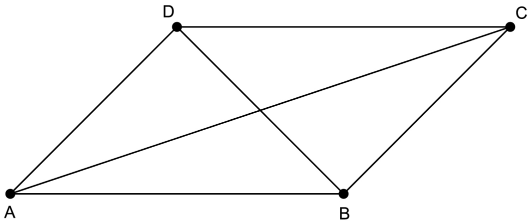
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1|–1|2), B(1|5|2), C(–2|8|4) und D(–2|2|4) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Weisen Sie nach, dass die Diagonalen des Parallelogramms ABCD nicht senkrecht zueinander stehen.

c) Die folgenden Ausführungen liefern einen Beweis für eine typische Eigenschaft von Parallelogrammen. Geben Sie diese Eigenschaft an.

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AC},\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \overrightarrow{BD},\ \mu \in \mathbb{R}$$



$$\vec{A} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{B} + \mu \cdot \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{B} - \vec{A} + \mu \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$\Leftrightarrow \lambda \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$\Leftrightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{AD} = (1-\mu) \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AD}$$

Da $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear unabhängig sind, muss gelten:
I $\lambda = 1 - \mu$
II $\lambda = \mu$

Folglich: $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$

d) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Diagonalen des Parallelogramms ABCD an.

e) Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte E und F so, dass das Viereck AECF ein Parallelogramm ist und die Strecke $\overline{EF}$ senkrecht zur Ebene steht, in der die Punkte A, B, C und D liegen.

f) Begründen Sie, dass das Viereck AECF eine Raute ist.