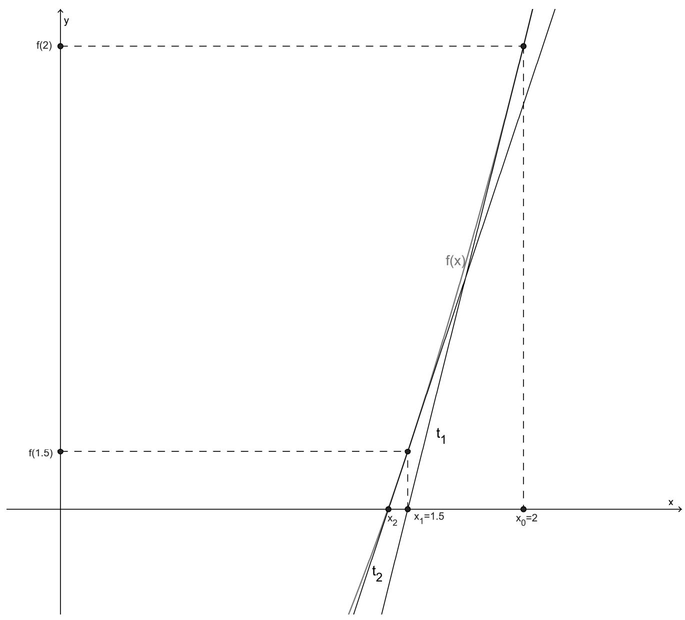
Im Folgenden wird ein Näherungsverfahren zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ beschrieben.

Hierzu nutzt man die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2$ und der Nullstelle $x = \sqrt{2}$.

Man wählt als sogenannten Startwert x_0 eine Stelle nahe der zu ermittelnden Nullstelle von f. Im Beispiel ist $x_0 = 2$. An dieser Stelle legt man eine Tangente (t_1) an den Graphen von f an und berechnet deren Nullstelle $x_1 = 1{,}5$. Diese Tangentennullstelle liegt offenbar näher an der Nullstelle von f als der Startwert $x_0 = 2$.

Legt man nun wiederum an der Stelle $x_1 = 1{,}5$ eine Tangente (t_2) an, so liegt deren Nullstelle x_2 wiederum näher an der Nullstelle von f als x_1 (s. Abbildung).



Setzt man dieses Verfahren fort, so lässt sich die Genauigkeit des Näherungswerts weiter erhöhen.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t_2 an den Graphen von f im Punkt $(1{,}5|f(1{,}5))$ und damit den Wert x_2, bei dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

b) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent ungefähr der Näherungswert x_2 von $\sqrt{2}$ abweicht.

c) Weisen Sie nach, dass die Formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für $n = 1$ den korrekten Wert von x_2 liefert.

d) Leiten Sie mithilfe der Abbildung die allgemeine Formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ zur schrittweisen rekursiven Berechnung von Näherungswerten für die betrachtete Nullstelle von f her. Ermitteln Sie mithilfe der Formel den Wert x_3.

e) Das beschriebene Näherungsverfahren lässt sich verwenden, um Nullstellen von Funktionen näherungsweise zu ermitteln, die sich durch das Lösen von Gleichungen nicht oder nur schwierig bestimmen lassen. Dabei gibt es allerdings Situationen, in denen das Verfahren nicht zum Erfolg führt.
Beschreiben Sie ausgehend von der Näherungsformel eine derartige Situation und erläutern Sie, warum das Verfahren in dieser Situation nicht zum Erfolg führt.