

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgabensammlung

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	CAS

1 Aufgabe

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9 %, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7 %. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

1 Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.

- a Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Lampen, die nicht defekt sind, größer ist als die Anzahl der defekten Lampen. 3
- b 500 Lampen werden zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht. 3
- c Die Beschreibung des Sachzusammenhangs enthält eine Annahme, die bei Betrachtung der Anzahl defekter Lampen in einer Stichprobe eine Anwendung der Binomialverteilung ermöglicht. Geben Sie einen Grund dafür an, dass dieses Modell der Realität möglicherweise nicht gerecht wird. 2

BE

<p>2 Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.</p> <p>a Ein Karton enthält sechs defekte Lampen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt.</p> <p>b Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt.</p>	<p>3</p> <p>3</p>
<p>3 Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt. Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.</p>	<p>7</p>
<p>4 Lampen eines anderen Herstellers weisen zum Teil Fehler im Leuchtsystem oder Fehler im Schraubmechanismus auf. Für eine zufällig ausgewählte Lampe beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler im Schraubmechanismus vorliegt, 2 %, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Fehler vorliegen, 0,1 % und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Fehler vorliegt, 6,9 %. Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die beiden Fehler stochastisch unabhängig sind.</p>	<p>4</p>
<p>25</p>	

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	X: Anzahl der defekten Lampen $P_{0,09}^{10}(X \leq 4) \approx 99,9\%$	3
b	Y: Anzahl der defekten Lampen $E(Y) = 500 \cdot 0,09 = 45$; $10\% \cdot 45 = 4,5$ $P_{0,09}^{500}(41 \leq Y \leq 49) \approx 51,8\%$	3

c	Fällt bei der Lieferung von Lampen ein Karton zu Boden, so ist davon auszugehen, dass die Lampen in diesem Karton nicht unabhängig voneinander Defekte aufweisen.	2																
2 a	$\frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \approx 63,4\%$	3																
b	Ist d die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton, so gilt: $\frac{30-d}{30} \cdot \frac{29-d}{29} \geq 0,5 \Leftrightarrow d \leq 8$	3																
3	G: Gewinn des Discounters für eine zufällig ausgewählte Lampe in Euro $P(G = -1,02) = 0,65 \cdot 0,07 = 0,0455$, $P(G = -0,98) = 0,35 \cdot 0,09 = 0,0315$, $P(G = 0,47) = 0,65 \cdot 0,93 = 0,6045$, $P(G = 0,51) = 0,35 \cdot 0,91 = 0,3185$ $E(G) = 0,0455 \cdot (-1,02) + 0,0315 \cdot (-0,98) + 0,6045 \cdot 0,47 + 0,3185 \cdot 0,51 \approx 0,37$ Der im Mittel pro Lampe zu erwartende Gewinn beträgt etwa 37 Cent.	7																
4	L: „Die Lampe weist einen Fehler im Leuchtsystem auf.“ S: „Die Lampe weist einen Fehler im Schraubmechanismus auf.“ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td></td> <td>L</td> <td>\bar{L}</td> <td></td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>0,1 %</td> <td>1,9 %</td> <td>2,0 %</td> </tr> <tr> <td>\bar{S}</td> <td>4,9 %</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>5,0 %</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> Damit: $P_L(S) = \frac{0,001}{0,05} = 0,02 = P(S)$, d. h. L und S sind stochastisch unabhängig.		L	\bar{L}		S	0,1 %	1,9 %	2,0 %	\bar{S}	4,9 %				5,0 %			4
	L	\bar{L}																
S	0,1 %	1,9 %	2,0 %															
\bar{S}	4,9 %																	
	5,0 %																	
		25																

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				X	X			I		I		X		
b	3		X		X	X		I	I		I		X		
c	2					X	II		II			I		X	
2 a	3					X			II			I		X	
b	3					X		III			II	II			X
3	7		X		X	X		II	II			II		X	
4	4					X	III		II	II					X

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel² vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.