

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	CAS

1 Aufgabe

Die Bewegungen zweier Forschungs-U-Boote U_1 und U_2 , die von einer Forschungsstation mithilfe eines Sonarsystems geortet werden, sollen modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Im Modell, das den Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr erfasst, bewegen sich beide U-Boote geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, U_1 entlang der Gerade g_1 , U_2 entlang der Gerade g_2 . Die Positionen von U_1 um 12.20 Uhr und 12.21 Uhr werden durch die Punkte $P_0(4|14|-5)$ bzw. $P_1(6|11|-5)$ dargestellt, die Positionen von U_2 zu denselben Zeitpunkten durch $Q_0(11|9|-15)$ bzw. $Q_1(9|6|-13)$. Die Wasseroberfläche wird durch die x_1x_2 -Ebene, die Lage der Forschungsstation durch den Punkt $F(12|11,5|0)$ beschrieben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität.

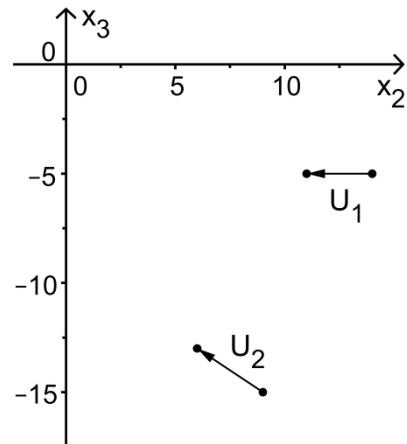
- | | |
|--|---|
| <p>a Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von g_1 und g_2. Geben Sie für die dabei verwendeten Parameter jeweils das Intervall an, das dem erfassten Zeitraum entspricht.</p> <p>b Geben Sie die Koordinaten der Punkte an, die die Positionen von U_1 und U_2 um 12.27 Uhr darstellen.</p> <p>c Ermitteln Sie die Geschwindigkeit von U_2 in Knoten ($1 \text{ kn} \approx 1,852 \frac{\text{km}}{\text{h}}$).</p> | <p>BE</p> <p>3</p> <p>2</p> <p>3</p> |
|--|---|

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

d Die Abbildung zeigt die Bewegungen von U_1 und U_2 im Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.21 Uhr als Projektion in die x_2x_3 -Ebene.

Stellen Sie die Bewegungen der beiden U-Boote für den gesamten erfassten Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr als Projektion in die x_1x_2 -Ebene grafisch dar.

Begründen Sie anhand dieser beiden Projektionen, dass sich die Geraden, entlang derer sich U_1 und U_2 bewegen, nicht schneiden.



e Der Nachweis, dass zwei Geraden windschief zueinander sind, kann nicht nur grafisch, sondern auch rechnerisch geführt werden. Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Gleichungen von g_1 und g_2 zeigen könnte, dass die beiden Geraden windschief zueinander sind. Geben Sie für jeden Schritt des beschriebenen Vorgehens die Bedeutung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Geraden an.

f Der Abstand der beiden Geraden, entlang derer sich U_1 und U_2 im Modell bewegen, ist 7. Begründen Sie, dass daraus nicht geschlossen werden kann, dass sich die U-Boote im erfassten Zeitraum bis auf 700 m nähern.

g Von den U-Booten aus können Unterwasseraufnahmen direkt zur Forschungsstation übertragen werden, sofern ihr jeweiliger Abstand zur Station maximal 850 m beträgt. Ermitteln Sie rechnerisch, wie lange die Forschungsstation Aufnahmen von U_1 empfangen kann.

h Befindet sich eines der beiden U-Boote von der Forschungsstation aus gesehen genau hinter dem anderen U-Boot, so kann es vom Sonarsystem der Station nicht erfasst werden. Untersuchen Sie im Modell, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem dies der Fall ist.

4

3

3

3

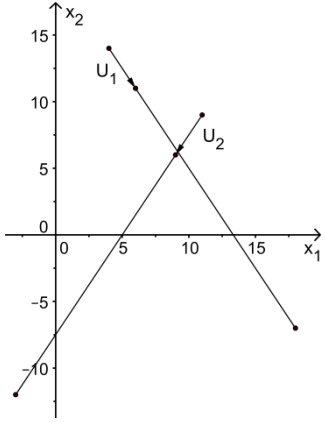
4

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a</p> $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}; g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, q \in \mathbb{R}$ <p>Intervalle: $p \in [0;7], q \in [0;7]$</p>	3

b	Position von U_1 : $(18 -7 -5)$ Position von U_2 : $(-3 -12 -1)$	2
c	$100 \cdot \left \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right \cdot \frac{60}{1852} \approx 13,4$ Die Geschwindigkeit beträgt etwa 13,4 Knoten.	3
d	 <p>Die beiden Geraden, entlang derer sich die beiden U-Boote im Modell bewegen, schneiden sich zwar in beiden Projektionen, die x_2-Koordinaten der zugehörigen Schnittpunkte stimmen jedoch nicht überein.</p>	4
e	Man könnte zeigen, dass <ul style="list-style-type: none"> ♦ die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 nicht kollinear, die beiden Geraden also nicht parallel sind, und dass <ul style="list-style-type: none"> ♦ die Gleichung $\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $p, q \in \mathbb{R}$, keine Lösung hat, g_1 und g_2 sich also nicht schneiden. 	3
f	Der Abstand der beiden Geraden ist die Länge ihres gemeinsamen Lots. Befinden sich die beiden U-Boote nicht zum selben Zeitpunkt des erfassten Zeitraums in den Positionen, die im Modell durch die Fußpunkte dieses Lots dargestellt werden, so sind sie in diesem Zeitraum stets weiter als 700 m voneinander entfernt.	3
g	$\left \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 11,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right \leq 8,5 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{1013} - 47)}{26} \leq p \leq \frac{\sqrt{1013} + 47}{26}$ Die Forschungsstation kann etwa zweieinhalb Minuten lang Aufnahmen von U_1 empfangen.	3
h	$\overrightarrow{OF} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OF} \right) = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p = 2,5 \wedge r = 2$ Zweieinhalb Minuten nach Beginn des erfassten Zeitraums kann eines der U-Boote vom Sonarsystem der Station nicht erfasst werden.	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ²						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3			I		I		X		
b	2			I		I		X		
c	3		II	II		II			X	
d	4	II		II	II				X	
e	3	II				II	II		X	
f	3	III		II			III			X
g	3		II	II		II			X	
h	4		III	III		III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.