a) Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$: $M_{\overline{AB}}\,(0|9|-3)$, $M_{\overline{BC}}\,(0|6|3)$

Gleichungen der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$:

$$s_{\overline{AB}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s_{\overline{BC}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

Schnitt: Die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ liefert $\lambda = \frac{1}{3}$.

Damit ergibt sich als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $S(2|8|0)$.

Die Formel liefert:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Gemäß der Aussage aus Teilaufgabe a) muss gelten:

I $\quad \overrightarrow{OS}_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

II $\quad \overrightarrow{OS}_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$

III $\quad \overrightarrow{OS}_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$

IV $\quad \overrightarrow{OS}_{CAD} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$

Diese Bedingungen führen auf ein Gleichungssystem, welches sich nach $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ und $\overrightarrow{OD}$ auflösen lässt.

(Nachfolgend ist eine CAS-Lösung dargestellt)

$$\operatorname{solve}\left(\begin{cases} osabc=\frac{1}{3}\cdot(oa+ob+oc) \\ osabd=\frac{1}{3}\cdot(oa+ob+od) \\ osbcd=\frac{1}{3}\cdot(ob+oc+od) \\ oscad=\frac{1}{3}\cdot(oc+oa+od) \end{cases}, oa, ob, oc, od\right)$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OS}_{ABC} + \overrightarrow{OS}_{ABD} + \overrightarrow{OS}_{CAD} - 2\cdot\overrightarrow{OS}_{BCD}$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}_{ABC} + \overrightarrow{OS}_{ABD} + \overrightarrow{OS}_{BCD} - 2\cdot\overrightarrow{OS}_{CAD}$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OS}_{ABC} + \overrightarrow{OS}_{BCD} + \overrightarrow{OS}_{CAD} - 2\cdot\overrightarrow{OS}_{ABD}$$
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OS}_{ABD} + \overrightarrow{OS}_{BCD} + \overrightarrow{OS}_{CAD} - 2\cdot\overrightarrow{OS}_{ABC}$$

c) Nein, denn A, B, C und S_{ABC} liegen in einer Ebene. Ein Punkt außerhalb dieser Ebene wie z. B. *D* kann durch A, B, C und S_{ABC} nicht festgelegt sein.

d) z. B. A, B, C und S_{ABD}, denn aus den Koordinaten der Punkte A, B und S_{ABD} lassen sich mithilfe der Formel $\overrightarrow{OS}_{ABD} = \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$ die Koordinaten des Punktes D berechnen.