

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2023

## Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

### 1 Aufgabe

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f$ mit $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{4}{3}x$ . Ihr Graph $G_f$ hat den Wendepunkt $(0 0)$ .	<b>BE</b>
<p>a Begründen Sie, dass <math>G_f</math> symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von <math>G_f</math> mit den Koordinatenachsen.</p>	5
<p>b <math>G_f</math> hat zwei Extrempunkte. Zeigen Sie, dass einer der beiden ein Tiefpunkt mit der <math>x</math>-Koordinate <math>\sqrt{12}</math> ist.</p>	4
<p>c Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente <math>t</math> an <math>G_f</math> im Punkt <math>P(6 f(6))</math>. (zur Kontrolle: <math>t : y = \frac{8}{3}x - 16</math>)</p>	3
<p>d Die Tangente <math>t</math> hat mit <math>G_f</math> neben <math>P</math> nur den Punkt <math>Q(-12 f(-12))</math> gemeinsam. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die <math>G_f</math> und <math>t</math> einschließen.</p>	5
<p><math>G_f</math> soll in drei Schritten verändert werden. Die drei Schritte sind:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Spiegeln an der <math>x</math>-Achse</li> <li>◆ Verschieben um 6 in positive <math>x</math>-Richtung</li> <li>◆ Verschieben um 14 in positive <math>y</math>-Richtung</li> </ul>	
<p>e Geben Sie an, wie viele verschiedene neue Graphen entstehen, wenn die drei Schritte in allen möglichen Reihenfolgen ausgeführt werden. Begründen Sie Ihre Angabe.</p>	4

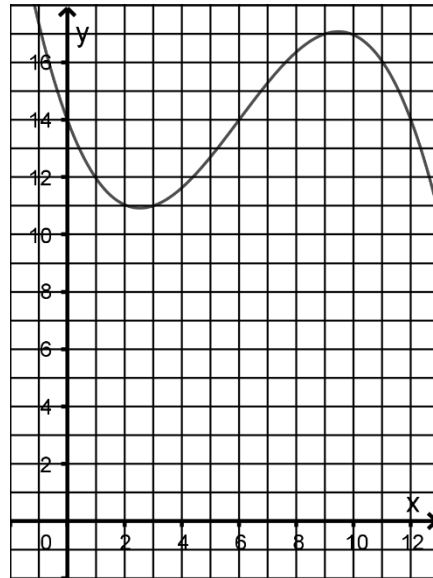
<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Wird  $G_f$  den drei Schritten in der angegebenen Reihenfolge unterzogen, so entsteht der Graph der in der Aufgabe 2 betrachteten Funktion  $g$ .

- 2 Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion  $g$  mit

$$g(x) = -\frac{1}{27}x \cdot (x-6) \cdot (x-12) + 14.$$

In einem Modell, das aus langjährigen Messungen gewonnen wurde, beschreibt  $g$  für  $0 \leq x < 12$  den Verlauf der Tagesdurchschnittstemperatur an einem bestimmten Ort. Dabei ist  $x$  die seit einem bestimmten Tag des Kalenderjahres vergangene Zeit in Monaten und  $g(x)$  die Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$ .



- a Geben Sie die Wendestelle von  $g$  an. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle hinsichtlich des Verlaufs der Tagesdurchschnittstemperatur. 2

- b Die folgenden Rechnungen stellen in Verbindung mit der Abbildung die Lösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang dar: 4

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 - \sqrt{12} \vee x = 6 + \sqrt{12}$$

$$g(6 + \sqrt{12}) - g(6 - \sqrt{12}) \approx 6,2$$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.

Zur Beschreibung des Verlaufs der Tagesdurchschnittstemperatur könnte im Modell anstelle von  $g$  auch die Funktion  $h$  mit  $h(x) = -3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 14$  und  $0 \leq x < 12$  verwendet werden.

- c Geben Sie die Tagesdurchschnittstemperaturen an, die im Modell unter Verwendung der Funktion  $h$  angenommen werden. Geben Sie für jede dieser Temperaturen an, wie oft sie angenommen wird. 4

- d Beurteilen Sie die folgende Aussage: 4

*Im Modell ist unter Verwendung von  $h$  der Zeitraum steigender Tagesdurchschnittstemperatur etwa einen Monat kürzer als unter Verwendung von  $g$ .*

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p><b>a</b> Der Funktionsterm von <math>f</math> ist ganzrational und enthält Potenzen von <math>x</math> ausschließlich mit ungeradzahligem Exponenten.</p> <p>Mit <math>f(x) = \frac{1}{27}x \cdot (x^2 - 36)</math> ergeben sich die Schnittpunkte <math>(0 0)</math>, <math>(-6 0)</math> und <math>(6 0)</math>.</p>	5
	<p><b>b</b> <math>f'(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}</math>, <math>f''(x) = \frac{2}{9}x</math></p> <p>Damit gilt <math>f'(\sqrt{12}) = \frac{1}{9} \cdot 12 - \frac{4}{3} = 0</math> und <math>f''(\sqrt{12}) &gt; 0</math>.</p>	4
	<p><b>c</b> Wegen <math>f'(6) = \frac{8}{3}</math> hat die Gleichung die Form <math>y = \frac{8}{3}x + c</math>. Mit <math>f(6) = 0</math> ergibt sich <math>\frac{8}{3} \cdot 6 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16</math>.</p>	3
	<p><b>d</b> <math>\int_{-12}^6 (f(x) - \frac{8}{3}x + 16) dx = \int_{-12}^6 (\frac{1}{27}x^3 - 4x + 16) dx = \left[ \frac{1}{108}x^4 - 2x^2 + 16x \right]_{-12}^6 = 324</math></p>	5
	<p><b>e</b> Das Ergebnis der Veränderungen ist unabhängig von der Position der Verschiebung in <math>x</math>-Richtung. Wesentlich ist nur die Reihenfolge der beiden anderen Schritte. Abhängig davon geht beispielsweise der Wendepunkt <math>(0 0)</math> durch die drei Schritte entweder in <math>(6 14)</math> oder in <math>(6 -14)</math> über. Folglich entstehen zwei verschiedene neue Graphen.</p>	4
2	<p><b>a</b> Wendestelle: 6</p> <p>Die Wendestelle gibt den Zeitpunkt an, zu dem die Tagesdurchschnittstemperatur am stärksten zunimmt.</p>	2
	<p><b>b</b> Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten Tagesdurchschnittstemperatur.</p> <p>Erläuterung: In der ersten Zeile werden die Extremstellen von <math>g</math> bestimmt, in der zweiten die Differenz der zugehörigen Funktionswerte.</p>	4
	<p><b>c</b> Angenommen werden alle Temperaturen von <math>11^\circ\text{C}</math> bis <math>17^\circ\text{C}</math>. Die Temperaturen <math>11^\circ\text{C}</math> und <math>17^\circ\text{C}</math> werden jeweils einmal angenommen, alle anderen Temperaturen jeweils zweimal.</p>	4
	<p><b>d</b> Da der Graph von <math>h</math> gegenüber dem Graphen der in <math>\mathbb{R}</math> definierten Funktion <math>x \mapsto \sin x</math> an der <math>x</math>-Achse gespiegelt sowie in <math>x</math>-Richtung mit dem Faktor <math>\frac{6}{\pi}</math> gestreckt, in dieser Richtung aber nicht verschoben ist, nimmt <math>h</math> für <math>0 \leq x &lt; 12</math> das Minimum bei <math>x = 3</math> und das Maximum bei <math>x = 9</math> an. Es gilt <math>2\sqrt{12} - 6 \approx 0,93</math>, d. h. die Aussage ist richtig.</p>	4
		35

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I			I	I		X		
b	4	I				I		X		
c	3					I		X		
d	5		II			II			X	
e	4	III	III		II		II			X
2 a	2			II			I		X	
b	4	II		I	II		I		X	
c	4	II	II	I	II	I			X	
d	4	II	III	II	II	I	II			X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.