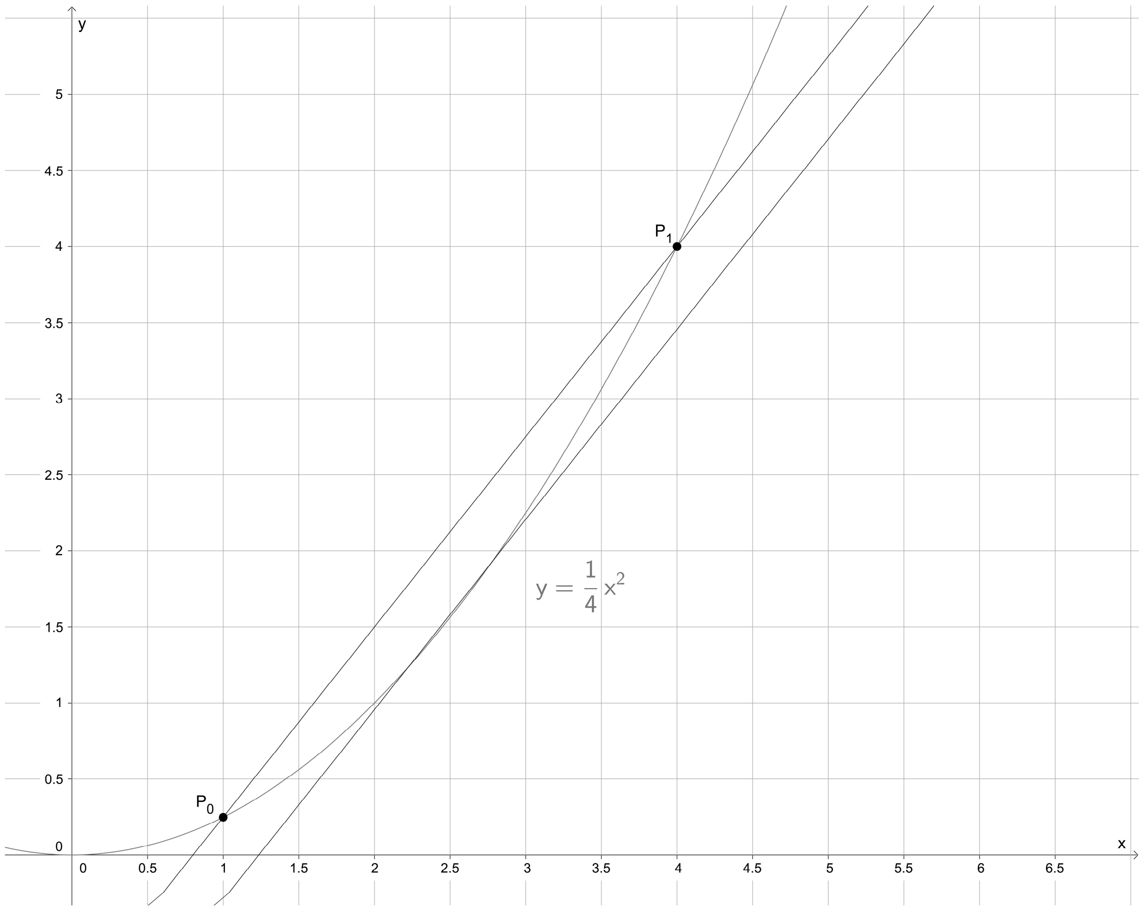
In dieser Aufgabe werden Kurven, zugehörige Sekanten und die dazu parallelen Tangenten untersucht.

a) Als erstes Beispiel wird die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{4} \cdot x^2$ betrachtet.

Die Abbildung zeigt diese Parabel und die Sekante durch die Punkte $P_0(1|0{,}25)$ und $P_1(4|4)$ sowie die zu dieser Sekante parallele Tangente an die Parabel.



Ermitteln Sie die Steigung der Sekante und die *x*-Koordinate des Berührpunkts der dazu parallelen Tangente.

b) Wählen Sie zwei Punkte der Parabel aus Teilaufgabe a), die im zweiten Quadranten liegen, und bestimmen Sie auch für die Sekante durch diese Punkte die Steigung und die *x*-Koordinate des Berührpunkts der zu ihr parallelen Tangente.

c) Vergleichen Sie für die bisher betrachteten Tangenten jeweils die *x*-Koordinate des Berührpunkts mit den *x*-Koordinaten der Punkte, durch die die dazu parallele Sekante verläuft. Was stellen Sie fest?

d) Zeigen Sie allgemein, dass die mittlere Steigung einer Parabel mit $y = a \cdot x^2 \, (a \neq 0)$ im Intervall $[x_0; x_1]$ mit $x_1 > x_0$ mit der lokalen Steigung in der Mitte des Intervalls übereinstimmt.

e) Der lokale Anstieg m des Graphen einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 (a \neq 0)$ an der Stelle x_0 lässt sich mithilfe der folgenden Formel mit beliebigem h ($h \neq 0$) bestimmen:

$$m = \frac{a \cdot (x_0 + h)^2 - a \cdot (x_0 - h)^2}{2 \cdot h}$$

Beschreiben Sie die dieser Formel zugrunde liegende Vorgehensweise und zeigen Sie, dass der Bruchterm gerade $f'(x_0)$ entspricht.

f) Gegeben ist nun eine Funktion g mit $g(x) = a \cdot x^3,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$. Betrachtet werden der Graph von g, die Sekante durch die Punkte $P_1(0|0)$ und $P_2(1|a)$ sowie die dazu parallele Tangente an den Graphen von g.
Bestimmen Sie die x-Koordinate des Berührpunkts der Tangente. Weisen Sie nach, dass diese x-Koordinate stets größer ist als der x-Wert, der das Intervall [0;1] halbiert.