

Beim sogenannten Geburtstagsproblem interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer zufällig zusammengestellten Gruppe mindestens zwei Personen befinden, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

- a) Wenn eine Gruppe aus 25 Personen besteht, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit P_{25} , dass sich darunter mindestens zwei Personen befinden, die am gleichen Tag Geburtstag haben? Geben Sie zudem an, welche stochastischen Annahmen getroffen werden müssen, um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen.
- b) Wenn eine Gruppe aus N Personen besteht, lässt sich die Wahrscheinlichkeit P_N allgemein mit folgender Formel berechnen:

$$P_N = 1 - \frac{365!}{365^N (365 - N)!} \quad (1)$$

Probieren Sie verschiedene Hilfsmittel (unterschiedliche Taschenrechner, Tabellenkalkulation usw.) aus, um die Wahrscheinlichkeit P_{25} mithilfe dieser Formel zu berechnen. Notieren Sie Ihre Beobachtungen.

- c) Schätzen Sie ohne technische Hilfsmittel grob ab, wie viele Stellen 365^{200} und $365!$ jeweils haben.
- d) Die Wahrscheinlichkeit P_N lässt sich auch aus der Wahrscheinlichkeit P_{N-1} berechnen. Zeigen Sie, dass für $N \geq 2$ und $C = 365$ gilt:

$$P_N = 1 - \frac{C + 1 - N}{C} (1 - P_{N-1}) \quad (2)$$

- e) Geben Sie einen Vorteil und einen Nachteil an, den die Formel (2) gegenüber der Formel (1) hat.
- f) Formulieren Sie für $N = 5$ ein anderes Zufallsexperiment und geben Sie dazu ein geeignetes Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich ebenfalls mit Formel (2) berechnen lässt, wobei C jedoch einen anderen Wert annimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.
- g) Illustrieren Sie grafisch für verschiedene Werte von C den Zusammenhang zwischen der Gruppengröße N und der Wahrscheinlichkeit P_N .
- h) Bestimmen Sie für verschiedene Werte von C , ab welcher Gruppengröße $N_{0,9}$ die Wahrscheinlichkeit P_N mindestens 90 % beträgt. Illustrieren Sie den Zusammenhang zwischen C und $N_{0,9}$ grafisch. Illustrieren und interpretieren Sie außerdem den Zusammenhang zwischen C und $(N_{0,9})^2$.