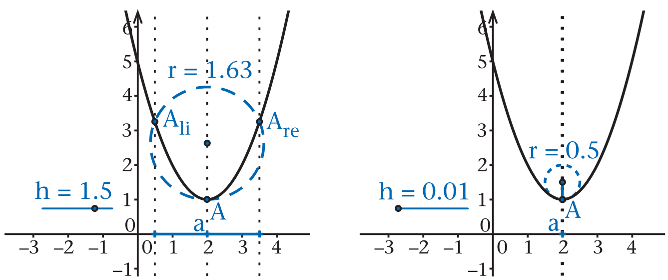


Abb. 9a, 9b: Näherung an den Krümmungskreis

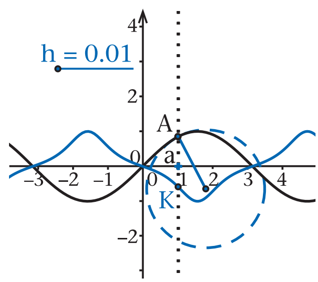


Abb. 9c: Krümmungsfunktion

Wir erhalten so einen visuell-dynamischen Zugang zum Krümmungskreis als Grenzlage und (betraglich) zur Krümmung des Funktionsgraphen an der Stelle a als Kehrwert des Krümmungskreisradius, ohne dass man den bekannten Ansatz als Verhältnis der Richtungsänderung zur Bogenlänge thematisiert und kalkülmäßig bewältigt haben müsste. Durch einen Vergleich von A mit der Sekante durch A_{li} und A_{re} erhält man weiter Informationen über das Vorzeichen und über die Art der Krümmung, sodass man damit auch die anschauliche Krümmungsfunktion zeichnen kann (s. Abbildung 9c).

2 Kalkülfrei natürlich nur auf der Benutzerebene des dynamischen Arbeitsblattes als Lernumgebung, im Hintergrund wird in der Software heftig gerechnet.

7 Von der Unter-/Obersumme zur Integralfunktion

War über lange Zeit der Zugang zur Integralrechnung über Unter- und Obersummen und die algebraische Bearbeitung von Produktsummen der im Unterricht bevorzugte Weg in die Integralrechnung, so gewinnt momentan der Ansatz Konstruktion/Rekonstruktion zunehmend an Bedeutung, wobei sich der Hauptsatz fast im Selbstlauf ergibt (Büchter & Henn, 2010).

Das Berechnen von Produktsummen und der Übergang zum bestimmten Integral sowie zur Integralfunktion sind in jedem Fall für Schülerinnen und Schüler konzeptionell wie algebraisch eine Herausforderung. Dynamische Funktionenplotter wie GeoGebra oder GTR helfen hier wieder beim Aufbau von Grundvorstellungen vor dem Kalkül.

Man beginnt ganz klassisch mit Unter- und Obersummen und kann jetzt problemlos systematisch die Anzahl n der Unterteilungen ändern, die Lage von b oder a sowie den Funktionsterm (s. Abbildung 10). Die Werte von O_n, U_n und deren Differenz liefert hier die Software und man erkennt ohne aufwändige Rechnungen, dass sich für zunehmend größeres n die Werte von O_n und U_n einander annähern und der Unterschied gegen Null geht.

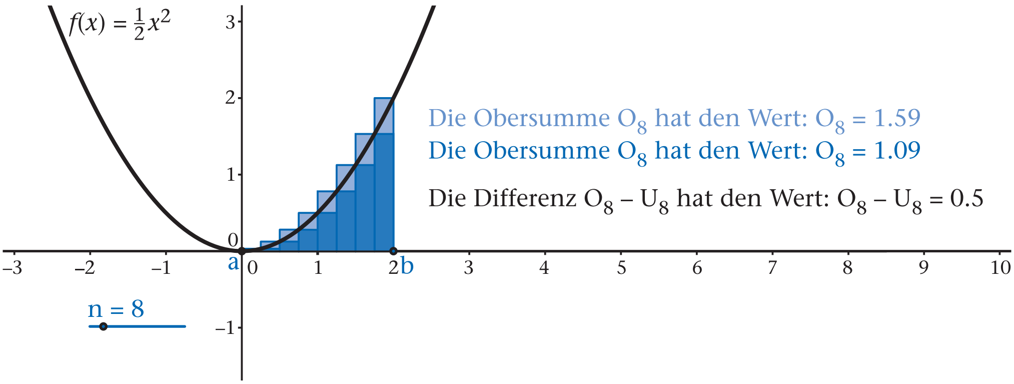


Abb. 10: Unter- und Obersumme

Dies ist der Schritt zum bestimmten Integral von $f(x)$ über $[a; b]$, der auch schon mit statischen Funktionenplottern möglich war.
Nun kann man wieder passend zu b den Wert von U_n und O_n als y-Koordinate für einen Punkt US_n bzw. OS_n nutzen und das Verhalten der beiden Punkte für wachsendes n untersuchen (s. Abbildung 11a). Erwartungsgemäß nähern sich diese beiden Punkte immer mehr einander an, je größer die Anzahl n der Unterteilungen wird.
Es bietet sich nun auch analog zum Vorgehen bei der Ableitung an, das Verhalten dieser beiden Punkte zu untersuchen, wenn b variiert wird, und ihre Ortslinien zeichnen zu lassen (s. Abbildung 11b). Man erhält so für festes n eine Untersummenfunktion und eine Obersummenfunktion, deren Graphen eine Art Trichter bilden. Für größeres n nähern sich die Untersummenfunktion und die Obersummenfunktion immer mehr an und schachteln die Integralfunktion von $f(x)$ ein (s. Abbildung 12).

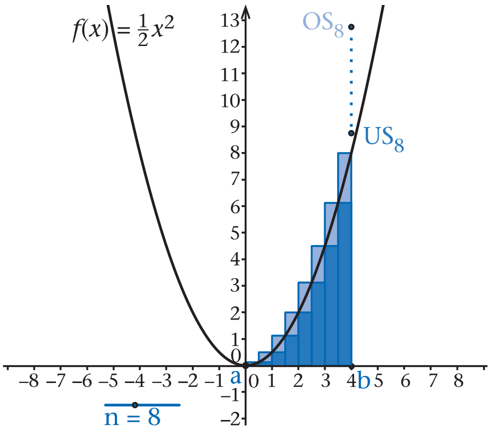


Abb. 11a: OS_8 und US_8

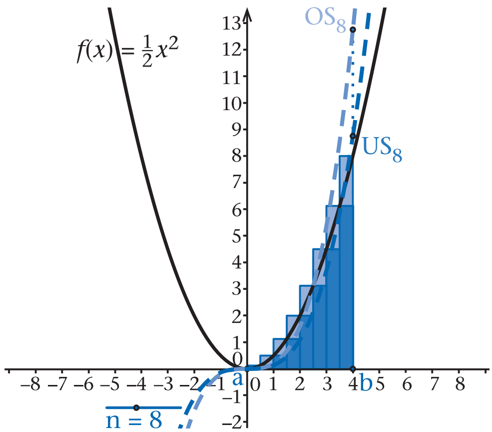


Abb. 11b: Ortslinien von OS_8 und US_8

Verändert man nun *b*, so ändert sich nichts. Verändert man aber *a*, so verschieben sich die Untersummenfunktion und Obersummenfunktion und die eingeschachtelte Integralfunktion offensichtlich um eine Konstante (Abbildung 13).

Wir haben hier also eine digitale Variante eines Integraphen! Blum (1982) hat gezeigt, wie man einen Integraphen als analoges Gerät im Analysis-Unterricht als Integralfunktions-Zeichner und Stammfunktions-Zeichner und als ‚Hauptsatzmaschine' didaktisch fruchtbar einsetzen kann. Diesen fast verschütteten Gedanken können wir hier in digitaler Version wieder aufleben lassen!

Natürlich können dann auch andere Funktionsterme aus der Sekundarstufe I eingegeben werden, z. B. $f(x) = \sin(x)$. Es sei noch erwähnt, dass die Konstruktionen zu Abbildung 12 und 13 rechen- und zeitintensiv sind.

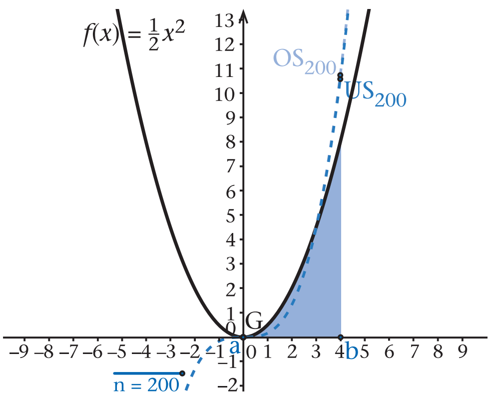


Abb. 12: Ortslinien von OS_{200} und US_{200}

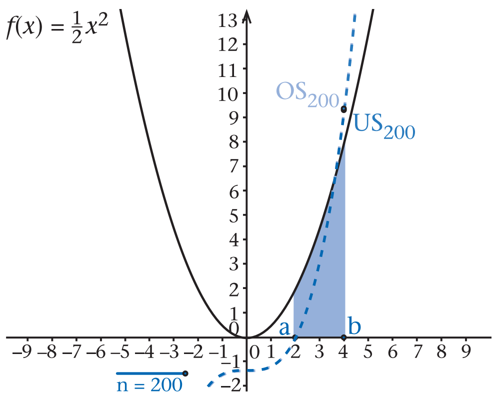


Abb. 13: Variation von a

Auf diese Weise kommt man auf der Theorie-Ebene zur Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bzw. zur Integrationskonstante bei Stammfunktionen und auf der explorativen Ebene zur Fragestellung, wie man die linke Grenze *a* variieren muss, damit man die Integrationskonstante 0 erhält.

Damit ist jetzt das Grundverständnis für Integralfunktion und den Hauptsatz gelegt, und zwar für die Schülerinnen und Schüler bis dahin weitgehend kalkülfrei!
Es sei wie bei der Differenzierbarkeit darauf hingewiesen, dass ein solch visuell-dynamischer Zugang nur für hinreichend gutartige Funktionen zulässig ist. Er ist aber enorm hilfreich für den Aufbau von Grundvorstellungen; eine anschließende Theoriebildung zur Integrierbarkeit kann und soll er jedoch nicht ersetzen!

8 Erforderliche Werkzeug-Fertigkeiten

Für die beschriebenen Zugänge zu Funktionen reicht eine Dynamische-Geometrie-Software mit integriertem Funktionenplotter (wie z. B. GeoGebra) oder Graphik-TR bzw. CAS-TR mit integrierter Geometrie-Software. Beim (vom Autor favorisierten) Einsatz dynamischer Arbeitsblätter sind nur der Zugmodus sowie das Schreiben in ein Textfenster zur Dokumentation der Bearbeitung erforderlich, aber keine weiteren Fertigkeiten im Umgang mit der Software.

Beginnt man stattdessen mit dem leeren Bildschirm und lässt die Schülerinnen und Schüler selber die Dateien aufbauen, so müssen die Schülerinnen und Schüler die Konstruktion von Punkten mit gegebenen, teils dynamischen Koordinaten beherrschen, die Eingabe von Funktionen, die Erzeugung von Spur bzw. Ortslinie, geometrische Grundkonstruktionen (Dreieck, Quadrat, Rechteck, Kreis, Mittelsenkrechte, Punkt auf Objekt, Schnittpunkt), Einsatz von Schiebereglern, das Messen einer Geradensteigung und das Erzeugen von Unter-/Obersumme. Dies benötigt mehr Zeit, ist fehleranfällig und lenkt doch etwas von der eigentlichen mathematischen Fragestellung ab bzw. schiebt sie nach hinten.

9 Fazit

Eine dynamische Software ermöglicht dynamische Zugänge und damit neue Möglichkeiten zum Lehren und Lernen von Oberstufenmathematik. Der Kovariationsaspekt von Funktionen steht im Vordergrund, ermöglicht durch die Ortslinien-Fähigkeit und den Schieberegler-Einsatz eines dynamischen Funktionenplotters. Klarheit über die grundlegenden Aspekte von Funktionen und Variablen sind ebenso erforderlich wie hilfreich.

Der hier skizzierte Weg mit dynamischen Arbeitsblättern ist schülerorientiert und fast voraussetzungsfrei bzgl. Werkzeug-Fertigkeiten; zudem ist er für die Schülerinnen und Schüler weitgehend kalkülfrei (weil die aufwändigen Rechnungen von der Software im Hintergrund erledigt werden). Damit steht (zunächst) der Aufbau von Verständnis für Ableitung und Integral im Vordergrund vor dem Aneignen und Durchführen von Kalkülen. Dieses Vorgehen bietet eine geeignete Grundlage für das anschließende Exaktifizieren und einen nach wie vor notwendigen Theorieaufbau. Anschauung und dynamische Visualisierung sind kein Ersatz, sondern Basis für eine Theoriebildung.

Literaturverzeichnis

Blum, W. (1982). Der Integraph im Analysisunterricht – Ein altes Gerät in neuer Verwendung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 14, S. 25 – 30.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Claus, V. (1990). Perspektiven der Informatik. *login, 10* (6), 43–47.

Elschenbroich, H.-J. (2010a). Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht. In H.-J. Elschenbroich & G. Greefrath (Hrsg.), *Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeuge. Einsatz in der Sekundarstufe I* (S. 8–10). Münster: MV-Wissenschaft.

Elschenbroich, H.-J. (2010b). Ein dynamischer Zugang zu Geometrie und Funktionen – mit dynamischen Arbeitsblättern lehren und lernen. *Praxis der Mathematik, 4* (34), 25–31.

Elschenbroich, H.-J. (2005). Funktionen dynamisch erkunden. In B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.), *Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht* (S. 138–148). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (o. Jg.). *Dynamisch Funktionen entdecken. Fortbildungskurs des DZLM*. Zugriff am 01.09.2014 unter http://www.dzlm.de/fort-und-weiterbildung/kurskonzepte/dynamisch-funktionen-entdecken

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (in Vorbereitung). *Funktionen entdecken!*.

Gutzmer, A. (Hrsg.). (1908). *Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*. Leipzig, Berlin: B. G. Teubner.

KMK (2004) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Hochschulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. München: Luchterhand.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (2010). *Mathematik Neue Wege, 10*. Braunschweig: Schroedel.

Laakmann, H. (2011). Funktionen besser verstehen durch computergestütztes, systematisches Variieren. *Praxis der Mathematik, 38,* 27–34.

Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Funktioniert's – Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik, 2* (47), 1–7.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren 103,* 8–11.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10,* 3–37.

21. Simulieren im Stochastikunterricht

Rolf Biehler, Andreas Eichler, Wolfgang Löding und Peter Stender

Simulieren ist eine zunächst vage beschriebene Tätigkeit, die in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife für die Leitidee Daten und Zufall formuliert ist. In dieser Leitidee kann die Simulation aber ein mächtiges Instrument darstellen, um den Zufall erfahrbar zu machen, Begriffsentwicklung über analytisch behandelbare Standardbeispiele hinaus zu ermöglichen oder analytisch nicht zugängliche Modellierungen eines realen Problems zu untersuchen. Alle drei Möglichkeiten werden in diesem Beitrag anhand von exemplarischen Problemstellungen und mit Verwendung geeigneter Software erläutert.

1 Einleitung

Simulationen ermöglichen die experimentelle Analyse realer stochastischer Situationen anhand eines Modells dieser Situationen (Biehler & Maxara, 2007). Für den Unterricht zur Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe II (KMK, 2012) ermöglichen Simulationen einen experimentellen Zugang zu den Konzepten der Stochastik, wobei zwei Klassen von Situationen eine tragende Rolle spielen. Für die erste Klasse von Situationen ist dabei die Simulation eine Mittlerin zwischen realen, begreifbaren empirischen Daten und abstrakten Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Eichler, 2013) und ermöglicht

- eine vertiefte stochastische Begriffsbildung, indem Simulationen zur Repräsentation einfacher Zufallsversuche genutzt werden (Biehler & Maxara, 2007) und dabei die Analyse von Gesetzmäßigkeiten großer Versuchsanzahlen zufälliger Vorgänge erheblich vereinfachen (Prömmel, 2013; Biehler, Eichler, Engel & Warmuth, 2010);
- im Wechselspiel mit analytischen Methoden (Biehler & Maxara, 2007) einen anschaulichen Zugang zu den Methoden der schließenden Statistik, wobei durch Simulationen auch Fragestellungen elementar bearbeitet werden können, die nicht zu den Standardverfahren der Sekundarstufe II gehören (Biehler et al., 2010; Eichler & Vogel, 2012).

Für die zweite Klasse von Situationen sind Simulationen eine eigenständige Heuristik zur Lösung eines Problems (Methode sui generis; Biehler & Maxara, 2007). In diesem Fall ermöglichen Simulationen

- die Analyse von Situationen, die zu komplex für die Methoden der Schulstochastik sind. Insbesondere können so realistische Probleme im Mathematikunterricht anhand weniger restriktiv gestalteter Modelle bearbeitet werden.

Wir werden in den folgenden Abschnitten auf alle drei Einsatzmöglichkeiten von Simulationen eingehen. Dabei gehen wir davon aus, dass in der Sekundarstufe I bereits einfache und insbesondere auch händische Simulationen im Zusammenhang mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen behandelt wurden (Biehler & Hartung, 2006; Eichler & Vogel, 2013). Die Abschnitte orientieren sich stets an einem paradigmatischen Beispiel, mit dem jeweils das Potential von Simulationen für eine ganze Klasse von Problemstellungen deutlich wird.

Für eine effektive Simulation ist Computereinsatz nötig. Wir haben in diesem Artikel die Software Microsoft Excel, Fathom (vgl. Biehler, Hofmann, Maxara, & Prömmel, 2011) und den TI-Nspire verwendet.

2 Simulationen für eine elementare Begriffsbildung

Für die Stochastik ist die Beziehung zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten ein zentrales Thema für ihre Anwendbarkeit. Dieses Thema sollte in der Sekundarstufe I angelegt und in der Sekundarstufe II erweitert werden:

(i) Welche Aussagen über relative Häufigkeiten in Zufallsexperimenten kann man aus Wahrscheinlichkeiten ableiten (Schluss von der Population/dem Modell auf die Stichprobe)?

(ii) Welche Aussagen über Wahrscheinlichkeiten kann man machen, wenn man in einem Zufallsexperiment bestimmte relative Häufigkeiten beobachtet (Schluss von der Stichprobe auf die Population/das Modell)?

Für das Verständnis in beiden Fragestellungen hilft eine schlichte Regel, das so genannte $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz, das Wolfgang Riemer schon 1991 (Riemer, 1991) als zentral herausgestellt hat, das aber dennoch wenig Eingang in das Stochastikcurriculum und (leider) auch nicht explizit in die Bildungsstandards gefunden hat. Für Fragestellung (i) gilt bekanntermaßen aufgrund der Normalapproximation der Binomialverteilung annähernd für $\sqrt{np(1-p)} > 3$, dass die relative Häufigkeit mit 95 % Wahrscheinlichkeit im Intervall $p \pm \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ zu finden ist. Für die auf Fragestellung (ii) zielenden Konfidenzintervalle gilt unter ähnlichen Voraussetzungen als „Näherungsformel" für die Intervallgrenzen $h_n \pm \frac{1{,}96\sqrt{h_n(1-h_n)}}{\sqrt{n}}$. Ziel sollte es sein, dass Schülerinnen und Schüler frühzeitig mit diesen zwei Regeln arbeiten (Biehler & Prömmel, 2013):

(1) Bei gegebener Wahrscheinlichkeit p befinden sich die relativen Häufigkeiten mit 95 % Wahrscheinlichkeit im Intervall $p \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ (Prognoseintervall), indem man den entsprechenden Zähler in der oben genannten Formel durch 1 abschätzt.

(2) Bei gegebener relativer Häufigkeit h_n können wir für Fragestellung (ii) ebenfalls die unbekannte Wahrscheinlichkeit durch ein Intervall angeben $h_n \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, das die unbekannte Wahrscheinlichkeit mit „95 % Sicherheit" enthält (Konfidenzintervall) und hier wiederum den entsprechenden Zähler der obigen Formel durch 1 abschätzen.

Beide Regeln können mit Hilfe von Simulationen erarbeitet und veranschaulicht werden. Die in der Abschätzung enthaltene didaktische Reduktion scheint uns vertretbar und kann später präzisiert werden. Die Regeln sollten relativ früh eingeführt werden, sobald man mit Simulationen arbeitet.

Ein Problem ist die unterschiedliche Bedeutung von 95 % Sicherheit bzw. Wahrscheinlichkeit in den beiden Regeln. Bei (1) kann man die 95 % Wahrscheinlichkeit auf der Basis der gegebenen Wahrscheinlichkeit p berechnen. Mit einem schlichten Argument könnte man (1) umformen in: Es gilt $|h_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ mit Wahrscheinlichkeit 95 %. Das scheint ja genau die Aussage (2) zu sein. Möglicherweise kann man dies sogar in erster Näherung im Unterricht so stehen lassen, wenn eine spätere Präzisierung in Aussicht gestellt wird.

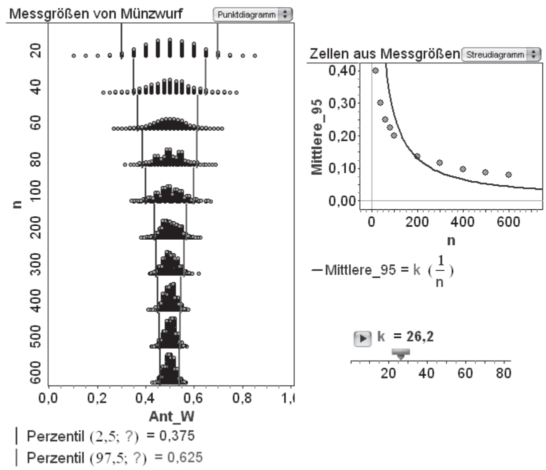


Abb. 1: Simulierte Münzwürfe mit 95 %-Perzentilen (Screenshot aus Fathom)

Für die Erarbeitung der Regel (1) simulieren wir 5000 mal Serien des Münzwurfs in verschiedenen Umfängen und visualisieren die Verteilung der relativen Häufigkeit. In Abbildung 1 sind die Schwellenwerte eingetragen, um den mittleren 95 %-Bereich zu markieren (nämlich das 2,5 %- und das 97,5 %-Perzentil). In einem ersten Schritt sehen die Schülerinnen und Schüler die qualitative Abnahme und können entdecken, dass sich die Intervallbreite bei Vervierfachung des Stichprobenumfangs halbiert (etwa bei der Erhöhung des Serienumfangs von 100 auf 400). In einem weiteren Schritt können 95 %-Breiten gesammelt werden und die Abhängigkeit von n kann graphisch untersucht werden. Man findet keine Funktion des Typs $\frac{k}{n}$ (s. Abbildung 1, rechts), die auch nur annähernd ohne systematische Abweichungen die Daten approximiert. Weiteres Experimentieren liefert eine sehr gute Übereinstimmung für die Funktion $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Dieser Einsatz der Simulation illustriert zugleich auch die Elementarisierungsfunktion der Simulation. Die theoretische Herleitung setzt den Begriff der Binomialverteilung und der Normalapproximation sowie der Sigma-Regeln voraus. Diese benötigt man hier nicht. Natürlich muss den Schülerinnen und Schülern verdeutlicht werden, dass diese Experimente keinen allgemeinen Beweis ersetzen (vgl. den Beitrag von Ufer und Kramer, Kapitel 7 in diesem Band).

Die für die Fragestellung (2) und die damit verbundenen Konfidenzintervalle entscheidenden Visualisierungen und Simulationen sind andere, wenn man die Bedeutung der 95 %-Sicherheit verdeutlichen möchte.

Kollektion 1

	Ws	h	unteres_KI	oberes_KI	
=	0,3	ZufallBinomial (n ; Ws) / n	$h - \frac{1}{\sqrt{n}}$	$h + \frac{1}{\sqrt{n}}$	unteres_
1	0,3	0,48	0,338579	0,621421	falsch
2	0,3	0,24	0,0985786	0,381421	wahr
3	0,3	0,44	0,298579	0,581421	wahr
4	0,3	0,22	0,0785786	0,361421	wahr

Abb. 2: Simulation von Konfidenzintervallen bei $n = 50$

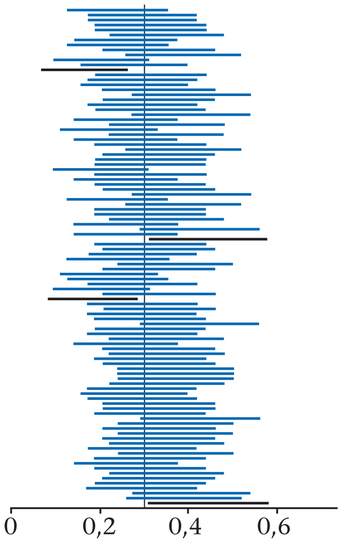


Abb. 3: Visualisierung der 100 Konfidenzintervalle wie bei Abbildung 2 bei konstanter „unbekannter Wahrscheinlichkeit" von 0,3

Zufällig ist nicht die unbekannte Wahrscheinlichkeit p, sondern das abhängig vom Stichprobenergebnis bestimmte Konfidenzintervall $h_n \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ (genauer gesagt die Werte in diesem Intervall, die größer gleich 0 sind). Wiederholt man die Methode „Konfidenzintervall" sehr oft, so enthält das gewählte Intervall die wahre Wahrscheinlichkeit in etwa 95 % der Fälle. Diese Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Tätigkeit von Statistikern und gibt deren Erfolgsquote an, ein richtiges Konfidenzintervall zu liefern.

Die Simulation in Abbildung 3 (analog zu Biehler et al., 2011, S. 149) simuliert ein Statistikbüro. Wir nehmen zunächst fiktiv an, dass der Statistiker immer Situationen bekommt, in denen die unbekannte Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ ist. In einer Tabelle simulieren wir schrittweise die Berechnung bis zum Konfidenzintervall (Abbildung 2). In der letzten Spalte wird geprüft, ob 0,3 im Konfidenzintervall liegt. Eine Verallgemeinerung erreicht man, wenn man die unbekannten Wahrscheinlichkeiten in Spalte 1 willkürlich wählt.

Abbildung 3 visualisiert die zufälligen Konfidenzintervalle für $N = 100$ Durchgänge. Bei diesem Durchgang enthalten 4 von 100 Intervallen die 0,3 nicht (auch in schwarz hervorgehoben). Wenn man die Simulation erneuert, kann man die Variation der Konfidenzintervalle erleben. Damit wird deutlich, dass das Konfidenzintervall zufällig ist und das unbekannte p feststeht. Damit kann der Fehlvorstellung vorgebeugt werden, p sei im jeweilig realisierten Konfidenzintervall mit Wahrscheinlichkeit von 95 % enthalten.

Die dynamischen Abbildungen 1 und 3 stellen zentrale Grundvorstellungen zur Stochastik dar: Abbildung 1 zum $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz und Abbildung 3 zum zufälligen Charakter der Konfidenzintervalle. Mit Simulation können sie früh und relativ theoriearm eingeführt werden.

3 Simulation für eine erweiterte Begriffsbildung

Simulationen können wie eben zur Ausschärfung stochastischer Begriffe verwendet werden. Sie können aber ebenso verwendet werden, um „im Wechselspiel mit analytischen Methoden" (Biehler & Maxara, 2007, S. 46) in zunächst nicht überschaubaren Problemen eine ausreichende Näherungslösung zu erzeugen („Simulation als Methode sui generis"). Wir betrachten dazu eine Problemstellung zum Hypothesentesten, bei der die Simulation als Mittlerin zwischen der empirischen Welt der Daten und der theoretischen Welt des Zufalls fungiert (Eichler, 2013).

Erheben Sie in Ihrem Kurs Daten zu einem Merkmal mit zwei Merkmalsausprägungen, bei dem Sie davon ausgehen, dass die Häufigkeit der Zustimmung zu den beiden Merkmalsausprägungen vom Geschlecht abhängig ist. Ein Beispiel dafür könnte das Merkmal *Fußballfan* (ja/nein) sein.
Stellen Sie die Verteilung der Merkmale in einer Vierfeldertafel dar. Simulieren Sie die Verteilung der Merkmale unter der Hypothese der Unabhängigkeit händisch und anschließend mit dem Rechner. Beurteilen Sie dann, ob das von Ihnen gewählte Merkmal abhängig vom Geschlecht ist.

Aufgabe 1: Fußballfan

Diese Aufgabe (vgl. auch Eichler & Vogel, 2011) zielt auf einen Unabhängigkeitstest bzw. die Überprüfung, ob sich die Hypothese der Unabhängigkeit zweier Merkmale falsifizieren lässt. In einem Kurs mit 25 Schülerinnen und Schülern hat sich die in Abbildung 4 (links) dargestellte Verteilung ergeben (mit F: Fußballfan, nF: kein Fußballfan).

	m	w	Summe
F	7	1	8
nF	6	11	17
Summe	13	12	25

	m	w	Summe
FZ	4	4	8
nFZ	9	8	17
Summe	13	12	25

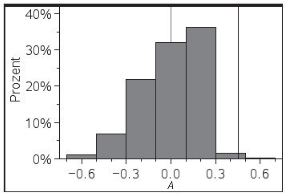


Abb. 4: Empirisches Ergebnis (links), einfache (Mitte) und mehrfache Simulation (rechts) für die Betrachtung der Unabhängigkeit zweier Merkmale

Ein mögliches und einfaches Maß für den Zusammenhang der beiden Merkmale ist das Assoziationsmaß $A = \frac{h(m,F)}{h(m)} - \frac{h(w,F)}{h(w)}$, das in diesem Fall den Wert von ungefähr 0,46 ergibt (vgl. dazu auch Eichler & Vogel, 2011). Da der Wert von A (wie ein Korrelationskoeffizient) alle Werte zwischen –1 und 1 annehmen kann, bleibt die Frage, wie der Wert nahe 0,5 interpretiert werden kann. Die Grundlage der Interpretation lässt sich durch Simulation schaffen.

Haben Schülerinnen und Schüler ihre persönlichen Ausprägungen zum Merkmal Fußballfan jeweils auf einer Karte notiert, lässt sich anschließend die stochastische Unabhängigkeit durch Mischen *simulieren:* Die Karten zum Merkmal Fußballfan werden gemischt und zufällig wieder ausgeteilt. Dabei bleiben die Randsummen der Vierfeldertafel erhalten, im Inneren der Tafel ergibt sich durch das Mischen allerdings eine unabhängige Zuordnung von Geschlecht und Fußballfan. Ein Ergebnis einer solchen zufälligen Zuordnung ist in Abbildung 4 (Mitte) mit $A = -0{,}03$ dargestellt.

Ein Ergebnis des Unterrichts zur Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe I sollte die Erkenntnis der Variabilität statistischer Daten sein (Wild & Pfannkuch, 1999; Eichler & Vogel, 2013). Es sollte den Schülerinnen und Schülern also bei diesem Beispiel *erneut* bewusst werden, dass das einfache Assoziationsmaß A im Allgemeinen nicht den Wert 0 annimmt, sondern (je nach Größe der Stichprobe) um den Wert 0 schwankt, selbst wenn wir Unabhängigkeit vorliegen haben. So ergibt etwa eine weitere händische Simulation den Wert $A = 0{,}13$.

Ist durch wenige Simulationen das Schwanken des Messwerts A und auch die Funktionsweise der Simulation deutlich geworden, kann das Verfahren dem Rechner übertragen werden. Dieser liefert bei 10 000 Durchgängen das in Abbildung 4 (rechts) dargestellte Ergebnis zur Verteilung der Werte des Assoziationsmaßes A. Eine statistische *Beurteilung* des

Ergebnisses im Sinne eines Hypothesentests (vgl. den Beitrag von Biehler und Eichler, Kapitel 6 in diesem Band) könnte ergeben: Da bei 10 000 Simulationen, die auf der Basis der stochastischen Unabhängigkeit erzeugt wurden, sich nur in etwa 3 Prozent der Fälle ein Wert $|A| \geq 0{,}46$ ergeben hat, spricht man auch davon, dass der p-Wert etwa 3 Prozent ist. Da der p-Wert ≤ 5 % ist, kann man die Hypothese der stochastischen Unabhängigkeit (per Simulation) auf dem 5 %-Niveau ablehnen. Das Ergebnis selbst kann für Schülerinnen und Schüler einerseits der Abschluss der Bearbeitung des Problems sein, andererseits aber auch Anlass zur Untersuchung nicht-simulativer Methoden zur Beurteilung der Unabhängigkeit sein, etwa des exakten Tests von Fischer oder des bei ausreichender Stichprobengröße fast standardmäßig verwendeten χ^2-Tests (z. B. Riemer, 1989).

Der hier vorgestellte Permutationstest ist im Curriculum der Sekundarstufe II gegenwärtig im Gegensatz zum Test zum Parameter p einer Binomialverteilung kein Standardstoff. Dennoch bietet sich diese Aufgabe aus verschiedenen Gründen an: So ermöglicht dieser Test in der hier vorgestellten Aufgabe einen Zyklus von der eigenen Datenerhebung als authentischem Startpunkt zum Entwickeln einer stochastischen Methode (Eichler & Vogel, 2013) über eine händische Simulation, die als Ausgangspunkt zum *Be-Greifen* der Simulation selbst verstanden werden kann (Harradine & Konold, 2006), bis hin zur rechnergestützten Simulation und zur Interpretation der so erzeugten Ergebnisse. Dadurch erfüllt der Permutationstest auch eine didaktische Funktion zur stochastischen Begriffsbildung. So muss bei diesem Test zunächst ein Maß zur Beurteilung der Unabhängigkeit entwickelt werden, hier das Assoziationsmaß A. Dieses Maß liefert zu einem empirischen Ergebnis sowie zu einem klar ausgezeichneten Modell (der stochastischen Unabhängigkeit der randomisierten, gemischten Merkmale) einen theoretischen sowie simulierte Referenzwerte. Die Schwankung dieser Referenzwerte kann einerseits quasi-empirisch untersucht werden und andererseits zu einer Beurteilungsgrundlage des empirisch ermittelten Messwerts führen. Durch diese Eigenschaften kann der Permutationstest im Gegensatz zum in der Sekundarstufe II sonst vorherrschenden Binomialtest einen geeigneten, propädeutischen Einstieg zum Hypothesentest darstellen, der einerseits eine vertiefte Begriffsbildung fördern kann (Leuders, 2005; Rossman, 2008; Biehler et al, 2011, S. 133 ff.), andererseits die sonst in der Schule üblichen Problemstellungen erweitern kann.

4 Simulationen in realitätsnahen Fragestellungen

Das realistische Thema „Flugbuchung" hat ein Potenzial für den Mathematikunterricht, das über die Beispiele für entsprechende Prüfungsaufgaben, die in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) enthalten sind, hinausgeht. Zum einen können im Rahmen der Bearbeitung mit Hilfe einer Binomialverteilung weitergehende relevante Aspekte im Unterricht sinnstiftend behandelt werden, zum anderen erweisen sich die Voraussetzungen, die für die Verwendung der Binomialverteilung notwendig sind, in der Realität als kaum gegeben (Biehler, 2005). Werden diese realistisch berücksichtigt, so können die entstehenden mathematischen Modelle in der Schule nur noch mit Hilfe von Simulationen bearbeitet werden. Ein Bearbeitungsvorschlag für die Aufgaben im Rahmen der Flugbuchung ist in der Begleit-CD zu diesem Buch enthalten. Die Aufgaben basieren dabei stets auf dem folgenden Grundszenario:

Für eine bestimmte Flugstrecke verwendet eine Fluggesellschaft ein Flugzeug mit n Sitzplätzen. Es wird davon ausgegangen, dass rechtzeitig vor Flugbeginn alle Flüge ausgebucht und die Tickets von den Fluggästen bezahlt sind. Erfahrungsgemäß erscheinen aber zu den jeweiligen Flügen einige Fluggäste nicht, wobei der Flugpreis nicht erstattet wird. Bei jedem Flug bleiben also eventuell Sitzplätze frei. Die Fluggesellschaft hat ein Interesse daran, diese Sitzplätze zu nutzen, was sie durch Überbuchungen realisiert: Sie verkauft mehr Flugtickets als Plätze in den einzelnen Maschinen vorhanden sind. Dadurch hat die Fluggesellschaft zunächst zwar höhere Einnahmen. Aber es kann auch geschehen, dass mehr Fluggäste mit gültigen Tickets erscheinen, als Plätze für den entsprechenden Flug zur Verfügung stehen. Diese Fluggäste können dann nicht in der gebuchten Maschine befördert werden. Hierdurch muss die Fluggesellschaft Regressforderungen erfüllen, die Kosten verursachen.

Die Anzahl der Personen, die für einen einzelnen Flug buchen und dann aber auch tatsächlich erscheinen, wird als Zufallsvariable aufgefasst, von der in der Aufgabenstellung unterstellt bzw. diskutiert wird, dass sie binomialverteilt ist.
Das Kostenrisiko im Falle von mehr als n erscheinenden Fluggästen und die Mehreinnahmen der Fluggesellschaft durch Überbuchung sollen mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsmodells gegeneinander abgewogen werden. Das Ziel soll eine optimale Wirtschaftlichkeit für die Fluggesellschaft sein.

Aufgabe 2: Flugbuchungen

In diesem Beitrag werden wir insbesondere den simulativen Ansatz diskutieren und die analytischen Ansätze nur so kurz berühren, dass die Problemstellung verständlich wird.

4.1 Die Flugbuchung analytisch

Wir gehen zunächst im Modell davon aus, dass das Flugzeug $n = 144$ Sitzplätze hat, für den Flug $m = 160$ Buchungen angenommen werden und der Preis für jeden Sitz identisch 270 € beträgt. Weiter gehen wir im Modell davon aus, dass die Kosten für jeden Passagier, für den kein Platz mehr da ist, für die Fluggesellschaft 450 € betragen (der Passagier bekommt 450 € inkl. Ticketerstattung ausgezahlt). Ein bereits gezahlter Flugpreis wird nicht erstattet, wenn der Flug nicht angetreten wird. Schließlich wird im Modell angenommen, dass das tatsächliche Erscheinen eines Passagiers unabhängig von dem Erscheinen eines anderen Passagiers ist und die Wahrscheinlichkeit dafür immer 90 % beträgt. Diese Voraussetzungen für die Verwendung einer Binomialverteilung treffen in der Realität bestenfalls grob zu und werden deshalb weiter unten fallen gelassen.

Unter diesen Annahmen betragen die Mehreinnahmen der Fluggesellschaft $16 \cdot 270$ € $= 4320$ €. Diese Einnahmen werden gemindert, wenn mehr als 144 Reisende den Flug antreten. Die erwarteten Mindereinnahmen R werden mit Hilfe der Binomialverteilung für $k = 145$ bis $k = 160$ bestimmt:

$$R = 450\text{ €} \cdot \sum_{k=145}^{160} (k - 144) \cdot \binom{160}{k} \cdot 0{,}9^{k} \cdot 0{,}1^{160-k} = 677{,}67\text{ €}$$

Da die Mehreinnahmen die erwarteten Mindereinnahmen (sogar deutlich) übersteigen, lohnt die Überbuchung für die Fluggesellschaft bei den hier angenommenen Werten.

Auf erhöhtem Niveau kann das Thema Flugbuchung in einem sinnstiftenden größeren Kontext mit der Frage behandelt werden, für welche Anzahl m pro Flug von angebotenen und damit auch verkauften Plätzen die Fluggesellschaft die maximalen erwarteten Mehreinnahmen im Vergleich zu einem Konzept ohne Überbuchungen hat.

Dazu werden bei Variation von m (und ggf. auch p) die durch Überbuchung erzielten *Mehreinnahmen* abzüglich der erwarteten Mindereinnahmen $E(M)(m,p)$ in einer Wertetabelle erfasst und ausgewertet: (hier nur für $p = 0{,}9$; s. Tabelle 1).

Tabelle 1: Erwartete Mehreinnahmen abzüglich der erwarteten Mindereinnahmen als Funktion der Anzahl *m* der angebotenen verkauften Plätze

m	144	145	146	147	148	149	150
$E(M)(m,p)$	0 €	270 €	540 €	810 €	1080 €	1350 €	1619 €
m	160	161	**162**	163	170	192	193
$E(M)(m,p)$	3642 €	3683 €	**3688 €**	3661	2960 €	0 €	–135 €

Damit ergeben sich für die Fluggesellschaft unter den getroffenen Annahmen maximale erwartete Mehreinnahmen von 3688 € bei 162 angebotenen und verkauften Sitzplätzen (s. Hervorhebung in Tabelle 1). Qualitativ liegt die hohe Zahl an profitabler Überbuchungen daran, dass der Flugpreis mit 270 € im Vergleich zu den Kosten für die Nichtbeförderung in Höhe von 450 € relativ hoch ist.

Erst bei $m > 192$ wäre die Überbuchungspraxis vom Erwartungswert her verlustreich!

4.2 Die Flugbuchung simulativ

Insbesondere die letzte Fragestellung des vorangegangenen Abschnitts liegt ohne Zweifel auf dem erhöhten Niveau im „Anforderungsbereich III". Sie kann aber auch einfacher und sehr gut mit Hilfe stochastischer Simulation – hier beispielsweise mit einer Tabellenkalkulation wie Excel (s. Abbildung 5) – angegangen werden (KMK, 2012, S. 81).

So kann beispielsweise die Tatsache, dass ein bestimmter Passagier zu einem Flug erscheint, recht einfach simuliert werden, wenn – wie im vorangegangenen Abschnitt – von der stochastischen Unabhängigkeit des Erscheinens verschiedener Personen bei konstanter Wahrscheinlichkeit p ausgegangen wird.

↓ Passagier Nr. ↓

Flug Nr. ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	…
2	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	…
3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	…
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	…
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	…
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	…
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	…
8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	…
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	…

Abb. 5: Simulation des Erscheinens von mehreren Passagieren zu mehreren Flügen (Ausschnitt)

Die einzelnen Zellen werden dabei alle mit der gleichen Rechenformel erzeugt: = *WENN(ZUFALLSZAHL()*>0,9;0;1). So werden stochastisch unabhängige Bernoulli-Experimente mit $p = 0{,}9$ mit Hilfe von „Zufallszahlen“ simuliert. „1“ bedeutet, dass der entsprechende Passagier zum Flugantritt erscheint, „0“ dass er nicht erscheint. In der Tabelle wird z. B. eine Simulation von 100 Flügen mit je 160 Buchungen durchgeführt. Mit dem Befehl zur Neuberechnung kann wiederholt eine erneute Simulation von 100 Flügen ausgelöst werden.

Ein Auswertungsbereich im gleichen Tabellenblatt könnte etwa aussehen wie in Abbildung 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1			Eingabeparameter:														
2	*m:*	160		p:	0,90												
3	*n:*	144															
4			Differenz zu ohne Überbuchung erwarteten Einnahmen↓	Verbleibende Einnahmen↓	Kosten wg. Überbuchungen↓	Anzahl abgewiesener Passagiere↓	Einnahmen ↓	Anzahl erscheinender Passagiere↓									
5		Mittelwerte bei 100 Flügen →	3.654,00	42.534,00	666,00	1,48	43.200,00	144,07									
6	100																
7	Anzahl Flüge↑ mit Überbuchungsgewinn									↓Passagier Nr.↓							
8		Spalte B zeigt die die Mittelwert-e n t w i c k l u n g von Spalte C, die man beliebig verlängern und ggf. auch graphisch darstellen kann							Flug Nr.↓	1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	2970	2.970,00	41.850,00 €	1.350,00 €	3	43.200,00 €	147	1	0	1	1	1	1	1	1	1
10	1	3645	4.320,00	43.200,00 €	0,00 €	0	43.200,00 €	144	2	1	0	1	1	1	1	1	1
11	1	3870	4.320,00	43.200,00 €	0,00 €	0	43.200,00 €	142	3	1	1	1	0	1	1	1	1
12	1	3983	4.320,00	43.200,00 €	0,00 €	0	43.200,00 €	142	4	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	4050	4.320,00	43.200,00 €	0,00 €	0	43.200,00 €	140	5	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	4095	4.320,00	43.200,00 €	0,00 €	0	43.200,00 €	143	6	0	1	1	0	1	1	1	1
15	1	3999	3.420,00	42.300,00 €	900,00 €	2	43.200,00 €	146	7	1	1	1	1	1	0	1	1
16	1	4039	4.320,00	43.200,00 €	0,00 €	0	43.200,00 €	139	8	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	4020	3.870,00	42.750,00 €	450,00 €	1	43.200,00 €	145	9	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	3870	2.520,00	41.400,00 €	1.800,00 €	4	43.200,00 €	148	10	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	3870	3.870,00	42.750,00 €	450,00 €	1	43.200,00 €	145	11	1	1	1	1	1	1	1	1

Abb. 6: Simulierte 100 Flüge mit Überbuchung

Der Wert 3654 € in Zelle C5 ist das interessierende Simulationsergebnis von einmal 100 simulierten Flügen. Er entspricht dem theoretischen Wert (s. o.) von 3642 € und hat zufällig eine recht gute Genauigkeit, der Wert 3793 € bei einer anderen Simulation hat dagegen nur eine sehr grobe Genauigkeit. Dennoch kann die ständige Neuberechnung der Daten und damit des Mittelwertes in Zelle C5 ein Gefühl für die Güte der Simulationsergebnisse und deren Streuung schaffen.

In Spalte B werden als „didaktischer Zucker“ zusätzlich die Mittelwerte vom ersten bis zum j-ten Flug (einschließlich) dargestellt, um die Entwicklung der Mittelwerte bei steigender Flügeanzahl zu dokumentieren. (Der Wert in Zelle C5 ist also identisch mit dem letzten Wert in Spalte B). Die Daten in Spalte B könnten z. B. mit Erkenntnisgewinn graphisch aufbereitet werden.

Nun kann die Anzahl der Flüge im Rahmen der Softwarekapazität leicht durch „Ziehen nach unten“ erhöht werden. Bei 5000 Flügen hatte sich so z. B. der bessere, aber immer noch unbefriedigende Wert 3631 € in Zelle C5 ergeben. Ähnlich einfach lässt sich mit dem Überbuchungswert m experimentieren. Zum Beispiel hat sich bei 2000 Flügen und $m = 194$ eine Differenz zu den ohne Überbuchung erwarteten Einnahmen von –287 € ergeben (theoretisch ergibt sich der Mittelwert von –270 €).

Wie die andere in diesem Beitrag verwendete Software (Fathom, TI-Nspire CAS) enthält auch Excel die Möglichkeit, in „Päckchen zu simulieren“ und Mittelwerte von Mittelwerten zu bilden (Für Excel-Kenner: Dies geschieht elegant mit der Aktivierung der Option „Iteration“, die jeweilige Initialisierung erfolgt durch einen selbst einzurichtenden Schalter). Mit diesem „Trick" kann man leicht 10 000 Flüge und auch mehr ohne erhöhten Speicher- und vor allem ohne erhöhten Bildschirmplatzaufwand simulieren. Die Daten in Abbildung 7 liefern bei 1000 Iterationen von je 100 Flügen mit 3640,87 im Feld C8 den theoretischen Wert von 3642 schon recht gut:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1			Eingabeparameter:										
2	*m:*	**160**		**p:**	**0,90**								
3	*n:*	**144**											
4		160		Schalter									
5		999											
6		**Iterationszahl K:**	**1.000**	**Init:**	**0**		**1.000**						
7			3.640.873,50	42520873,50	679126,50	1509,17	43200000,00	144009,35					
8	**Iterierte Mittelwerte:**		**3.640,87**	**42.520,87**	**679,13**	**1,51**	**43.200,00**	**144,01**					
9			**Differenz zu ohne Überbuchung erwarteten Einnahmen↓**	**Verbleibende Einnahmen↓**	**Kosten wg. Überbuchungen↓**	**Anzahl abgewiesener Passagiere↓**	**Einnahmen ↓**	**Anzahl erscheinender Passagiere↓**					
10													
11	**Mittelwerte bei 100 Flügen →**		**3.591,00**	**42.471,00**	**729,00**	**1,62**	**43.200,00**	**144,08**					
12	**100**												
13	↑Anzahl Flüge↑ mit Gewinn		**38.880,00**							↓Passagier Nr.↓			
14		**B zeigt die Mittelwertentwicklung von Spalte C und kann beliebig verlängert und auch graphisch dargestellt werden**							Flug Nr.↓	1	2	3	4
15	1	**3420**	3.420,00	42.300,00 €	900,00 €	2	43.200,00 €	146	1	1	1	1	1
16	1	**3870**	4.320,00	43.200,00 €	0,00 €	0	43.200,00 €	144	2	1	1	1	1
17	1	**3570**	2.970,00	41.850,00 €	1.350,00 €	3	43.200,00 €	147	3	1	1	1	1
18	1	**3645**	3.870,00	42.750,00 €	450,00 €	1	43.200,00 €	145	4	1	1	1	1

Abb. 7: Simulation von 1000 x 100 Flügen mit Überbuchung
(vgl. Beispieldatei auf der Begleit-CD, „Flugbuchungen__Iter_Ld.xlsx")

4.3 Komplexe Modellierung der Flugbuchung mit Simulation

In der bisher beschriebenen Form kann die „Flugbuchung" im Unterricht als Beispiel für die Anwendung der Binomialverteilung verwendet werden. Eine realitätsnähere Betrachtung der Situation kann gelingen, wenn die Fragestellung den Unterricht über einen längeren Zeitraum begleitet und den Unterricht als paradigmatisches Beispiel (Freie und Hansestadt Hamburg, 2009, S. 18) für die Binomialverteilung und die Grenzen der Anwendung strukturiert. In solch einem Unterrichtsgang werden die mathematischen Inhalte in jedem Schritt auf dieses Beispiel bezogen, so dass eine starke kognitive Verknüpfung der Theorie mit dem paradigmatischen Beispiel angelegt wird. Zwar werden zur Übung der mathematischen Inhalte auch andere Aufgaben behandelt, diese eine Fragestellung konstituiert jedoch den „roten Faden" des Unterrichts, indem schrittweise zugehörige Simulationsrechnungen eingesetzt werden, um zu den formalen Methoden parallel stochastische Intuitionen zu entwickeln.

In vielen Lehrbüchern findet man dagegen zu Binomialverteilungen hauptsächlich eingekleidete Aufgaben mit der problematischen Konsequenz, dass Schülerinnen und Schüler den gegebenen Sachverhalt nicht inhaltlich analysieren, sondern nur die für die Binomialverteilung erforderlichen Parameter n, k, p zu identifizieren versuchen (Biehler, 2005). Insbesondere geht, wenn man nur ein einziges stochastisches Modell im Blick hat, die kritische Prüfung der notwendigen Voraussetzungen zur Anwendung dieses Modells verloren: Ist die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse (hier: des Erscheinens der gebuchten Fluggäste zum Flug) gerechtfertigt, und sind die Absage-Wahrscheinlichkeiten für alle Buchungen tatsächlich identisch? In der Praxis verwenden Fluggesellschaften komplexe Modelle, die auf umfangreichen Datenanalysen beruhen (vgl. die bei Biehler, 2005, angegebene Literatur). Für den Unterricht schlagen wir vor, wenigstens eine relativ einfache Variation dieser Annahmen zu realisieren.

Eine Fluggesellschaft wird beide Annahmen kaum voraussetzen. So werden kleine Reisegruppen wie Familien oder Paare im Falle der Verhinderung einer Person oft als ganze Gruppe stornieren, und die Absage-Wahrscheinlichkeiten werden mit dem Zeitpunkt der Buchung zusammenhängen. Außerdem können die Erfahrungen über die Absagewahrscheinlichkeiten von bestimmten Personengruppen genutzt werden, um die Auslastung zu optimieren. So werden beispielsweise Urlaubsreisende mit deutlich höheren Wahrscheinlichkeiten zum Flug erscheinen als Geschäftsreisende, da Urlaubsreisen nur bei sehr einschneidenden Ereignissen abgesagt werden, während Reisen im Business-Bereich i. A. deutlich mehr Unsicherheiten unterliegen. Beide Aspekte sind aber in der Schule mit analytischen Mitteln nicht mehr mit vertretbarem Aufwand zu behandeln, während dies mit einer stochastischen Simulation gut realisierbar ist. Die Unterscheidung von zwei Kundengruppen (Geschäftsreisende und Urlaubsreisende) kann z. B. realisiert werden, indem man von einer festen Anzahl buchender Geschäftsreisender ausgeht und mit dieser Anzahl wie bisher unter der Vorgabe modelliert, dass alle Geschäftsreisenden einen Platz erhalten. Die dabei ermittelte Anzahl an freien Plätzen wird dann an die Urlaubsreisenden vergeben. Dabei werden die beiden Absage-Wahrscheinlichkeiten unterschiedlich gewählt. Die erste Binomialverteilung könnte noch analytisch wie oben gerechnet werden, jedoch variieren Parameter für die Situation der Urlaubsreisenden mit den Ergebnissen dieses ersten stochastischen Prozesses und entziehen sich damit der analytischen Betrachtung.

Gibt man die Annahme auf, dass das Erscheinen zum Flug stochastisch unabhängig erfolgt, so führt dies zu wiederholten mehrschrittigen Prozessen, wobei im ersten Schritt die Gruppengröße zufällig bestimmt wird und dann mit Hilfe der Absage-Wahrscheinlichkeit simuliert wird, ob die Gruppe erscheint oder nicht. Alternativ kann im ersten Schritt das Eintreffen eines Gruppenmitglieds simuliert werden und im Falle einer Absage wird stochastisch ermittelt, wie viele Personen davon betroffen sind. Auch dies ist ein Prozess, der sich der analytischen Untersuchung in der Schule entzieht. Eine ausführliche Darstellung dieser Simulationen findet sich auf der dem Buch beiliegenden CD.

Das Einbeziehen dieser Simulationen im Unterricht kann für Schülerinnen und Schüler die Bedeutung der Voraussetzungen der Benutzung der Binomialverteilung deutlich machen und aufzeigen, dass mit Hilfe von Simulationen auch ohne Standardverfahren Ergebnisse bestimmt werden können. Der dabei erforderliche Aufwand verdeutlicht im Gegenzug prägnant, wie wirksam ein stochastisches Standardinstrument wie die Binomialverteilung ist, wenn die erforderlichen Voraussetzungen gegeben sind.

5 Rückblick

Simulationen sind sicher nicht auf die Sekundarstufe II begrenzt, sondern sollten bereits in der Sekundarstufe I, händisch und mit dem Rechner, eine Rolle spielen. Die Beispiele in diesem Beitrag beziehen sich allerdings nur auf die Sekundarstufe II und sind in ihrer Reichweite unterschiedlich gewählt. Eine wichtige Grundlage der stochastischen Begriffsbildung ist das in Abschnitt 2 diskutierte $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz das einen Schlüssel zu den potentiellen Konzepten der Sekundarstufe II darstellt, der in den anderen Beispielen stets mitschwingt. Mit dieser Begriffsbildung ist die Erweiterung des sinnstiftenden Einsatzes von Simulationen in zwei Bereichen möglich. So können Simulationen die Problemkontexte zu prinzipiell bekannten Methoden der Sekundarstufe II erweitern, wie am Beispiel eines Hypothesentests zu dem analytisch nur bedingt zugänglichen, mit Simulation aber gewinnbringend einsetzbaren Unabhängigkeitstest in Abschnitt 3 diskutiert wurde. Zudem können Simulationen helfen, einen gänzlich nicht mehr in der Schule beherrschbaren mathematischen Kontext bei komplexen Realsituationen zu untersuchen, wie das Beispiel der Flugbuchung in Abschnitt 4 verdeutlichen sollte. Diese drei sehr unterschiedlichen Beispiele stehen für die Kernaussage dieses Beitrags: Simulationen stellen für den Stochastikunterricht eine zentrale Strategie dar.

Literaturverzeichnis

Biehler, R. (2005). Authentic modelling in stochastics education – the case of the binomial distribution. In H.-W. Henn & G. Kaiser (Hrsg.), *2005. Festschrift für Werner Blum* (S. 19–30). Hildesheim: Franzbecker.

Biehler, R. & Maxara, C. (2007). Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *Der Mathematikunterricht, 53* (3), 45–61.

Biehler, R. & Hartung, R. (2006). Die Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 51–80). Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C. & Prömmel, A. (2011). *Daten und Zufall mit Fathom – Unterrichtsideen für die SI und SII mit Software-Einführung und Software Fathom.* Braunschweig: Schroedel.

Biehler, R. & Prömmel, A. (2013). Von ersten stochastischen Erfahrungen mit großen Zahlen bis zum $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz – ein didaktisch orientiertes Stufenkonzept. *Stochastik in der Schule, 33* (2), 14–25.

Biehler, R., Eichler, A., Engel, J. & Warmuth, E. (2010). *Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II – Kompetenzprofile für die Bildungsstandards aus Sicht der Stochastik und ihrer Didaktik.* Zugriff am 03.09.2014 unter www.stochastik-in-der-schule.de/aktuelles.htm

Eichler, A., & Vogel, M. (2011). *Leitfaden Stochastik.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Eichler, A. & Vogel, M. (2012). Stochastik – fit für die Zukunft. *Praxis der Mathematik, 48,* 2–9.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Eichler, A. (2013). Simulation als Bindeglied zwischen der empirischen Welt der Daten und der theoretischen Welt des Zufalls. In T. Wassong, D. Frischemeier, R. P. Fischer, R. Hochmuth & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Harradine, A. & Konold, C. (2006). How representational medium affects the data displays students make. In A. Rossman & B. Chance (Hrsg.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (CD-ROM). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Freie und Hansestadt Hamburg – Behörde für Schule und Berufsbildung (Hrsg.). (2009). *Rahmenplan Mathematik: Bildungsplan gymnasiale Oberstufe.* Hamburg: Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012.* Zugriff am 20.08.2014 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Leuders, T. (2005). Darf das denn wahr sein? Eine schüleraktive Entdeckung der Grundidee des Hypothesentestens durch Simulation mit Tabellenkalkulation. *Praxis der Mathematik, 47* (4), 8–16.

Prömmel, A. (2013). *Das GESIM-Konzept – Rekonstruktion von Schülerwissen beim Einstieg in die Stochastik mit Simulationen.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Riemer, W. (1989). Der Chi-Quadrat-Anpassungstest und Irrfahrten in der Ebene. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 42* (6), 344–352.

Riemer, W. (1991). Das ‚Eins durch Wurzel aus n‘ Gesetz. Einführung in statistisches Denken auf der Sekundarstufe I. *Stochastik in der Schule, 11* (3), 24–36.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7(2),* 5–19.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 223–248.

Anhang: Zur Aufgabensammlung auf der CD

Christina Drüke-Noe

1. Zur Entstehung der Aufgaben

Die auf der diesem Buch beiliegenden CD veröffentlichten Aufgaben wurden von erfahrenen Lehrkräften verschiedener Bundesländer entwickelt. Im Verlauf des mehrstufigen Entwicklungsprozesses wurden diese Aufgaben zunächst praktisch von diesen Lehrkräften erprobt und dann weiterentwickelt, sodann von wissenschaftlichen Beraterinnen und Beratern begutachtet und schließlich im Dialog mit den Entwicklerinnen und Entwicklern fertiggestellt und mit Lösungserwartungen versehen.

Die fachdidaktische Leitung dieses Prozesses hatte die Arbeitsgruppe von Werner Blum an der Universität Kassel, der Christina Drüke-Noe, Sebastian Vogel, André Krug, Kay Achmetli und Janina Krawitz angehörten. Sie alle wirkten auch an der Überarbeitung der Aufgaben mit. Gesteuert wurde dieser Entwicklungs- und Überarbeitungsprozess von Christina Drüke-Noe (seit Mai 2014: Pädagogische Hochschule Weingarten). Dem IQB oblag die Steuerung des Gesamtprozesses; die Federführung hatte hier Alexander Roppelt inne.
Die fachdidaktische Beratung während der Aufgabenentwicklung übernahmen Gabriele Kaiser (Universität Hamburg) und Michael Neubrand (Universität Oldenburg).
Zur Aufgabenentwicklungsgruppe gehörten Viola Adam (BE), Ulrich Burger (HE), Lars Buse (NI), Christine Fiedler (TH), Steffen Günther (SN), Silvia Knott (SN), Torsten Krausche (BE), Jürgen Kury (BW), Elmar Ledig (NI), Wolfgang Löding (HH), Helen Ossmann (RP), Andreas Pallack (NW), Elke Pietsch (MV), Lutz-Rainer Radeiski (ST), Christian Scheungrab (BY), Ursula Schmidt (NW), Peter Stender (HH), Claudia Uhl (BW) und Michael Voss (SL).

2. Hinweise zur Aufgabensammlung

Die Bildungsstandards aller Fächer sollen gemäß Klieme-Expertise drei zentrale Funktionen erfüllen: Dies sind neben (1) der *Überprüfung und Steuerung* zum Zwecke des Bildungsmonitorings vor allem (2) die *Orientierung* über die zu erreichende Zielebene, in der Sekundarstufe II demgemäß die Allgemeine Hochschulreife, sowie (3) *Diagnose und Entwicklung,* bei der mit Blick auf die zu erreichende Zielebene der Grad der Standarderreichung zu prüfen ist, um passende Fördermaßnahmen für Schülerinnen und Schüler initiieren zu können (vgl. Klieme et al., 2003). Dabei dienen die in dieser Sammlung enthaltenen Aufgaben vor allem den beiden letztgenannten Funktionen. Ihnen kommt in erster Linie eine *Orientierungsfunktion* zu, indem sie die drei Dimensionen der Bildungsstandards (Leitideen, prozessbezogene Kompetenzen, Anforderungsbereiche; vgl. Blum, Kapitel 1 in diesem Band) in hinreichender Breite abbilden und damit die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife illustrieren. Überdies leistet diese Aufgabensammlung einen Beitrag zur *Diagnose- und Entwicklungsfunktion* der Bildungsstandards. Sie kann und soll daher Anregungen für die Zusammenstellung von Aufgaben für verschiedene Situationen eines an Kompetenzen orientierten Lernprozesses (vgl. u. a. Schmidt, Kapitel 19 in diesem Band) und seiner Überprüfung (vgl. Drüke-Noe, Kapitel 11 sowie Heintz, Drüke-Noe & Greefrath, Kapitel 14 in diesem Band) bieten.

Vor dem Hintergrund dieser verschiedenen Funktionen eignen sich die in dieser Sammlung enthaltenen Aufgaben für verschiedene Verwendungszwecke. Diese kommen in unterschiedlichen Aufgabenformaten zum Ausdruck, ohne dass sich jedoch aus dem Format einer Aufgabe per se ein Rückschluss auf eine potentielle Verwendung einer Aufgabe in einer Lern- oder in einer Leistungssituation ziehen ließe. Die Mehrzahl der Aufgaben kann daher unmittelbar im Unterricht oder ggfs. auch zur Leistungsüberprüfung eingesetzt werden.

Die meisten Aufgaben erfordern eine frei zu formulierende Antwort, andere Aufgaben verlangen nur eine sehr kurze Antwort und manche Aufgaben sind im Ankreuzformat („Multiple Choice") gestellt, deren Fehlantworten oft Rückschlüsse auf zugrunde liegende Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern erlauben bzw. typische und erwartbare Fehler abbilden. Daher sind insbesondere viele der Multiple-Choice-Aufgaben wie auch der Kurzantwortaufgaben besonders gut zu diagnostischen Zwecken, für die sie gezielt entwickelt wurden, oder zur Leistungsüberprüfung geeignet.

Um die gezielte Auswahl von Aufgaben zu erleichtern, sind alle (Teil-)Aufgaben nach den Bildungsstandards klassifiziert. Entsprechend ihrer curricularen Bedeutung in der Sekundarstufe II entfallen die meisten Aufgaben auf die Leitidee funktionaler Zusammenhang, während beispielsweise Aufgaben zur Leitidee Zahl deutlich weniger Raum einnehmen. In der Verteilung der sechs prozessbezogenen Kompetenzen spielt die Kompetenz des symbolisch/technisch/formalen Arbeitens eine geringere Rolle als meist üblich. Ebenso wurden bewusst vermehrt Argumentations- und Problemlöseaufgaben in die Sammlung aufgenommen, sowie solche, die Kommunizieren erfordern. Anteilig wurden in die Sammlung insbesondere auch Aufgaben aufgenommen, die kognitive Anforderungen im höchstens Anforderungsbereich (AB III) stellen, um auch hier möglichst vielzählige Anregungen zu bieten.

Die meisten Aufgaben enthalten mehrere Teilaufgaben, die im Wesentlichen unabhängig voneinander bearbeitet werden können.

Zu jeder Aufgabe sind Lösungserwartungen formuliert, die die grundsätzliche Ausrichtung einer Lösung aufzeigen, jedoch weder Ideallösungen darstellen sollen noch den Anspruch erheben, alle möglichen Lösungen oder Lösungswege abzudecken.

Alle Aufgaben und ihre Lösungserwartungen stehen zur Verfügung sowohl als Word- und als PDF-Dokumente auf der beigelegten CD als auch über die Internetseiten des IQB unter http://www.iqb.hu-berlin.de/bista/teach.

3 Literaturverzeichnis

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M. et al. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards*. *Eine Expertise*. Bonn: BMBF.
Verfügbar unter: http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf

Bildnachweis:
39.1: Michael Fabian, Hannover; 219.2: wikipedia.org (Maxim Fedorov); 219.3: fotolia.com, New York (pakornkrit); 219.4: wikipedia.org (Henry Salomé); 222.5: vario images, Bonn (Gerhard Launer/euroluftbild.de); 224.7: Westend 61, München (Harald Hempel).
Alle übrigen Fotos: Autorengruppe IQB.
Es war uns nicht in allen Fällen möglich, die Inhaber der Rechte ausfindig zu machen und um Abdruckgenehmigung zu bitten. Berechtigte Ansprüche werden selbstverständlich im Rahmen der üblichen Konditionen abgegolten.