

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

Die Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEF mit $A(10|0|0)$, $B(0|7,5|0)$, $C(0|-7,5|0)$, $D(8|0|1)$, $E(0|3|3)$ und $F(0|-3|3)$. Das Dreieck ABC wird als Grundfläche und das Dreieck DEF als Deckfläche des Körpers bezeichnet. Die Deckfläche liegt in der Ebene L.

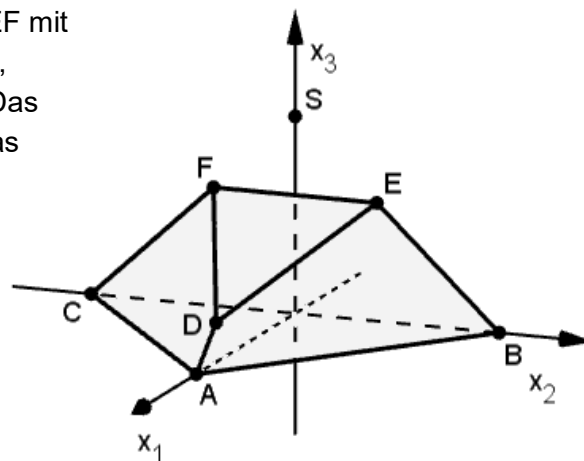


Abb. 1

- a Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. Begründen Sie, dass die Kante \overline{EF} parallel zur Grundfläche liegt.

BE

3

- b Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

4

(zur Kontrolle: $x_1 + 4x_3 = 12$)

- c Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die x_3 -Achse die Ebene L schneidet.

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Der Körper ABCDEF kann zu einer Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S (siehe Abbildung 1) ergänzt werden, wobei D, E und F auf Kanten der Pyramide liegen.

d Berechnen Sie die Koordinaten von S.

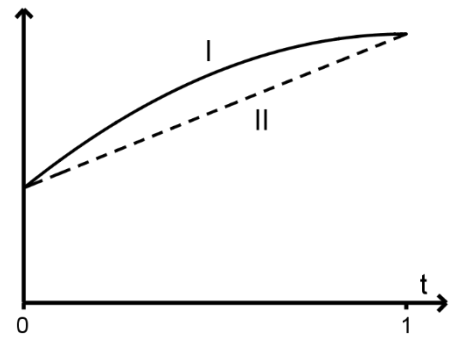
(zur Kontrolle: $S(0 \mid 0 \mid 5)$)

e S ist auch Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche DEF. Die Abbildung 2 zeigt in der x_1x_3 -Ebene die Punkte D und S sowie den Mittelpunkt M der Kante \overline{EF} . Begründen Sie, dass der Abstand von S zur Ebene L kleiner als 2 ist, und veranschaulichen Sie Ihre Begründung durch geeignete Eintragungen in der Abbildung 2.



f Alle Punkte der Strecke \overline{DS} lassen sich in der Form $D_t(8 - 8t \mid 0 \mid 1 + 4t)$ mit $t \in [0; 1]$ darstellen.

Die Abbildung 3 zeigt die Graphen I und II. Einer dieser Graphen stellt das Volumen des Körpers $ABCD_tEF$ in Abhängigkeit von t dar. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.

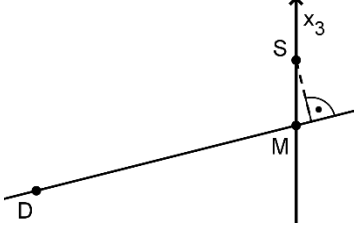


3
3
4
4
20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a</p> <p>Es gilt $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overline{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7,5 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. $\overline{AB} = \overline{AC}$.</p> <p>Die Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene, E und F haben die gleiche x_3-Koordinate.</p>	3
<p>b</p> <p>$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem:</p> <p>I $x_1 = 8r$ II $x_2 = -3 + 3r + 6s$ III $x_3 = 3 - 2r$</p> <p>Aus III ergibt sich $4x_3 = 12 - 8r$. Mit I folgt $x_1 + 4x_3 = 12$.</p>	4

c	$\sin \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{4}{\sqrt{1^2+4^2}}$ liefert $\varphi \approx 76^\circ$.	3
d	S liegt auf der x_3 -Achse. $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ liefert $t = 5$ und damit $x_3 = 5$ als x_3 -Koordinate von S.	3
e	Der Abstand von S zu L ist kleiner als der Abstand von S zu M und der Abstand von S zu M ist 2.	3 
f	Graph II Begründung: Das Volumen des Körpers $ABCD_tEF$ erhält man, indem man vom konstanten Volumen der Pyramide $ABCS$ das Volumen der Pyramide $EFSD_t$ subtrahiert. Letzteres kann mit dem Term $\frac{1}{3} \cdot A_{EFS} \cdot (8 - 8t)$ berechnet werden, wobei A_{EFS} der konstante Flächeninhalt des Dreiecks EFS ist. Damit nimmt das Volumen des Körpers $ABCD_tEF$ mit wachsenden Werten von t linear zu.	4
		20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I			I	I	I	X		
b	4					II			X	
c	3					II			X	
d	3		I		+	I	I	X		
e	3	II	II		II		I		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.