

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Mathematik

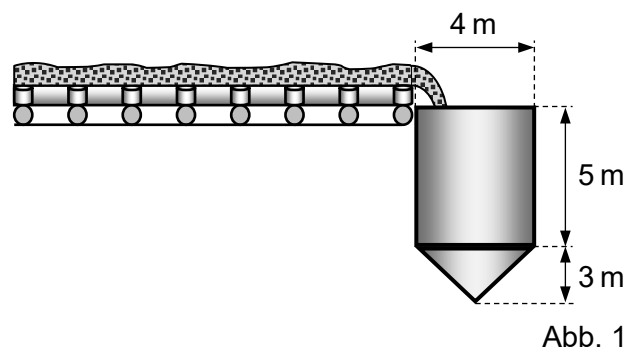
Die Aufgabe zeigt exemplarisch die Anforderungen einer Aufgabe in einer eigenständigen Abiturprüfung zur Fachrichtung „Technik“ an beruflichen Gymnasien.

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

Eine Anlage, die ein Kraftwerk mit Kohle versorgt, besteht aus einem Förderband und einem Bunker. Der Bunker ist aus einem zylinderförmigen und einem kegelförmigen Teil zusammengesetzt (vgl. Abbildung 1). Die Dichte der Kohle beträgt $1,5 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$.



BE

a Zeigen Sie, dass der Bunker etwa 113 t Kohle fasst.

4

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Abbildung 2 zeigt den Querschnitt der Kohle auf dem beladenen Förderband. Die Form der Unterseite der Kohle kann im eingezeichneten Koordinatensystem durch eine Funktion f mit $f(x) = ax^4 + b$ und $a, b \in \mathbb{R}$ beschrieben werden, die Form der Oberseite durch eine quadratische Funktion g .

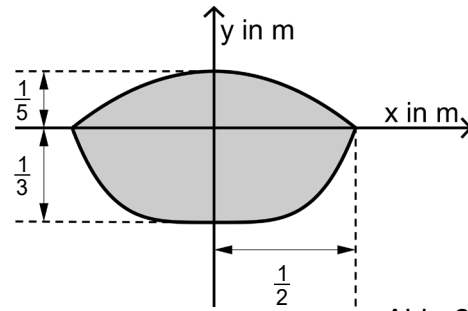


Abb. 2

b Ermitteln Sie die Funktionsterme von f und g .

(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (16x^4 - 1)$, $g(x) = \frac{1}{5} \cdot (-4x^2 + 1)$)

c Zeigen Sie, dass die Querschnittsfläche der Kohle auf dem Förderband einen Inhalt von 40 dm^2 hat.

Unter dem Massenstrom der Kohle an einer bestimmten Stelle versteht man die Masse der Kohle, die an dieser Stelle in einer bestimmten Zeit vorbeitransportiert wird.

d Berechnen Sie den Massenstrom der Kohle auf dem Förderband in Tonnen pro Sekunde, wenn das Band mit einer Geschwindigkeit von $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ läuft.

Um den Bunker mit Kohle zu befüllen, lässt man das stets beladene Förderband anlaufen. Während des Anlaufens kann die zeitliche Entwicklung des Massenstroms der Kohle auf dem Förderband modellhaft mithilfe einer Funktion \dot{m}_{An} mit $\dot{m}_{\text{An}}(t) = j \cdot (1 - e^{-kt})$, $j, k \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Dabei ist t die seit Beginn des Anlaufens vergangene Zeit in Sekunden und $\dot{m}_{\text{An}}(t)$ der Massenstrom in Tonnen pro Sekunde. Abbildung 3 zeigt den Graphen von \dot{m}_{An} , der sich der Gerade mit der Gleichung $y = 3,6$ asymptotisch nähert.

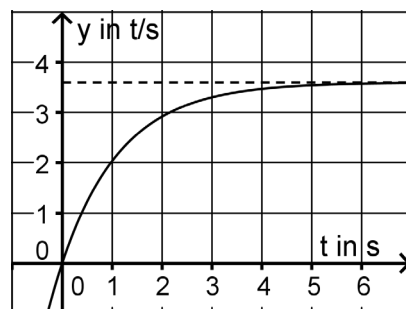


Abb. 3

e Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 3 Näherungswerte von j und k .

f Beschreiben Sie die Bedeutung der beiden Konstanten j und k im Sachzusammenhang.

Mit dem Ende des sechs Sekunden dauernden Anlaufens erreicht das Band seine maximale Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit bleibt bis zum Zeitpunkt t_{Aus} , zu dem der Antrieb abgeschaltet wird, erhalten. Anschließend läuft das Förderband bis zum Stillstand sechs Sekunden lang aus. Während des gesamten Vorgangs des Befüllens wird die zeitliche Entwicklung des Massenstroms der Kohle auf dem Förderband durch eine Funktion \dot{m} mit

$$\dot{m}(t) = \begin{cases} \dot{m}_{An}(t) = -3,6 \cdot e^{-\frac{5}{6}t} + 3,6; & 0 \leq t < 6 \\ \dot{m}_k(t) = 3,6; & 6 \leq t < t_{Aus} \\ \dot{m}_{Aus}(t) = 3,6 \cdot e^{-\frac{5}{6}(t-t_{Aus})}; & t_{Aus} \leq t \leq t_{Aus} + 6 \end{cases}$$

beschrieben. Abbildung 4 zeigt den Graphen von \dot{m} .

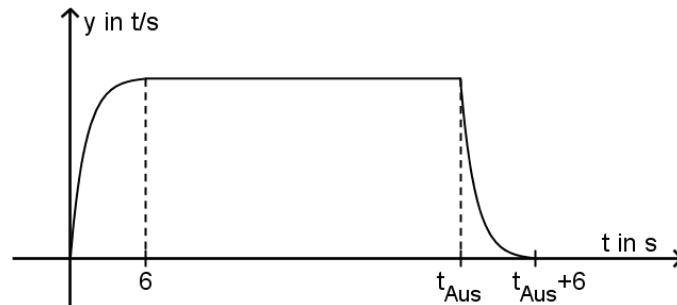


Abb. 4

- g** Zeigen Sie rechnerisch, dass während des Anlaufens etwa 17,3 t Kohle in den Bunker fallen. 3
- h** Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion \dot{m}_{Aus} aus dem Graphen der Funktion \dot{m}_{An} hervorgeht. 3
- i** Zeigen Sie rechnerisch ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass während des Auslaufens etwa 4,3 t Kohle in den Bunker fallen. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. 4
- j** Weisen Sie rechnerisch nach, dass vom Beginn des Anlaufens bis zum Abschalten des Antriebs etwa 31 s vergehen dürfen, damit der zunächst leere Bunker auch dann nicht überfüllt wird, wenn ihm während des Befüllens keine Kohle entnommen wird. 4

Der Antrieb des Förderbands soll nun zum Zeitpunkt t_{Aus} nicht abgeschaltet, sondern bis zum Stillstand allmählich verringert werden. Während des so geänderten Auslaufens kann die zeitliche Entwicklung des Massenstroms der Kohle auf dem Förderband im Modell durch eine quadratische Funktion \dot{m}_{Aus}^* mit

$$\dot{m}_{Aus}^*(t) = -p \cdot (t - t_{Aus})^2 + 3,6, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad t_{Aus} \leq t \leq t_{Aus} + \sqrt{\frac{3,6}{p}}$$

beschrieben werden.

- k** Bestimmen Sie den Wert von p so, dass während des Auslaufens nach der Änderung Kohle der gleichen Masse wie bei sofortigem Abschalten des Antriebs in den Bunker fällt. Berechnen Sie die Zeitersparnis, die mit der Änderung verbunden ist. 4

Das Förderband wird durch einen 12 m langen Stahlträger getragen. Die auf den Stahlträger wirkende Streckenlast wird durch die Funktion q mit $q(x) = -8000$ angegeben. Dabei ist x der Abstand von einem Ende des Trägers in Metern und $q(x)$ die Streckenlast in Newton pro Meter. Im Hinblick darauf, ob der Stahlträger der Belastung standhält, ist das Biegemoment relevant, das 150 kNm nicht überschreiten darf. Das Biegemoment lässt sich durch eine Funktion M beschreiben, dessen Zusammenhang mit der Streckenlast durch die Gleichung $M''(x) = q(x)$ dargestellt wird. Dabei ist M'' die zweite Ableitung von M und $M(x)$ das Biegemoment in Newtonmetern. Es soll angenommen werden, dass das Biegemoment an jedem der beiden Enden des Stahlträgers null ist.

I Bestimmen Sie den Funktionsterm von M.	5
<i>(zur Kontrolle: $M(x) = -4000x^2 + 48000x$)</i>	
m Untersuchen Sie, ob der Stahlträger der Belastung standhält.	4
	50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a $(2^2 \cdot \pi \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 3) \cdot 1,5 \text{ t} \approx 113 \text{ t}$	4
b $f(0) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}, f(\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{16}{3}$ $g(x) = cx^2 + d, c, d \in \mathbb{R}; g(0) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow d = \frac{1}{5}, g(\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{4}{5}$	5
c $\int_{-0,5}^{0,5} (g(x) - f(x)) dx = 0,4$ Die Querschnittsfläche der Kohle auf dem Förderband hat einen Inhalt von $0,4 \text{ m}^2$, d. h. von 40 dm^2 .	4
d $0,4 \text{ m}^2 \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,5 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 3,6 \frac{\text{t}}{\text{s}}$	3
e Da sich der Graph von \dot{m}_{An} der Gerade mit der Gleichung $y = 3,6$ asymptotisch nähert, ist $j = 3,6$. $\dot{m}_{\text{An}}(1) \approx 2$ liefert $k \approx 0,8$.	4
f Der Wert von j gibt an, welchem Wert in Tonnen pro Sekunde sich der Massenstrom mit der Zeit nähert. Der Wert von k bestimmt, wie schnell die Geschwindigkeit des Förderbands zunimmt; je größer der Wert von k , desto schneller.	3
g $\int_0^6 \dot{m}_{\text{An}}(t) dt \approx 17,3$, Es fallen also etwa $17,3 \text{ t}$ Kohle in den Bunker.	3
h Der Graph von \dot{m}_{Aus} geht – unter Beachtung der Reihenfolge – aus dem Graphen von \dot{m}_{An} hervor durch: 1. Verschiebung um $3,6$ in negative y -Richtung 2. Spiegelung an der t -Achse 3. Verschiebung um t_{Aus} in positive t -Richtung	3

i	<p>Der Inhalt der Fläche, die der Graph von \dot{m}_{Aus} mit der t-Achse sowie den Geraden $t = t_{\text{Aus}}$ und $t = t_{\text{Aus}} + 6$ einschließt, ist gleich dem Wert der Differenz aus dem Inhalt eines Rechtecks mit den Kantenlängen 6 und 3,6 sowie dem Inhalt der Fläche, die der Graph von \dot{m}_{An} mit der t-Achse und der Gerade $t = 6$ einschließt.</p> <p>Damit: $\int_{t_{\text{Aus}}}^{t_{\text{Aus}}+6} \dot{m}_{\text{Aus}}(t) dt = 6 \cdot 3,6 - \int_0^6 \dot{m}_{\text{An}}(t) dt \approx 4,3$</p> <p>Während des Auslaufens fallen also etwa 4,3 t Kohle in den Bunker.</p>	4
j	$\int_0^6 \dot{m}_{\text{An}}(t) dt + (t_{\text{Aus}} - 6) \cdot 3,6 + \int_{t_{\text{Aus}}}^{t_{\text{Aus}}+6} \dot{m}_{\text{Aus}}(t) dt \approx 113$ liefert $t_{\text{Aus}} \approx 31$.	4
k	<p>Aus $\int_{t_{\text{Aus}}}^{t_{\text{Aus}}+\sqrt{\frac{3,6}{p}}} \dot{m}_{\text{Aus}}^*(t) dt \approx 4,3$ ergibt sich $p \approx 1,1$.</p> <p>$6 - \sqrt{\frac{3,6}{1,1}} \approx 4$, d. h. die Zeitersparnis beträgt etwa 4 s.</p>	4
l	<p>Wegen $M''(x) = q(x) = -8000$ hat $M(x)$ die Form $M(x) = -4000x^2 + rx + s$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Mit $M(0) = M(12) = 0$ ergeben sich $r = 48000$ und $s = 0$.</p>	5
m	<p>Das maximale Biegemoment tritt aufgrund der Symmetrie in der Mitte des Stahlträgers auf.</p> <p>$M(6) = 144000$</p> <p>Das maximale Biegemoment beträgt 144 kNm, der Stahlträger hält also der Belastung stand.</p>	4
		50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ²						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4					I		X		
b	5		II		II	II			X	
c	4			I	I	I		X		
d	3		I	I			I	X		
e	4	II			II	II			X	
f	3			II	III		II			X
g	3			II		II	II		X	
h	3	II	II		II				X	
i	4	III	III		II					X

² Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

j	4			II		II			X	
k	4		III	II		II				X
l	5		III			III	II			X
m	4		II	II				II	X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.