

Beim sogenannten Geburtstagsproblem interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer zufällig zusammengestellten Gruppe mindestens zwei Personen befinden, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

- a) Wenn eine Gruppe aus 25 Personen besteht, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit  $P_{25}$ , dass sich darunter mindestens zwei Personen befinden, die am gleichen Tag Geburtstag haben? Geben Sie zudem an, welche stochastischen Annahmen getroffen werden müssen, um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen.
- b) Wenn eine Gruppe aus  $N$  Personen besteht, lässt sich die Wahrscheinlichkeit  $P_N$  allgemein mit folgender Formel berechnen:

$$P_N = 1 - \frac{365!}{365^N (365 - N)!} \quad (1)$$

Probieren Sie verschiedene Hilfsmittel (unterschiedliche Taschenrechner, Tabellenkalkulation usw.) aus, um die Wahrscheinlichkeit  $P_{25}$  mithilfe dieser Formel zu berechnen. Notieren Sie Ihre Beobachtungen.

- c) Schätzen Sie ohne technische Hilfsmittel grob ab, wie viele Stellen  $365^{200}$  und  $365!$  jeweils haben.
- d) Die Wahrscheinlichkeit  $P_N$  lässt sich auch aus der Wahrscheinlichkeit  $P_{N-1}$  berechnen. Zeigen Sie, dass für  $N \geq 2$  und  $C = 365$  gilt:

$$P_N = 1 - \frac{C + 1 - N}{C} (1 - P_{N-1}) \quad (2)$$

- e) Geben Sie einen Vorteil und einen Nachteil an, den die Formel (2) gegenüber der Formel (1) hat.
- f) Formulieren Sie für  $N = 5$  ein anderes Zufallsexperiment und geben Sie dazu ein geeignetes Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich ebenfalls mit Formel (2) berechnen lässt, wobei  $C$  jedoch einen anderen Wert annimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.
- g) Illustrieren Sie grafisch für verschiedene Werte von  $C$  den Zusammenhang zwischen der Gruppengröße  $N$  und der Wahrscheinlichkeit  $P_N$ .
- h) Bestimmen Sie für verschiedene Werte von  $C$ , ab welcher Gruppengröße  $N_{0,9}$  die Wahrscheinlichkeit  $P_N$  mindestens 90 % beträgt. Illustrieren Sie den Zusammenhang zwischen  $C$  und  $N_{0,9}$  grafisch. Illustrieren und interpretieren Sie außerdem den Zusammenhang zwischen  $C$  und  $(N_{0,9})^2$ .