Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

BE

1 Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Längsschnitts einer Wasserrutschbahn, die aus einem Startbogen, einem Mittelabschnitt und einem Auslaufbogen zusammengesetzt ist. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Die x-Achse beschreibt die Horizontale.

Die Rutschbahn weist in ihrem Längsschnitt weder eine Sprungstelle noch einen Knick auf. Der Auslaufbogen geht in seinem Endpunkt, der im Modell durch den Punkt C dargestellt wird, ohne Knick in die Horizontale über.

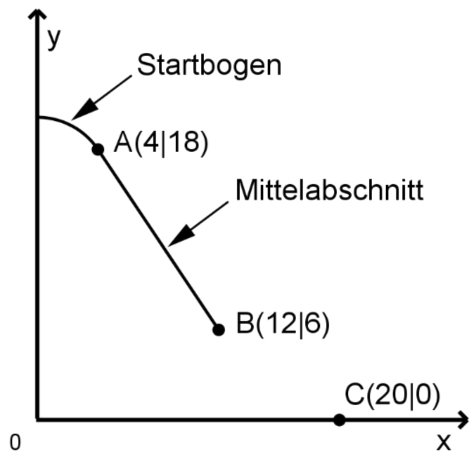


Abb. 1

a Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Gerade, mithilfe derer der Mittelabschnitt beschrieben werden kann, sowie die Größe des Neigungswinkels dieses Abschnitts der Rutschbahn gegenüber der Horizontalen. 3

b Eine Person benötigt 1,4 Sekunden, um den Mittelabschnitt zu durchrutschen. Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der Person in diesem Abschnitt der Rutschbahn. 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

c Der Auslaufbogen lässt sich mithilfe einer quadratischen Funktion f beschreiben. Bestimmen Sie eine Gleichung von f. 3

(zur Kontrolle: $f(x)=\frac{3}{32}x^2-\frac{15}{4}x+\frac{75}{2}$)

d Stellen Sie den Auslaufbogen in der Abbildung 1 graphisch dar. 2

e Der Startbogen kann im Modell mithilfe eines Kreises beschrieben werden. Er wird durch mehrere Streben gleicher Länge gestützt; diese gehen alle vom selben Punkt aus, der im Modell auf der y-Achse liegt. Eine der Streben stößt direkt am Übergang zwischen Startbogen und Mittelabschnitt senkrecht auf die Rutschbahn. Ermitteln Sie rechnerisch die Länge des Startbogens. 5

Die Rutschbahn soll verändert werden, unter anderem die Neigung des geradlinigen Mittelabschnitts. In der Planung dieser Veränderung wird der Punkt A beibehalten, der Punkt B soll um einen Wert d mit $d\in\,]0;8[$ in negative x-Richtung verschoben werden; die y-Koordinate von B wird beibehalten.

f Zeigen Sie, dass die Neigung des neuen Mittelabschnitts gegenüber der Horizontalen durch den Term $-\frac{12}{8-d}$ beschrieben wird. Bestimmen Sie denjenigen Wert von d, für den die Neigung halb so groß ist, wie wenn B doppelt so weit in negative x-Richtung verschoben wird. 3

g Für $d=2$ werden zur Gestaltung des Auslaufbogens die beiden folgenden Möglichkeiten I und II betrachtet: 6

I Der Graph, der den bisherigen Auslaufbogen darstellt, wird um 2 in negative x-Richtung verschoben und ansonsten nicht verändert.

II Der Auslaufbogen wird durch zwei quadratische Funktionen p und q beschrieben:

$p(x)=\frac{3}{16}\cdot(x-10)^2-2\cdot(x-10)+6$ für $10\le x\le 14$

$q(x)=\frac{1}{16}\cdot(x-18)^2$ für $14\le x\le 18$

Untersuchen Sie jede der beiden Möglichkeiten im Hinblick darauf, ob die Rutschbahn zwischen dem Beginn des Mittelabschnitts und dem Ende des Auslaufbogens eine Sprungstelle oder einen Knick aufweist.

2 Die Abbildung 2 zeigt den vollständigen Längsschnitt einer zweiten Wasserrutschbahn. Ihr Verlauf kann mithilfe der in IR definierten Funktion h mit $h(x)=\frac{3}{5}\cdot\cos(x)-\frac{3}{5}\cdot x+12$ beschrieben werden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Die x-Achse beschreibt die Wasseroberfläche. Die Rutschbahn endet 50 Zentimeter oberhalb der Wasseroberfläche.

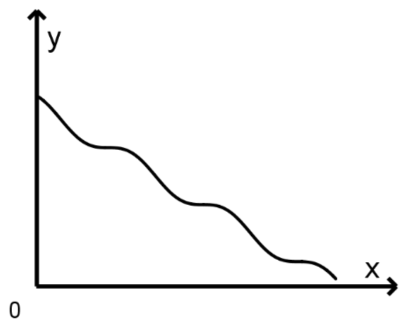


Abb. 2

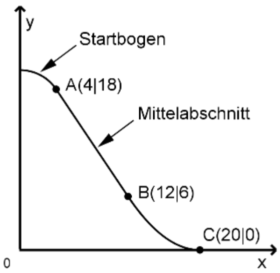
a Zeigen Sie, dass der Startpunkt der Rutschbahn 12,6 Meter oberhalb der Wasseroberfläche liegt, und ermitteln Sie die horizontale Ausdehnung der Rutschbahn. 3

b Die Rutschbahn weist in mehreren Punkten ihre größte Neigung gegenüber der Horizontalen auf. Berechnen Sie diese Neigung in Prozent. 4

c	Der Graph von h enthält Punkte, in denen die Tangente an den Graphen parallel zur x-Achse verläuft. Weisen Sie nach, dass diese Punkte alle den gleichen Abstand haben.	4
		35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Die Gleichung hat die Form $y = mx + c$. Es gilt $m = \frac{6-18}{12-4} = -\frac{3}{2}$. A liegt genau dann auf der Gerade, wenn $18 = -\frac{3}{2} \cdot 4 + c$, d. h. $c = 24$, gilt. $\tan\varphi = -\frac{3}{2}$ liefert $\varphi \approx -56°$.	3
	b	$\frac{\sqrt{8^2+12^2}\,\text{m}}{1{,}4\,\text{s}} \approx 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	2
	c	$f(x) = ax^2 + bx + c \wedge f(12) = 6 \wedge f(20) = 0 \wedge f'(20) = 0$ liefert $a = \frac{3}{32}$, $b = -\frac{15}{4}$ und $c = \frac{75}{2}$.	3
	d		2
	e	Die Lotgerade zu AB durch A schließt mit der y-Achse einen Winkel der gleichen Größe ein wie AB mit der x-Achse. Gleichung der Lotgerade: $y = \frac{2}{3}x + \frac{46}{3}$ Radius des Kreises: $r = \sqrt{4^2 + \left(18 - \frac{46}{3}\right)^2}$ $\frac{\lvert\varphi\rvert}{360°} \cdot 2\pi \cdot r \approx 4{,}7$, d. h. der Startbogen ist etwa 4,7 m lang.	5
	f	$\frac{6-18}{12-d-4} = -\frac{12}{8-d}$ $-\frac{12}{8-d} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{8-2d} \Leftrightarrow d = \frac{8}{3}$	3

	g	I Die Verschiebung von B bewirkt, dass der Mittelabschnitt steiler wird. Damit erfolgt der Übergang vom Mittelabschnitt zum Auslaufbogen nicht mehr ohne Knick. II Die y-Koordinate von B ist 6, die Steigung der Gerade, mithilfe derer der Mittelabschnitt beschrieben wird, -2. Es gilt $p(10)=6$, $p'(10)=-2$, $p(14)=q(14)$ und $p'(14)=q'(14)$. Damit weist die Rutschbahn im beschriebenen Bereich weder eine Sprungstelle noch einen Knick auf.	6
2	a	Unter Verwendung der Abbildung 2 und des angegebenen Maßstabs ergibt sich die Höhe des Startpunkts aus $h(0)=12{,}6$. $h(x)=0{,}5$ liefert $x\approx 19{,}8$, die horizontale Ausdehnung beträgt also etwa 19,8 m.	3
	b	$h''(x)$ nimmt bei $x=\frac{\pi}{2}$ den Wert null an, wobei $h'''\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ gilt. Damit ergibt sich $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-120\,\%$.	4
	c	$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ $h\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=-\frac{6}{5}\cdot k\pi+12-\frac{9\pi}{10}$ Damit stimmen für alle Punkte sowohl die Differenzen der x-Koordinaten als auch die Differenzen der y-Koordinaten und damit die Abstände der Punkte überein.	4
			35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				I	I	I	X		
b	2			I		I		X		
c	3	I		II		I	II		X	
d	2				I			X		
e	5		III	II	I	II	II			X
f	3	II	II			II	II		X	
g	6	II	II	II		I	II		X	
2 a	3			I	I	I	I	X		
b	4	I		II		I			X	
c	4	II	III			I	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.