# ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK PRIMARBEREICH

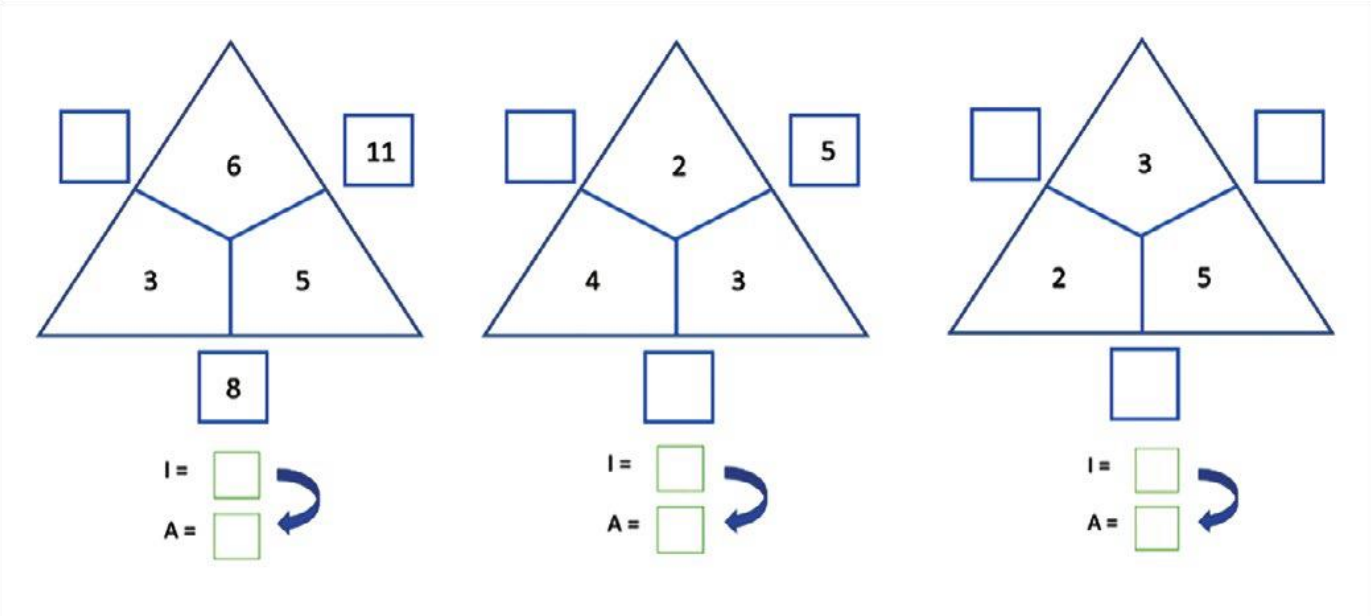
| | |
|---|---|
| **Aufgabentitel** | Rechendreiecks-Folge |
| **Darstellung und Erläuterung der Gesamtaufgabe** | Mit dieser Lernaufgabe entdecken und untersuchen Schülerinnen und Schüler die in den dargestellten strukturierten Folgen von Rechendreiecken innewohnenden Regeln. Sie erforschen die Bildungsregel, welche sich aus den vorgegebenen Zahlen in Rechendreiecks-Folgen schließen lässt, und setzen die Folge entsprechend fort. Zudem erkunden sie die Beziehungen zwischen den Summen der Innen- und Außenzahlen.<br>Die berechneten Summen von Innen- und Außenzahlen ergeben in Abhängigkeit zur Rechendreiecks-Folge neue strukturierte Zahlenfolgen.<br><br>Die Schülerinnen und Schüler erkunden und begründen die Zusammenhänge zwischen den Summen der Innen- und Außenzahlen und stellen Regeln für das Fortsetzen begonnener Folgen von Rechendreiecken auf.<br>Die Herausforderung besteht zudem im Hinterfragen mathematischer Aussagen und in der Prüfung auf Korrektheit dieser. |
| **Klassenstufe** | 2–3 |
| **Leitidee 1** | Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang |
| **Leitidee 2** | Zahl und Operation |
| **Schwerpunkt** | Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen |
| **ggf. zusätzliche Kompetenzen** | Rechenoperationen verstehen und beherrschen |
| **Information** | Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegraut. |

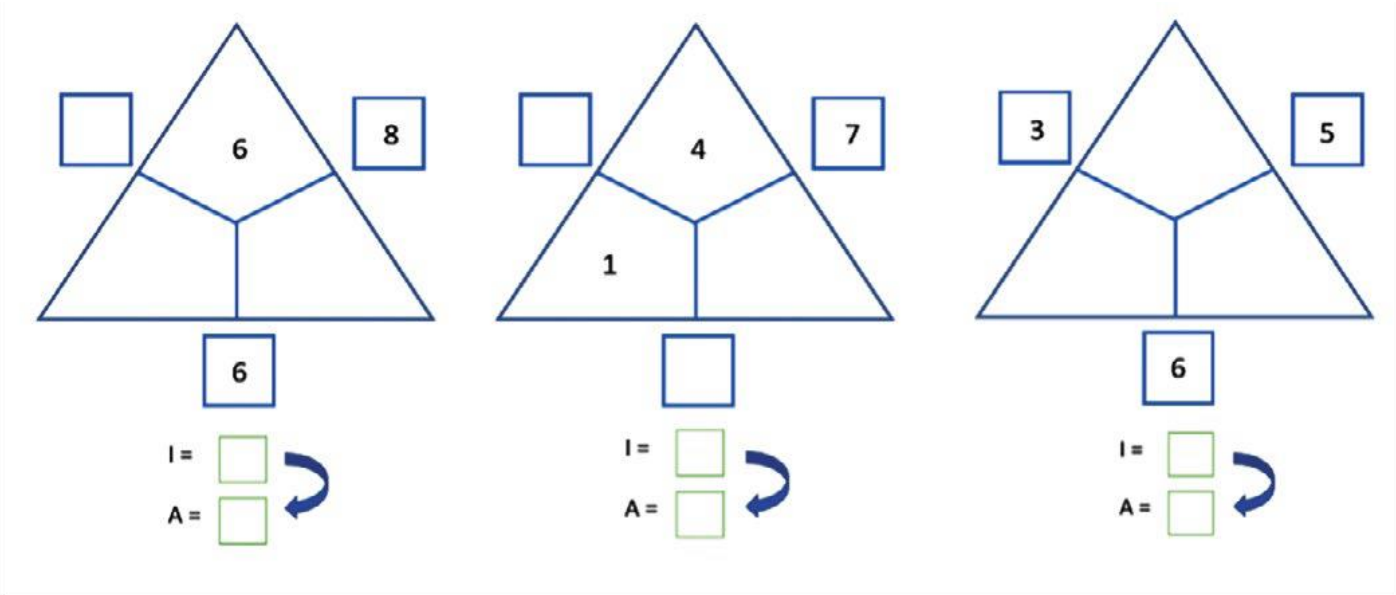
# TEILAUFGABE 1

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erläutern mathematische Zusammenhänge.<br><br>**Probleme mathematisch lösen:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• entwickeln Lösungsideen zu Aufgaben, zu denen bislang keine Lösungsroutinen bekannt sind.<br>• überdenken Vorgehensweisen und passen diese gegebenenfalls an. |
| **Unterrichtsphase** | Erkunden und Systematisieren |

## Material und Aufgabenstellung

a) Berechne die fehlenden Zahlen in den Rechendreiecken. Wie gehst du vor? Erkläre. (AB II)






b) Berechne die Summe der drei Innenzahlen (I) und die Summe der drei Außenzahlen (A).
(AB I)

c) Vergleiche die Summen. Was fällt dir auf? Erkläre. (AB II)

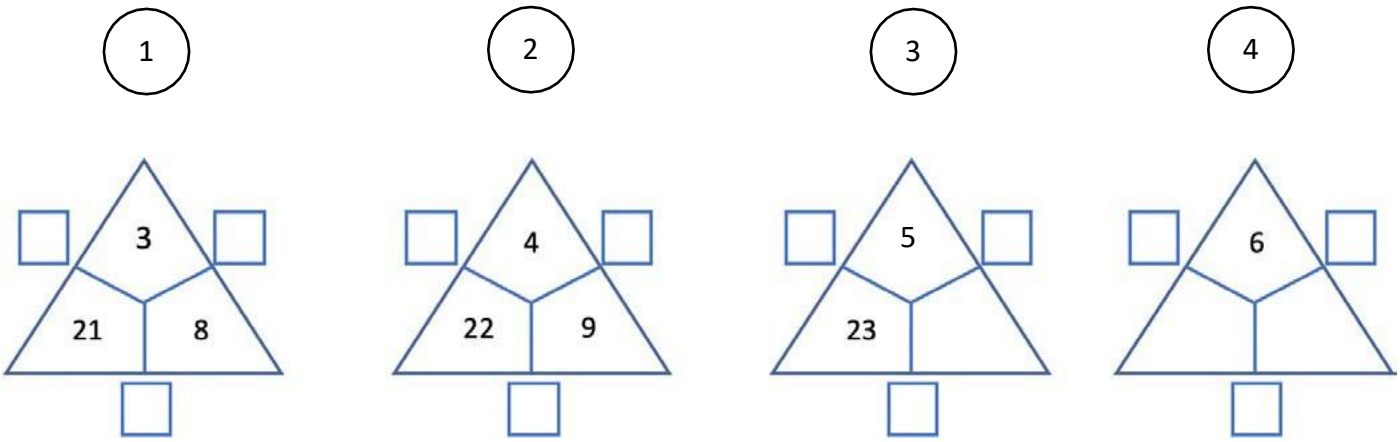
## Lösungen von Schülerinnen und Schülern

*c) Wenn man (I) doppelt nimmt, dann ergibt das immer (A).*
*Mir fällt auf, dass die Summen groß sind und unterschiedlich groß.*
*Ich gucke zuerst, welche Zahlen es gibt, dann rechne ich die Aufgabe und dann verdopple ich es.*
*Ich rechne die Innenzahl immer doppelt.*

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht.<br>• erläutern mathematische Zusammenhänge.<br><br>**Probleme mathematisch lösen:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• entwickeln Lösungsideen zu Aufgaben, zu denen bislang keine Lösungsroutinen bekannt sind.<br>• überdenken Vorgehensweisen und passen diese gegebenenfalls an. |
| **Unterrichtsphase** | Erkunden und Systematisieren |

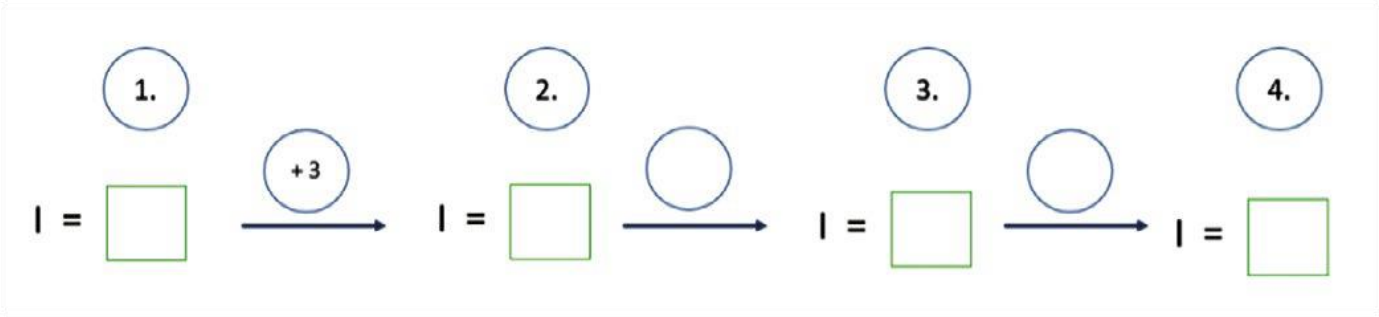
## Material und Aufgabenstellung

a) Ergänze die fehlenden Zahlen in den Rechendreiecken und berechne die Summen der Innenzahlen (I) und die Summen der Außenzahlen (A). (AB I)

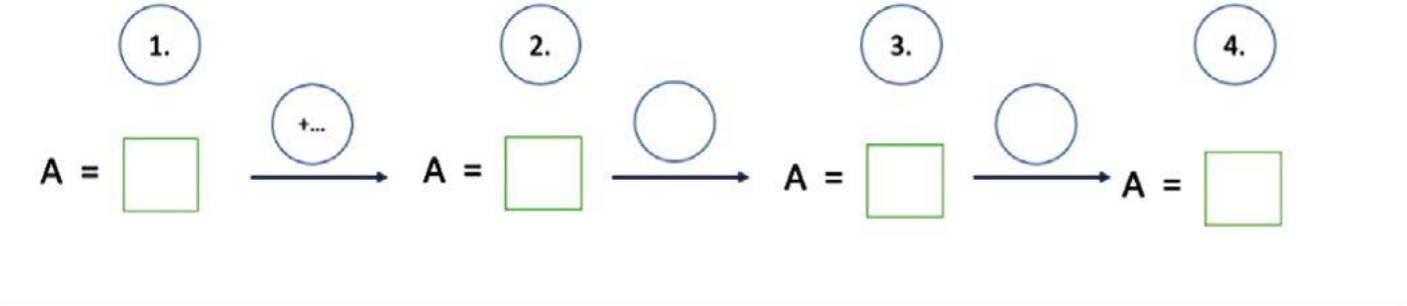


b) Vergleiche die Rechendreiecke. Was fällt dir auf? (AB II)

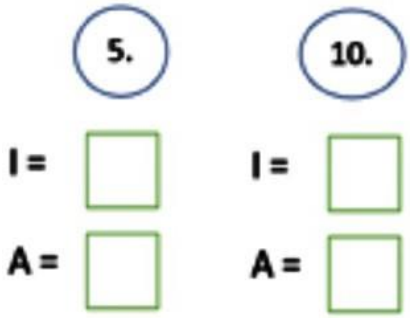
c) Vergleiche die Innensummen von einem Rechendreieck zum nächsten. Was fällt dir auf? (AB II)




d) Vergleiche die Außensummen von einem Rechendreieck zum nächsten. Was fällt dir auf? (AB II)

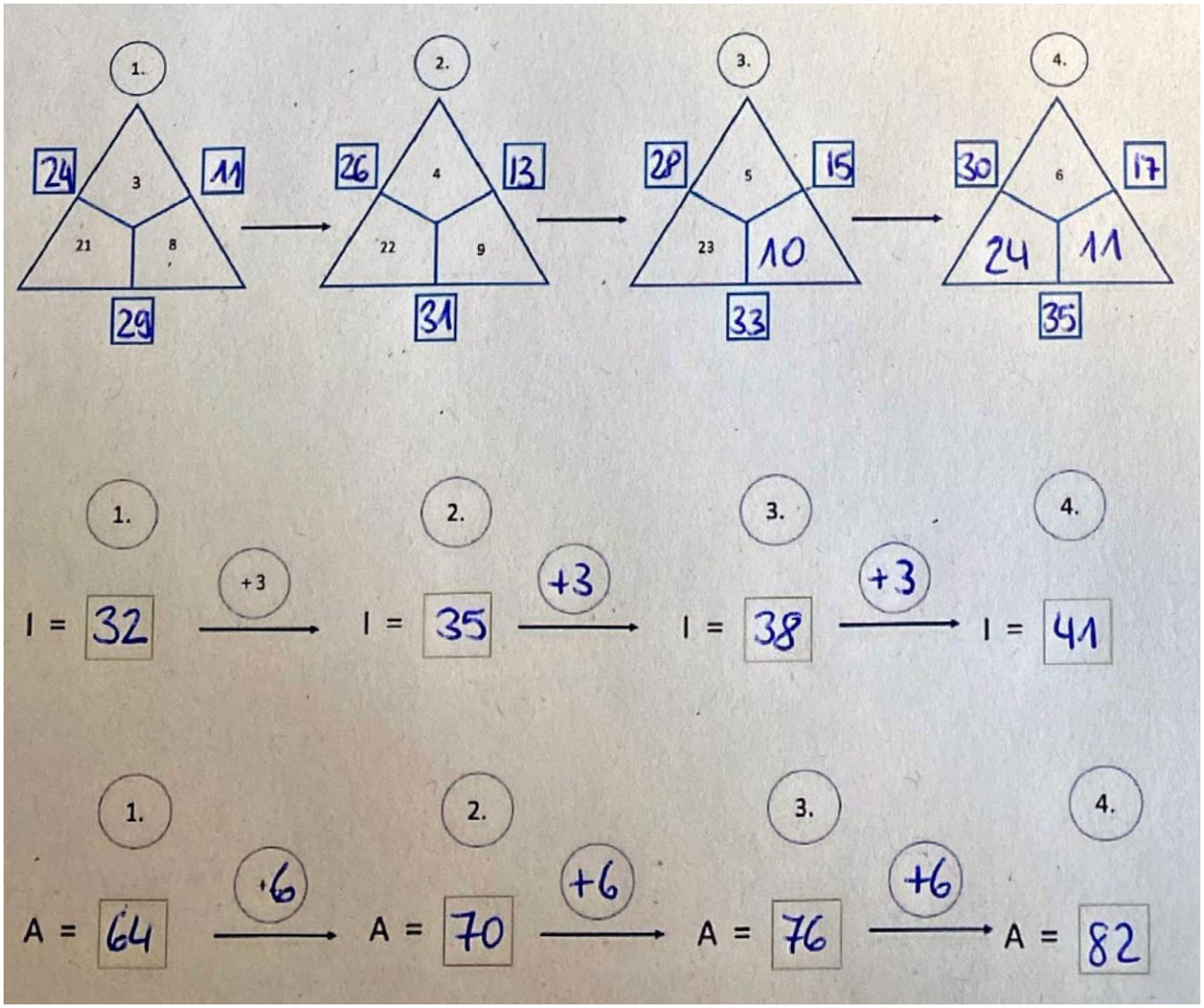



e) Wie groß sind die Innen- und Außensummen des 5. und 10. Rechendreiecks? Wie rechnest du? Erkläre. (AB III)



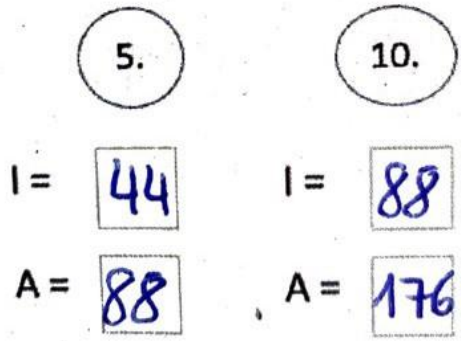
## Lösungen von Schülerinnen und Schülern

*a)*




*c) Es werden immer 3 mehr von einem zum anderen.*

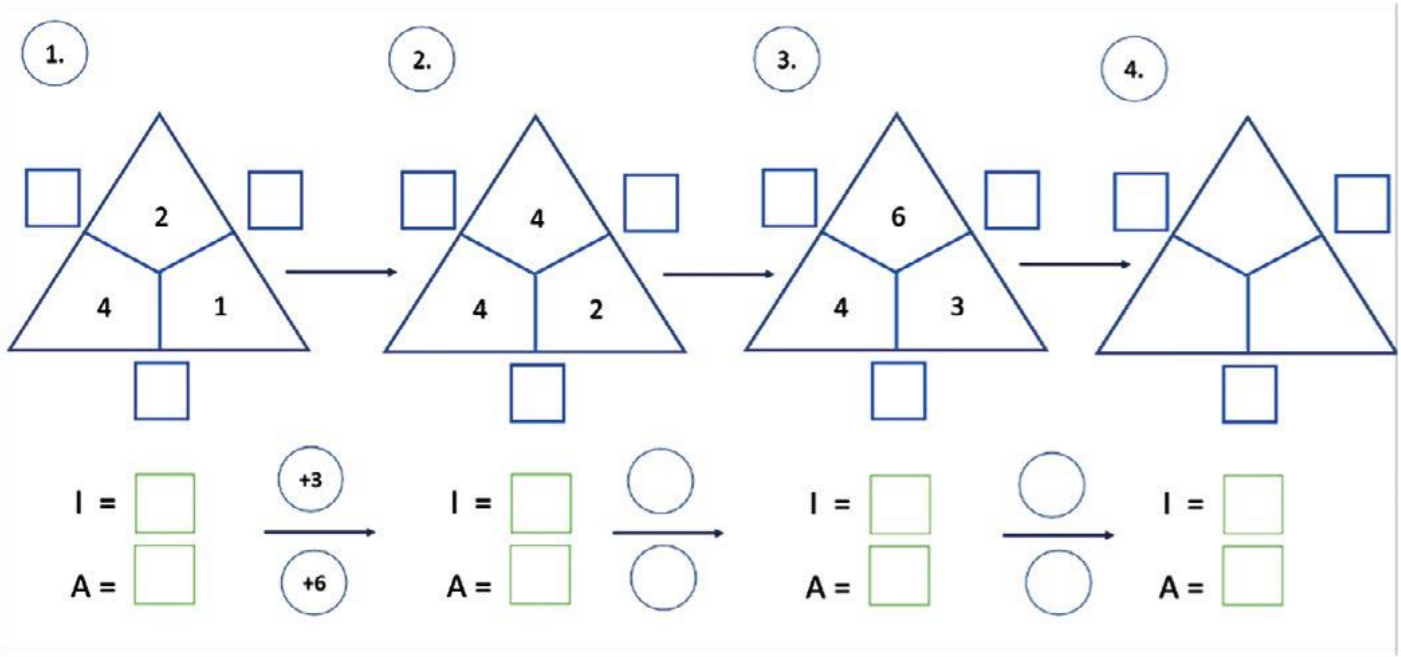
*d) Es werden immer 6 mehr, also immer doppelt so viele.*




*e) Ich habe immer das Doppelte von 5 genommen.*

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch argumentieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• formulieren Begründungen und vollziehen Begründungen anderer nach.<br><br>**Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erläutern mathematische Zusammenhänge. |
| **Unterrichtsphase** | Erkunden und Systematisieren |

## Material und Aufgabenstellung



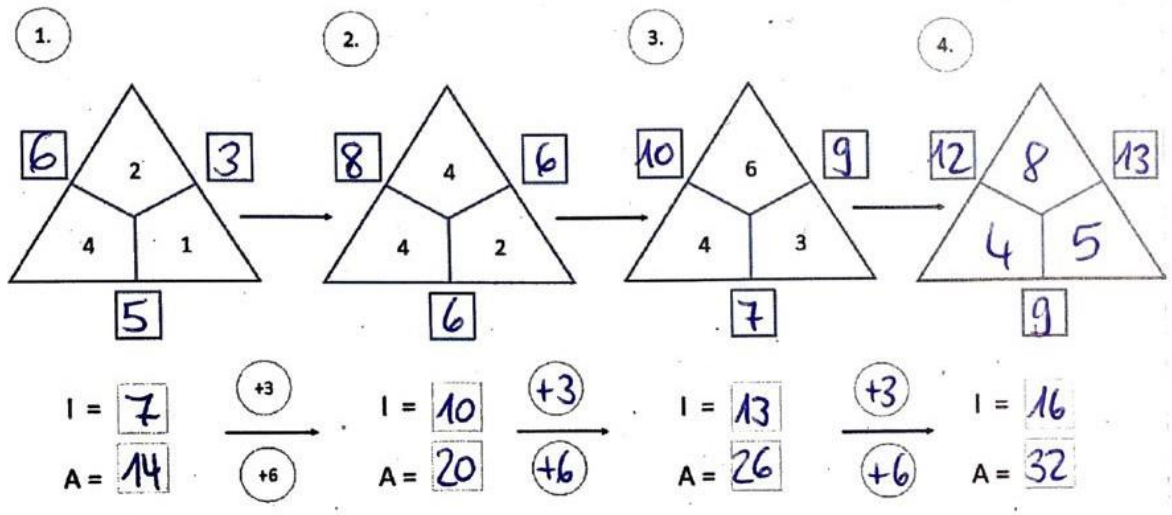

a) Ergänze die fehlenden Innenzahlen im 4. Rechendreieck und berechne alle Außenzahlen. (AB I)

b) Berechne die Summen der Innenzahlen (I) und die Summe der Außenzahlen (A). (AB I)

c) Vergleiche die Summen der Innenzahlen mit den Summen der Außenzahlen von einem Rechendreieck zum nächsten. Welche Regel erkennst du? Beschreibe. (AB II)

d) Warum ist das so? Begründe. (AB III)

## Lösungen von Schülerinnen und Schülern



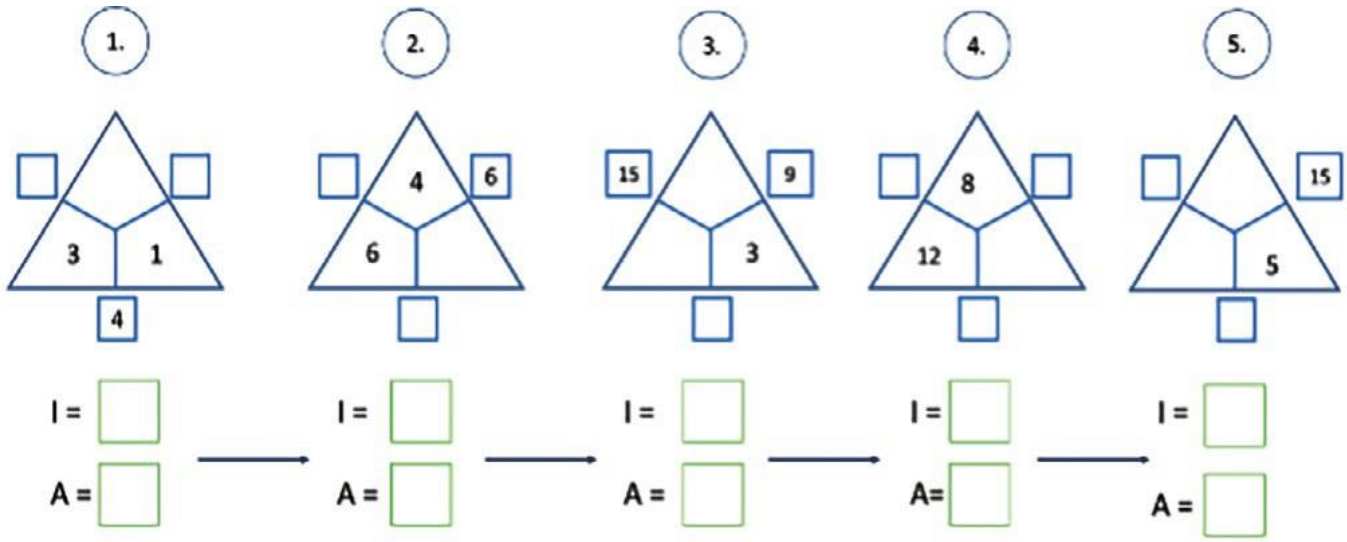

*c) Ich erkenne die Regel I = +3, A = +6.*

*d) Oben wird immer +3 und unten immer +6. Plus 3 ist so, weil die Zahlen innen von einem Dreieck zum anderen insgesamt immer um +3 größer werden. 4 + 2 + 1= 7 dann 4 + 4 +2 = 10 und so weiter. Also ist die Außensumme dann doppelt so groß und das ist immer +6.*

# TEILAUFGABE 4

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch argumentieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• stellen Vermutungen zu mathematischen Zusammenhängen auf.<br>• formulieren Begründungen und vollziehen Begründungen anderer nach.<br><br>**Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht.<br>• erläutern mathematische Zusammenhänge. |
| **Unterrichtsphase** | Sichern und Vertiefen |

## Material und Aufgabenstellung



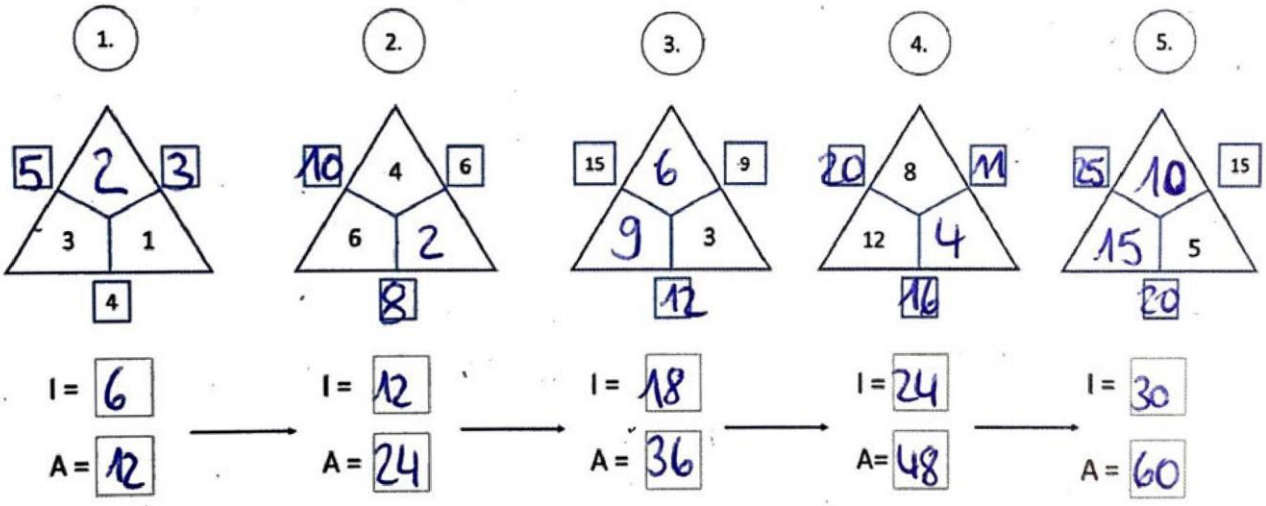

a) Ergänze die fehlenden Zahlen in der Rechendreiecks-Folge. (AB I) Wie gehst du vor? Erkläre. (AB II)

b) Berechne die Summe der Innenzahlen (I) und die Summe der Außenzahlen (A). (AB I)

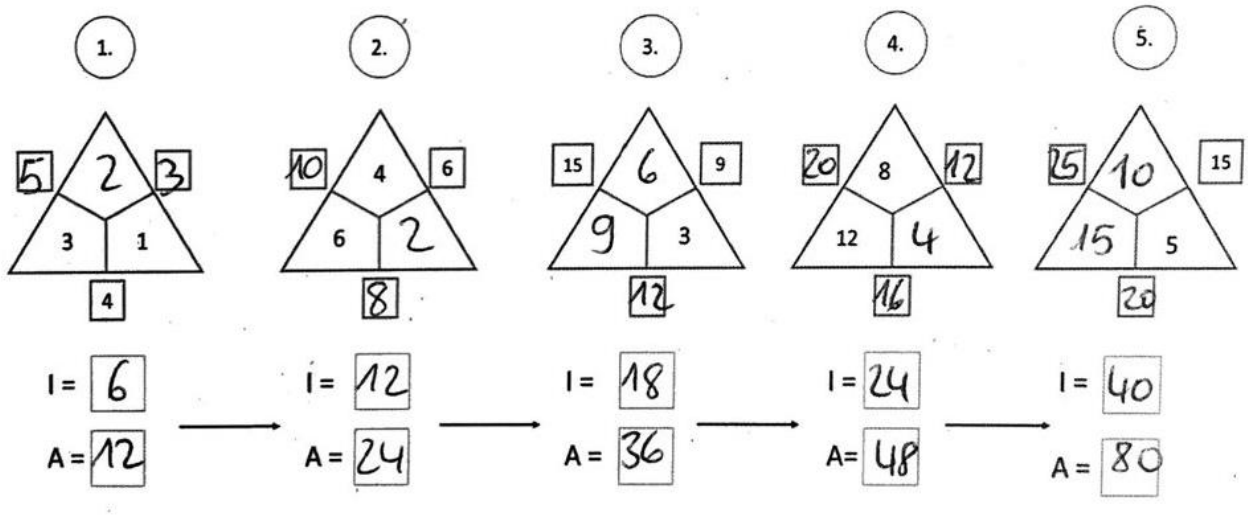
c) Vergleiche die Innen- und Außensummen von einem Dreieck zum nächsten. Welche Regeln erkennst du? Erkläre. (AB II)

d) Warum ist das so? Begründe. (AB III)

## Lösungen von Schülerinnen und Schülern




*a) Ich gucke mir die Zahlen an, die da sind und überlege welche noch fehlen könnten, damit die Folge gleichmäßig wird. Wenn die Dreieckkette gleich ist, sind auch die Innenzahlen und Außenzahlen in der Kette gleichmäßig.*

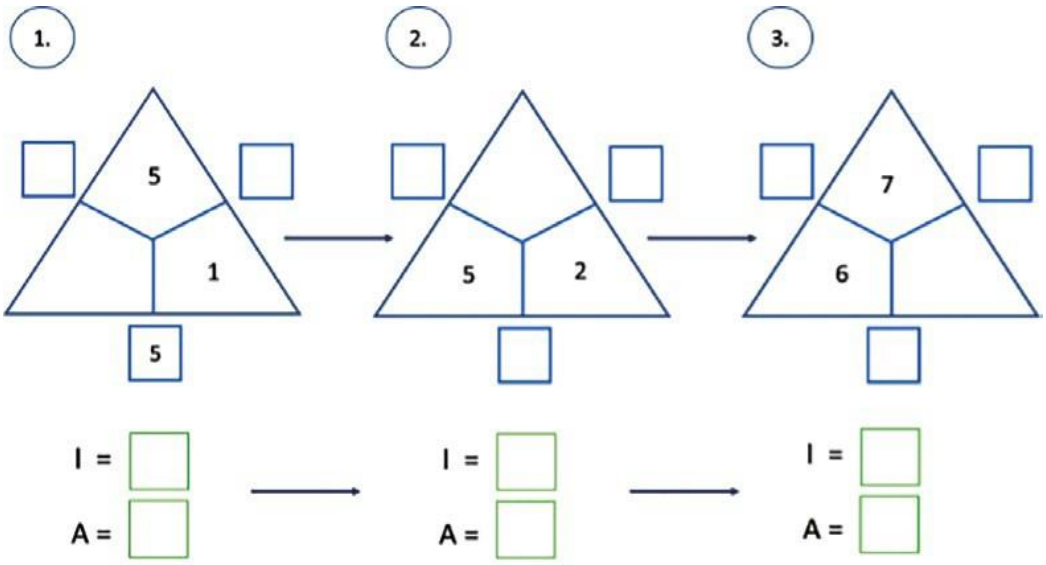



*a) Oben immer +2, links immer +3, rechts immer +1.*
*c) Die Außenzahl wird immer von der Innenzahl verdoppelt.*
*d) Weil die Außenzahl immer das doppelte von der Innenzahl ist. Da ich oben in jedem neuen Dreieck immer 5 dazu gebe, bleibt es eine schöne Reihe und die Außenzahl ist immer doppelt bei schönen Reihen.*
*c) Alle Zahlen im Dreieck bilden von einem zum anderen immer eine schöne Reihe. In jedem Dreieck werden es immer 6 mehr. Wenn es drin immer 6 mehr werden, dann sind es außen immer doppelt so viele, also 12 mehr, da (I) immer doppelt genommen werden muss.*

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch argumentieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• stellen Vermutungen zu mathematischen Zusammenhängen auf.<br>• formulieren Begründungen und vollziehen Begründungen anderer nach.<br><br>**Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht.<br>• erläutern mathematische Zusammenhänge. |
| **Unterrichtsphase** | Sichern und Vertiefen |

## Material und Aufgabenstellung

**Wie geht es weiter?**
Alle Innenzahlen werden immer um 1 größer



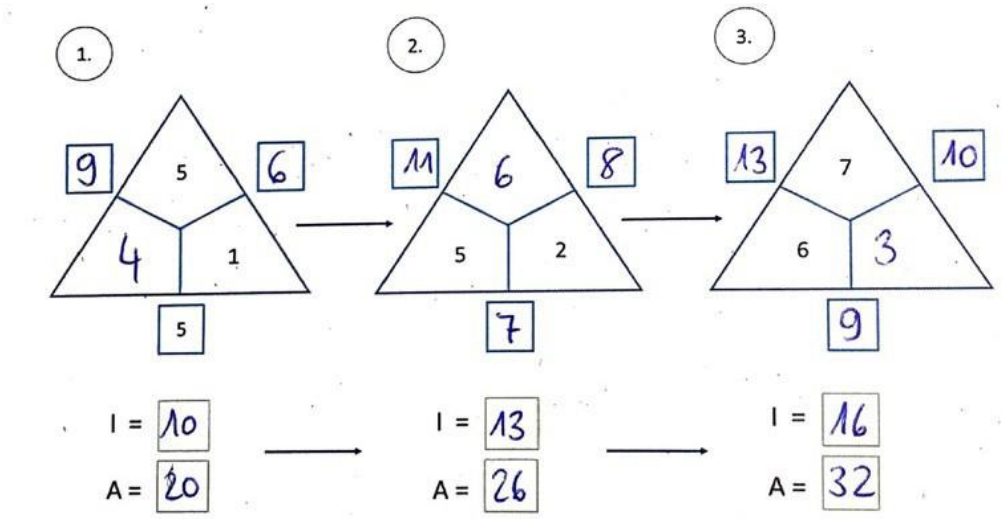
a) Ergänze die fehlenden Zahlen. Berechne die Außenzahlen. (AB I)

b) Berechne die Summe der Innenzahlen (I) und die Summe der Außenzahlen (A). (AB I)

c) Wie groß ist die Außensumme des 5. Dreiecks? Warum ist das so? Begründe. (AB III)

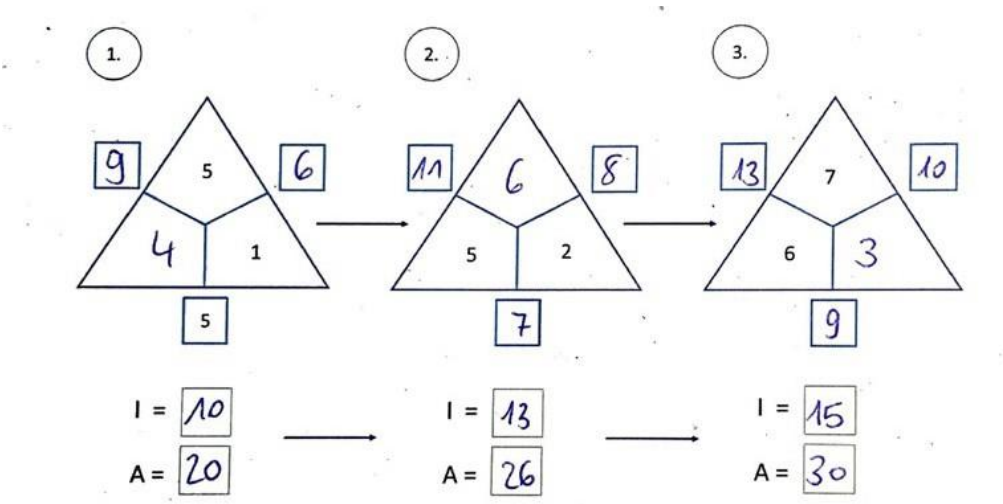
## Lösungen von Schülerinnen und Schülern

*a), b)*




*c) Sie ist 44, weil es immer 6 mehr werden. Ich schaue mir die Dreiecke 1, 2 und 3 an und weiß dann, wie die Reihe weiter geht. 20, 26, 32, 38 dann kommt 44.*

a), b) Hinweis zu Lösung B: Interessant ist, dass die Berechnung der Innensumme (3. Dreieck) und demzufolge auch der Außensumme des 3. Dreiecks nicht korrekt erfolgt ist, doch die Außensumme des fünften Dreiecks mit 44 richtig benannt wurde. Vermutlich konnte dieser Schüler die Schlussfolgerung bereits aufgrund der Veränderung vom ersten zum zweiten Dreieck ziehen.

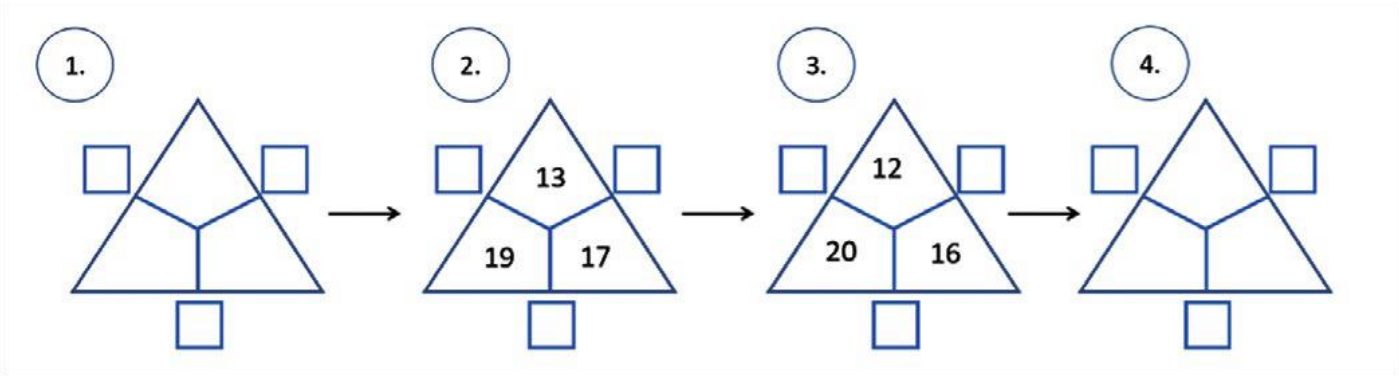



*c) Die Außensumme des 5. Dreiecks ist 44, weil die Außenzahl ist immer doppelt so groß wie die Innenzahl.*

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht.<br>• erläutern mathematische Zusammenhänge. |
| **Unterrichtsphase** | Sichern und Vertiefen |

## Material und Aufgabenstellung

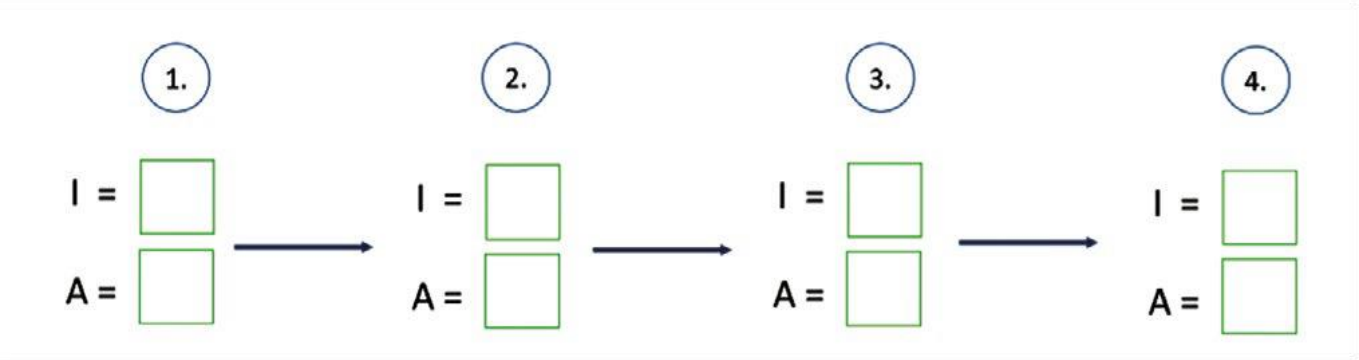
Die obere und die rechte untere Zahl in der Rechendreiecks-Folge wird immer um 1 kleiner. Die linke untere Zahl wird immer um 1 größer.




a) Ergänze die Zahlen in der Rechendreiecks-Folge. (ABI)

b) Berechne die Außenzahlen (A). (AB I)

c) Vergleiche die Außenzahlen von einem Dreieck zum anderen? Was stellst du fest?
Erkläre. (AB II)




d) Berechne nun die Summen der Innenzahlen (I) und die Summen der Außenzahlen (A). (AB I)

e) Vergleiche. Was stellst du fest? Erkläre. (AB II)

f) Wie verändern sich Innensumme und Außensumme von einem Dreieck zum nächsten?
Warum ist das so? Begründe. (AB III)

## Lösungen von Schülerinnen und Schülern

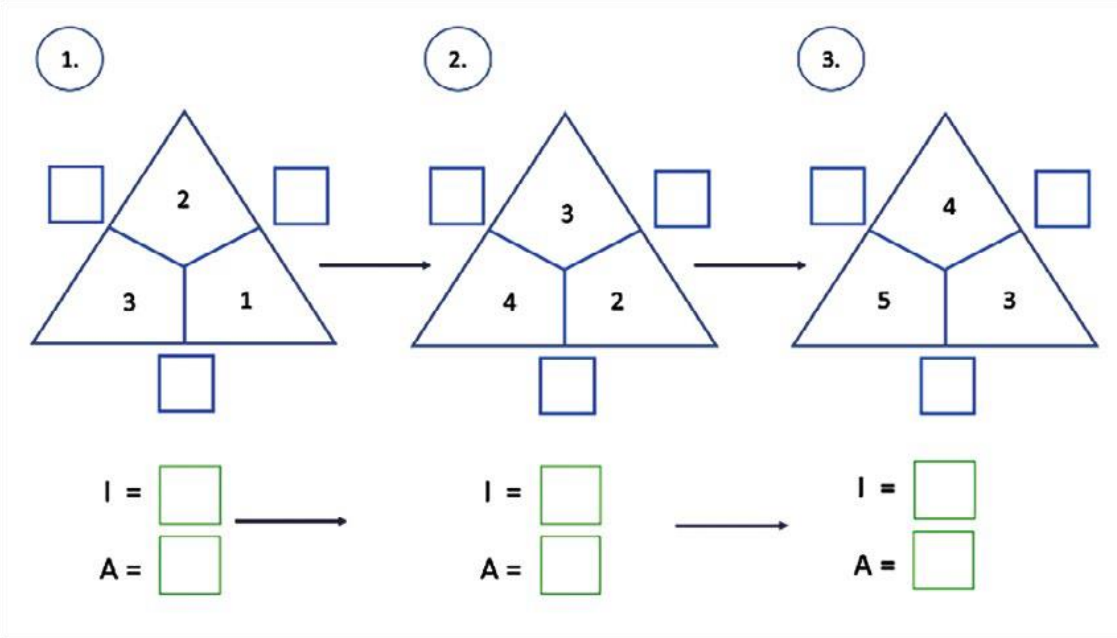
*e, f) Die Zahlen rechts oben werden immer um 2 kleiner.*

*Weil wir ja einmal plus 1 und 2 mal minus 1 haben, werden es bei (I) immer 1 weniger.*
*Die Außensumme ist dann klar. Sie ist doppelt wie (I), also immer 2 weniger von einem zum anderen.*

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch argumentieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• stellen Vermutungen zu mathematischen Zusammenhängen auf.<br><br>**Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht.<br>• erläutern mathematische Zusammenhänge. |
| **Unterrichtsphase** | Erfassen und Testen |

## Material und Aufgabenstellung

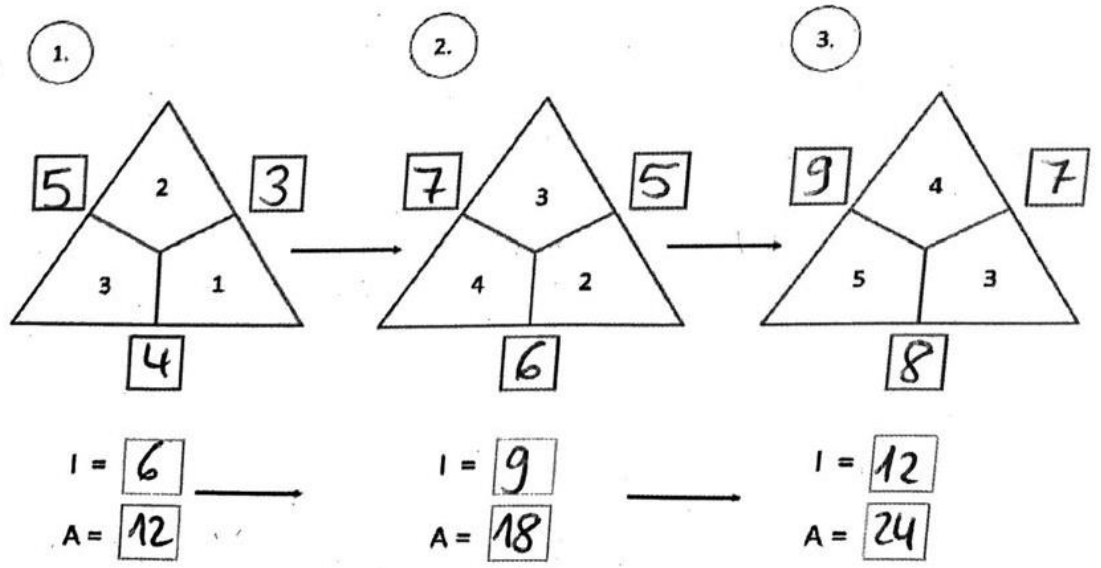
In dieser Rechendreiecks-Folge wird jede Innenzahl immer um 1 größer.



a) Wie verändert sich die Summe der Außenzahlen (A)? (AB II)

b) Ist das immer so? Erkläre. (AB III)

## Lösungen von Schülerinnen und Schülern

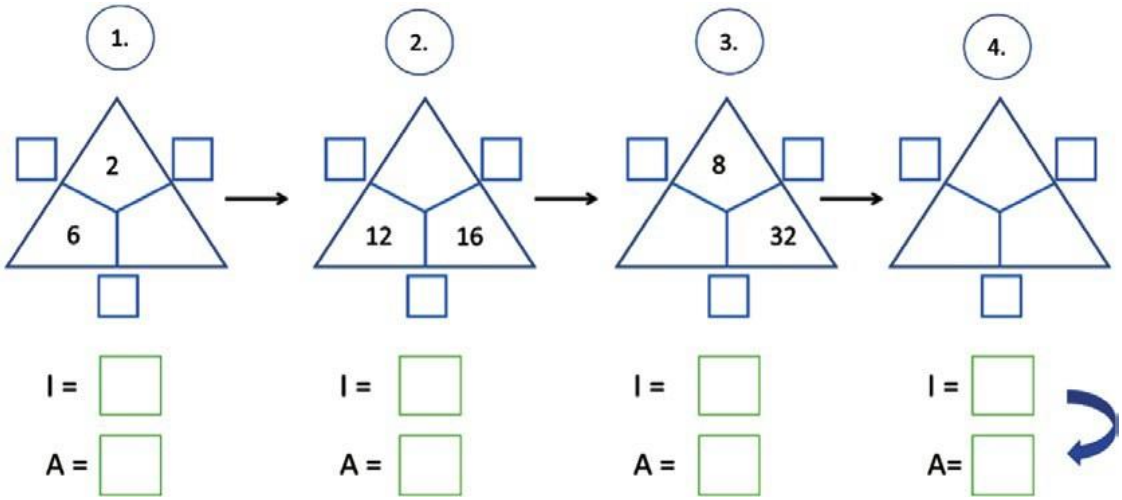



*b) Alle Zahlen innen sind von links nach rechts immer eine eigene Reihe: 2,3,4 und so weiter. Genauso ist es dann auch draußen: 5,7, 9. Insgesamt sind es immer 3 mehr in jedem Dreieck, deshalb geht es auch bei (I) immer drei weiter 6, 9, 12 und so weiter. Und weil (A) doppelt ist wie* ***(I)*** *ist die Reihe unten 12,18, 24. Wahrscheinlich ist das bei anderen Reihen auch so.*
*Immer was mehr oder weniger wird, ist auch bei (I) immer mehr oder weniger.*

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch argumentieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• hinterfragen mathematische Aussagen und prüfen diese auf Korrektheit |
| **Unterrichtsphase** | Erfassen und Testen |

## Material und Aufgabenstellung

**Alles doppelt?**
In dieser Rechendreiecks-Folge verdoppeln sich alle Innenzahlen von einem Dreieck zum nächsten.




a) Ergänze die fehlenden Innenzahlen. (AB I)

b) Berechne die Außenzahlen. (AB I)

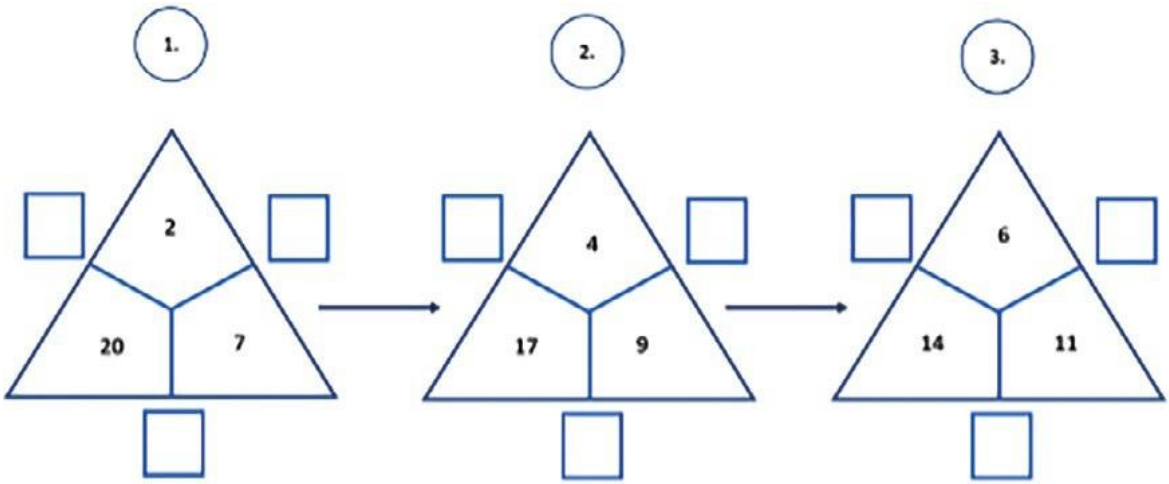
c) Berechne die Summen der Innenzahlen (I) und die Summen der Außenzahlen (A). (AB I)

d) Was stimmt? Kreuze an. (AB II)

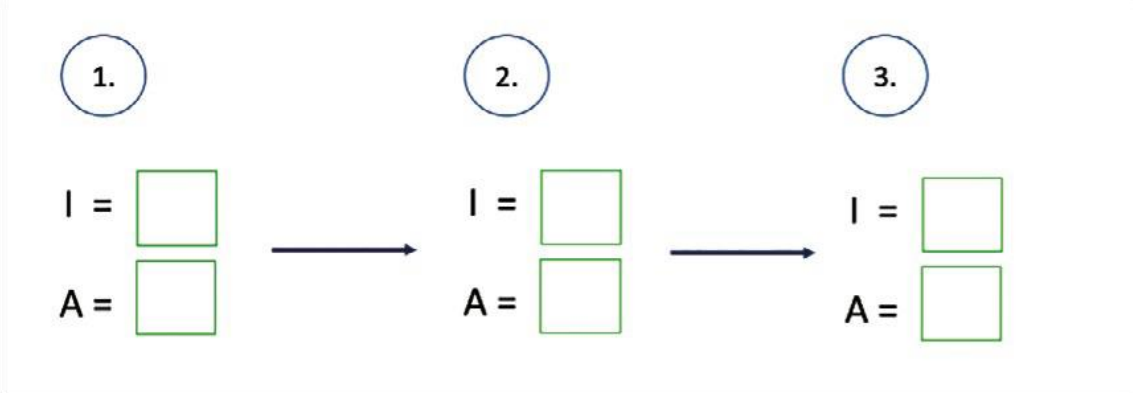
- ☐ Die Außensumme ist halb so groß wie die Innensumme des nächsten Dreiecks.
- ☐ Die Außensumme ist genau so groß, wie die Innensumme des nächsten Dreiecks.
- ☐ Die Außensumme verdoppelt sich von einem Dreieck zum nächsten.
- ☐ Die Innensumme verdoppelt sich von einem Dreieck zum nächsten.

| | |
|---|---|
| **inhaltsbezogene Kompetenz** | **Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen). |
| **prozessbezogene Kompetenzen** | **Mathematisch kommunizieren:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht.<br>• vollziehen Lösungen und Lösungswege anderer nach, hinterfragen und entwickeln diese gemeinsam weiter.<br><br>**Probleme mathematisch lösen:**<br>Die Schülerinnen und Schüler<br>• entwickeln Lösungsideen zu Aufgaben, zu denen bislang keine Lösungsroutinen bekannt sind.<br>• überdenken Vorgehensweisen und passen diese gegebenenfalls an. |
| **Unterrichtsphase** | Erfassen und Testen |

## Material und Aufgabenstellung




a) Berechne die Außenzahlen in der Rechendreiecks-Folge. (AB I)

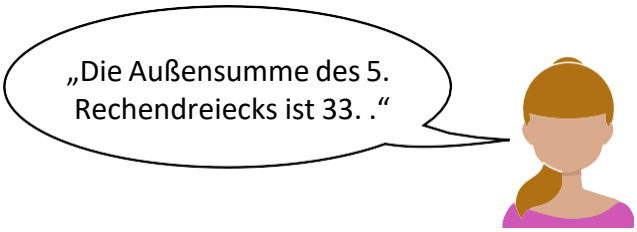



b) Berechne die Summe der Innenzahlen (I) und die Summe der Außenzahlen (A).
Vergleiche die Summen miteinander. (AB I)

c) Was stellst du fest? Erkläre. (AB II)

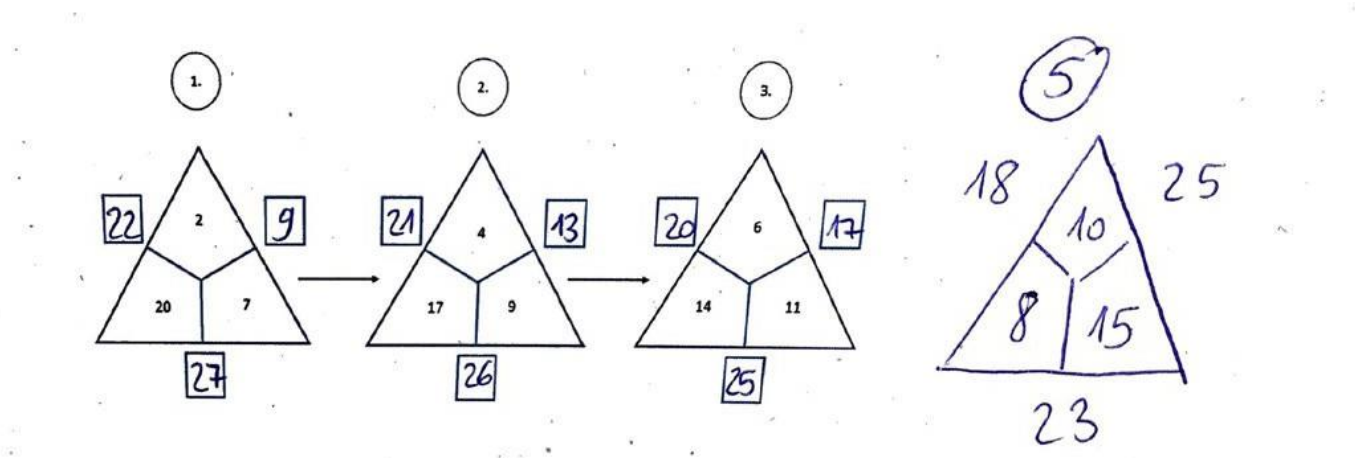
d) Mia sagt: Die Außensumme des 5. Rechendreiecks ist 33.
Kreuze an und begründe deine Entscheidung. (AB III)

☐ stimmt ☐ stimmt nicht




Mia

## Lösungen von Schülerinnen und Schülern

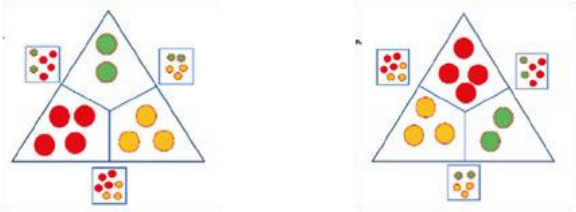
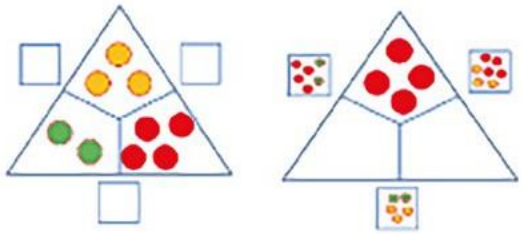
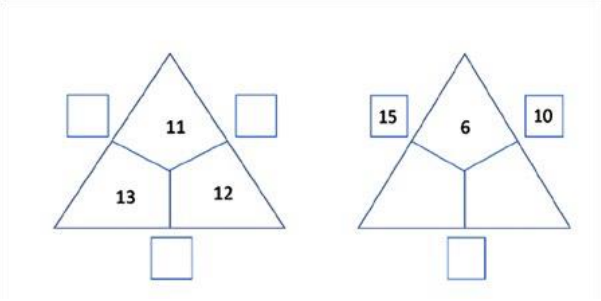
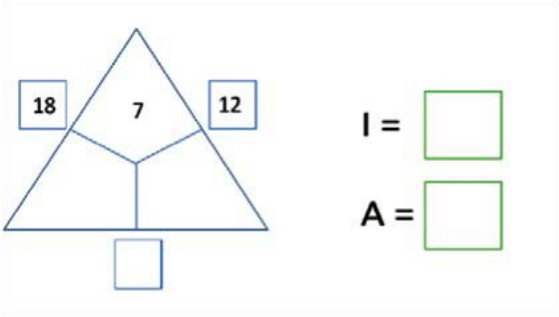


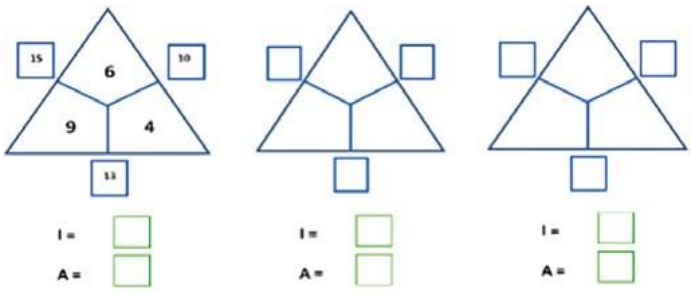
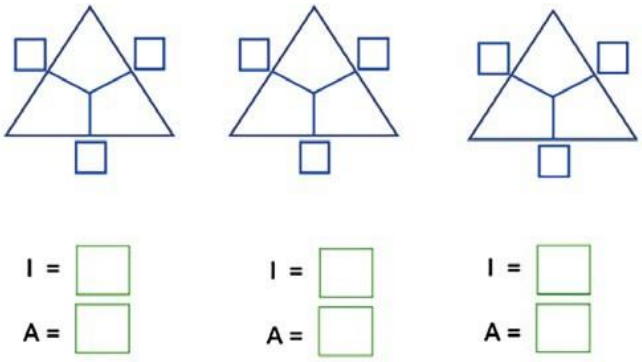

*d) Mias Aussage ist nicht richtig, weil es mehr als 33 ist.*
*Das Ergebnis der Innenzahlen ist schon 33. Es kommt 66 raus.*

## Allgemeine ergänzende Hinweise

Voraussetzung für das Erkennen und Entdecken der Regelhaftigkeiten und die Anwendung der Regeln zur Fortsetzung der Muster ist die Einführung des Aufgabenformates „Rechendreiecke“ sowie das Beherrschen und Verstehen der Addition und Subtraktion und deren Zusammenhang, um fehlende Innen- und Außenzahlen zu ergänzen bzw. Innen- und Außensummen berechnen und deren Abhängigkeit voneinander erkennen zu können. In der folgenden Tabelle sind Aufgaben zur Absicherung der inhaltlichen Voraussetzungen für die Untersuchung strukturierter Folgen von Rechendreiecken bzw. für das Entdeckens der darin enthaltenen Bildungsregeln sowie die Berechnung von Innen- und Außensummen dargestellt. Die Abkürzungen I und A sollten mit den Kindern vorab geklärt werden.

Der Einsatz von geeigneten Anschauungsmitteln ist hilfreich, um die Zusammenhänge zwischen Innen- und Außensumme erkennen und begründen zu können oder um Innenzahlen zu finden. Die Tabelle zeigt beispielhalft die Bandbreite von der enaktiven Ebene bis hin zu offenen Aufgabenformaten. Als digitales Unterstützungsmittel eignet sich die App: Rechendreiecke (vgl. Quellenangabe Teilaufgabe 1).

| | |
|---|---|
| M. legt farbige Plättchen in Dreiecke.<br>Wofür stehen die äußeren Plättchen? Erkläre. |  |
| Ergänze die fehlenden farbigen Plättchen im linken Dreieck.<br>Ergänze die fehlenden farbigen Plättchen im rechten Dreieck.<br>Vergleiche die Dreiecke.<br>Was stellst du fest? |  |
| Berechne die fehlenden Außenzahlen und Innenzahlen.<br>Wie gehst du vor? Erkläre. |  |
| Berechne die fehlenden Innenzahlen und Außenzahlen. Addiere dann die drei Außenzahlen (A) und die drei Innenzahlen (I).<br>Vergleiche die Summen.<br>Was stellst du fest? |  |

| | |
|---|---|
| Die Innenzahlen in der Rechendreiecks-werden immer um 1 größer.<br>Ergänze die fehlenden Innenzahlen in den Dreiecken 2 und 3.<br>Berechne die Außenzahlen.<br>Berechne jeweils die Summe der drei Außenzahlen (A) und die Summe drei Innenzahlen (I).<br>Vergleiche die Summen.<br>Was stellst du fest? Erkläre. |  |
| Erfinde eigene Rechendreiecks-Folgen.<br>Trage Innen- und Außenzahlen ein.<br>Berechne die Summe aller Innenzahlen (I) und die Summe aller Außenzahlen (A).<br>Vergleiche die Summen von einem Dreieck zum nächsten.<br>Was stellst du fest? Ist das immer so?<br>Ergänze den Satz:<br>Die Außensumme ist immer…<br>Begründe. |  |

## Quellen


- Ladel, S. (2021). App Rechendreiecke. Zugriff am 24.05.2021. Verfügbar unter https://ladel-online.net/de/forschung/projekte/app-empfehlungen/rechendreieck
- Ministerium für Schule und Bildung Nordrhein-Westfalen. (2009). *Aufgabenideen zu Muster und Strukturen*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdaten- bank/material/view/2113
- Siebel, F. (2010). „Und das ist dann halt bei allen Zahlen so.“ Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen. In A. Lindmeier & St. Ufer (Hg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 799–802), Münster, WTM.
- Siebel, F. (2010). *„Und das ist dann halt bei allen Zahlen so.“ Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen*. Zugriff am 20.09.2024. Verfügbar unter https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/32017/1/190.pdf
- Scheibe, V. (2010). *Microsoft Word - Rechendreiecke – Heft*. Zugriff am 24.05.2021. Verfügbar unter https://sinus-sh.lernnetz.de/sinusag/materialien/mathematik/unterrichtsthemen/Rechendreiecke/Rechendreiecke---Heft.pdf
- Urff, C. (2021). *Das interaktive Rechendreieck*. Zugriff am 25.05.2021. Verfügbar unter https://www.lernsoftware-mathematik.de/?p=1384
- Urff, C. (2020). *Rechendreieck-Eine App zur Erstellung und Manipulation von Rechendreiecken*. Zugriff am 24.05.2021. Verfügbar unter https://pikas-digi.dzlm.de/sites/pikasdg/files/uploads/Unterricht/Rechendreiecke/um_rechendreieck.pdf


Sofern nicht anders gekennzeichnet, liegt das Copyright beim IQB e. V., Lizenz: Creative Commons (CC BY). Volltext unter: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de