

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

1 Die Abbildung 1 zeigt die Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktionen $r: x \mapsto -(x^2 - x - 1)$ und $s: x \mapsto e^x$. Die beiden Graphen haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse.

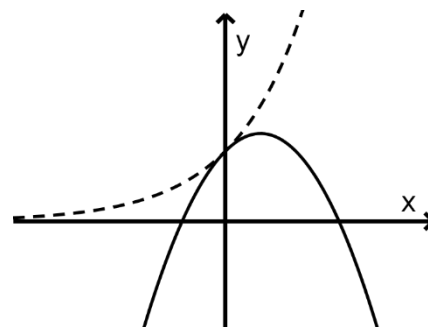


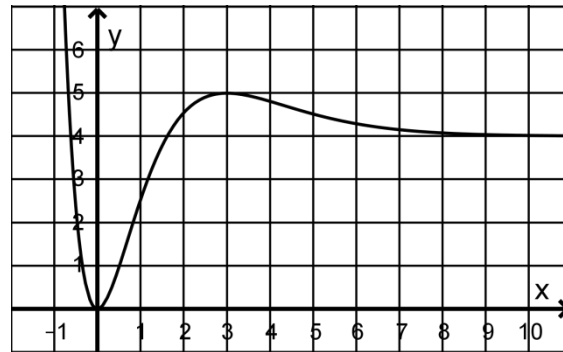
Abb. 1

- | | |
|--|--|
| <p>a Berechnen Sie die Nullstellen und die Extremstelle von r.</p> <p>b Beschreiben Sie, wie man den Abstand zwischen dem Graphen von r und der Gerade mit der Gleichung $y = 4$ berechnen könnte.</p> <p>c Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem der Graph von s die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ schneidet.</p> <p>d Zeigen Sie, dass die Graphen von r und s in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.</p> <p>e Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von r und s und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzen.</p> | <p>BE</p> <p>3</p> <p>2</p> <p>4</p> <p>4</p> <p>4</p> |
|--|--|

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen.

Die in \mathbb{R} definierte Funktion w beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.



Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von w .

Abb. 2

- a Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung 2 das Volumen des Wassers, das vom Zeitpunkt vier Sekunden nach Beobachtungsbeginn bis zum Zeitpunkt sechs Sekunden nach Beobachtungsbeginn an der Messstelle vorbeifließt. 3
- b Bestimmen Sie für die ersten elf Sekunden nach Beobachtungsbeginn mithilfe der Abbildung 2 die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt. 3
- c Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(1 | w(1))$ wird durch die Gleichung $y = t(x)$ dargestellt. Interpretieren Sie die folgende Aussage im Sachzusammenhang: 3

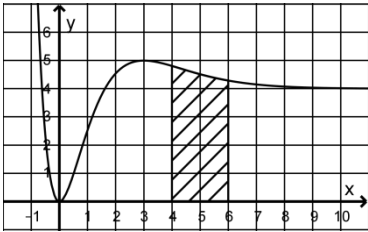
$$\text{Für alle Werte von } x \in [0,7; 1,4] \text{ gilt } \left| \frac{t(x) - w(x)}{w(x)} \right| < 0,05 .$$

3 Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist eine in \mathbb{R} definierte Funktion $w_a : x \mapsto 4 \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} + a$ gegeben. Unabhängig von a sind 0 und 3 die einzigen Extremstellen von w_a . Die Funktion w_4 ist die in der Aufgabe 2 betrachtete Funktion w , die obige Abbildung zeigt also den Graphen von w_4 .

- a Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a auf den Graphen von w_a . 1
- b Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den der Mittelpunkt der Strecke zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen von w_a auf der x -Achse liegt. 4
- c Berechnen Sie den Wert des Terms $w_4(3)$. Geben Sie alle Werte von a an, für die w_a genau eine Nullstelle hat. 4

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a $r(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ liefert $x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$ und $x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$. Extremstelle: $\frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) = \frac{1}{2}$</p>	3
	<p>b Bestimmt man die y-Koordinate des Hochpunkts des Graphen von r und subtrahiert diese von 4, so erhält man den beschriebenen Abstand.</p>	2
	<p>c Für die x-Koordinate des Schnittpunkts gilt $s(x) = 4$ und damit $s'(x) = 4$. $\tan \varphi = 4$ liefert $\varphi \approx 76^\circ$.</p>	4
	<p>d $r'(x) = -2x + 1$, $r'(0) = 1 = s'(0)$ Gleichung der Tangente: $y = x + 1$</p>	4
	<p>e $\int_0^2 (s(x) - r(x)) dx = \left[e^x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^2 = e^2 - \frac{7}{3}$</p>	4
2	<p>a  Im betrachteten Zeitraum fließen etwa 9 m^3 Wasser an der Messstelle vorbei.</p>	3
	<p>b Die y-Koordinate des Wendepunkts, dessen x-Koordinate größer als 3 ist, ist etwa 4,7. Damit beträgt die momentane Durchflussrate zum betrachteten Zeitpunkt etwa $4,7 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.</p>	3
	<p>c Für den angegebenen Zeitraum beschreibt die Tangente die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate mit einer relativen Abweichung von weniger als 5%.</p>	3
3	<p>a Eine Veränderung des Werts von a bewirkt eine Verschiebung des Graphen von w_a in y-Richtung.</p>	1
	<p>b $\frac{1}{2} \cdot (w_a(0) + w_a(3)) = \frac{1}{2} \cdot (2a - 4 + 20e^{-3})$ $2a - 4 + 20e^{-3} = 0 \Leftrightarrow a = 2 - 10e^{-3}$</p>	4
	<p>c $w_4(3) = 4 + 20e^{-3}$ w_a hat für $a < -20e^{-3}$ und für $a = 4$ genau eine Nullstelle.</p>	4
		35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3					I		X		
b	2	I	I				I	X		
c	4		II			I	I		X	
d	4	I	I			I		X		
e	4				I	II			X	
2 a	3			II	II				X	
b	3	II		II	II		I		X	
c	3			III	II		II			X
3 a	1	I			I		I	X		
b	4	II	III		II	I				X
c	4	II	II		II	I	I		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.