

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

### 1 Aufgabe

**1** In einer Großstadt steht die Wahl des Oberbürgermeisters bevor. Vor Beginn des Wahlkampfs wird eine repräsentative Umfrage unter den Wahlberechtigten durchgeführt. Der Umfrage zufolge haben sich 44 % der befragten Wahlberechtigten bereits für einen Kandidaten entschieden; jeder Siebte derjenigen Befragten, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, ist Jungwähler, d. h. eine wahlberechtigte Person im Alter bis 24 Jahre. Der Anteil dieser Jungwähler unter den Wahlberechtigten beträgt 12 %.

**a** Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm oder eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

**b** Zeigen Sie, dass der Anteil derjenigen, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, unter den befragten Jungwählern größer ist als unter denjenigen befragten Wahlberechtigten, die älter als 24 Jahre sind. Begründen Sie, dass es trotz dieser Tatsache nicht sinnvoll ist, sich im Wahlkampf vorwiegend auf die Jungwähler zu konzentrieren.

**c** Der Kandidat der Partei A spricht an einem Tag während seines Wahlkampfs 48 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau sechs Jungwähler befinden.

**BE**

4

4

2

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Der Umfrage zufolge hätte der Kandidat der Partei A etwa 50 % aller Stimmen erhalten, wenn die Wahl zum Zeitpunkt der Befragung stattgefunden hätte. Ein Erfolg im ersten Wahlgang, für den mehr als 50 % aller Stimmen erforderlich sind, ist demnach fraglich. Deshalb rät die von der Partei A eingesetzte Wahlkampfberaterin in der Endphase des Wahlkampfes zu einer zusätzlichen Kampagne, die allerdings mit Kosten verbunden wäre. Die Partei ist daran interessiert, einerseits einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen, andererseits unnötige Kosten zu vermeiden.

a Um einen Anhaltspunkt für eine Entscheidung über die Durchführung einer zusätzlichen Kampagne zu gewinnen, soll die Nullhypothese „Der Kandidat der Partei A würde gegenwärtig höchstens 50 % aller Stimmen erhalten.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Wahlberechtigten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

b Vor der Durchführung des beschriebenen Tests wurde festgelegt, auf die Kampagne nur dann zu verzichten, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste. Entscheiden Sie, ob bei dieser Festlegung das Interesse, einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen, oder das Interesse, unnötige Kosten zu vermeiden, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3 Nach der Wahl darf die Partei A in einem Ausschuss drei Sitze besetzen. Von den acht Stadträtinnen und vier Stadträten der Partei A, die Interesse an einem Sitz in diesem Ausschuss äußern, werden drei Personen per Losentscheid als Ausschussmitglieder bestimmt. Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt die Anzahl der weiblichen Ausschussmitglieder der Partei A.

a Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(X = 2)$ .

b Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen  $X$  bzw.  $Y$ .

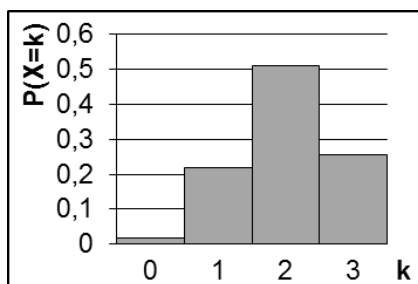


Abb. 1

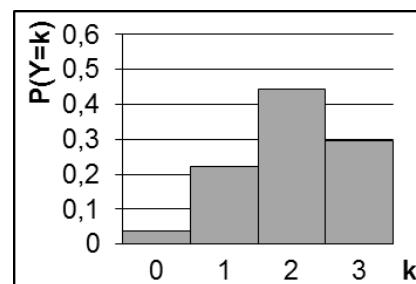


Abb. 2

Die Zufallsgröße  $X$  besitzt den Erwartungswert 2 und die Varianz  $\frac{6}{11}$ . Die Zufallsgröße  $Y$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 3$  und  $p = \frac{2}{3}$ . Zeigen Sie rechnerisch, dass  $Y$  den gleichen Erwartungswert wie die Zufallsgröße  $X$ , aber eine größere Varianz als  $X$  besitzt. Beschreiben Sie, woran man an den Abbildungen 1 und 2 erkennen kann, dass  $\text{Var}(Y) > \text{Var}(X)$  gilt.

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE																
<b>1 a</b>	J: „Die befragte Person ist Jungwähler.“ K: „Die befragte Person hat sich bereits für einen Kandidaten entschieden.“  <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>J</td> <td><math>\bar{J}</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>K</td> <td>4 %</td> <td>40 %</td> <td>44 %</td> </tr> <tr> <td><math>\bar{K}</math></td> <td>8 %</td> <td>48 %</td> <td>56 %</td> </tr> <tr> <td></td> <td>12 %</td> <td>88 %</td> <td>100 %</td> </tr> </table>		J	$\bar{J}$		K	4 %	40 %	44 %	$\bar{K}$	8 %	48 %	56 %		12 %	88 %	100 %	4
	J	$\bar{J}$																
K	4 %	40 %	44 %															
$\bar{K}$	8 %	48 %	56 %															
	12 %	88 %	100 %															
<b>b</b>	$P_J(\bar{K}) = \frac{0,08}{0,12} \approx 66,7\%$ , $P_{\bar{J}}(\bar{K}) = \frac{0,48}{0,88} \approx 54,5\%$ Begründung: Unter den befragten Wahlberechtigten, die älter als 24 Jahre sind, ist die Anzahl derjenigen, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, wesentlich größer als unter den Jungwählern.	4																
<b>c</b>	$\binom{48}{6} \cdot 0,12^6 \cdot 0,88^{42} \approx 17,1\%$	2																
<b>2 a</b>	Z: Anzahl der Wahlberechtigten, die angeben, dass sie sich gegenwärtig für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden $P_{0,5}^{200}(Z \geq k) \leq 5\%$ Geben mindestens 113 der 200 Wahlberechtigten an, dass sie sich gegenwärtig für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden, so wird die Nullhypothese abgelehnt.	5																
<b>b</b>	Bei Durchführung des Tests auf der Grundlage der getroffenen Festlegung beträgt das Risiko, irrtümlich auf eine zusätzliche Kampagne zu verzichten, höchstens 5 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Kampagne irrtümlich durchzuführen, kann dagegen wesentlich größer sein. Damit stand bei der Festlegung das Interesse im Vordergrund, einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen.	3																
<b>3 a</b>	$3 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{55}$	3																
<b>b</b>	$E(Y) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ , $\text{Var}(Y) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ Beschreibung: Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Werte, die nicht mit dem Erwartungswert übereinstimmen, sind für den Wert 1 bei beiden Zufallsgrößen etwa gleich groß und für die Werte 0 und 3 bei der Zufallsgröße Y deutlich größer als bei der Zufallsgröße X.	4																
		25																

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen <sup>2</sup>						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4			I	II		II		X	
b	4	II	II			I			X	
c	2			I		I		X		
2 a	5			II		II	II		X	
b	3	III	III				III			X
3 a	3			I		I		X		
b	4	III			III	I				X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>3</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

<sup>3</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.