Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.

An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in IR definierten Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \tfrac{x}{4}\right)^2 = -\tfrac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$$

beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f für $0 \le x \le 4$.

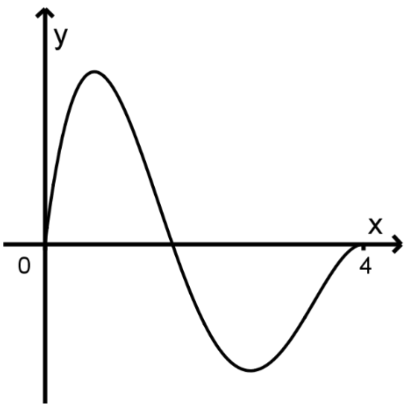


Abb. 1

Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = \left(5x^2 - 16x + 8\right) \cdot \left(1 - \tfrac{x}{4}\right)$.

a Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt. 3

b Es gilt $f(2) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an. 1

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

c Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt. 5

d Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist. Begründen Sie Ihre Angabe. 2

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot(4-x)^3=-\frac{1}{16}x^5+\frac{3}{4}x^4-3x^3+4x^2$ von Bedeutung.

e Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: 4

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

f Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge. 3

g Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 2 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde. 3

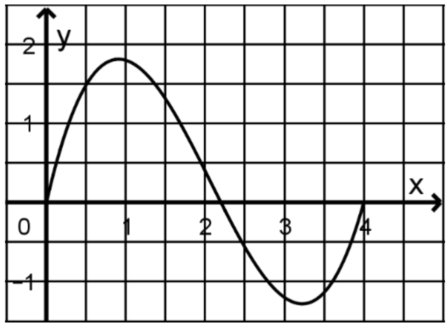


Abb. 2

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 2, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 2.

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x)=(x-3)^k+1$ und $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

a Geben Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten von h_k für $x\to-\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe. 3

b Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben. 3

c Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h_k' bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage: 6

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h_k' Tangente an den Graphen von h_k ist.

d Die Graphen von h_k und h_k' werden in der Abbildung 3 für $k=4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt, in der Abbildung 4 für $k=5$ beispielhaft für ungerade Werte von k. 7

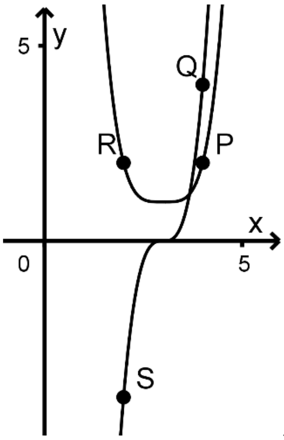


Abb. 3

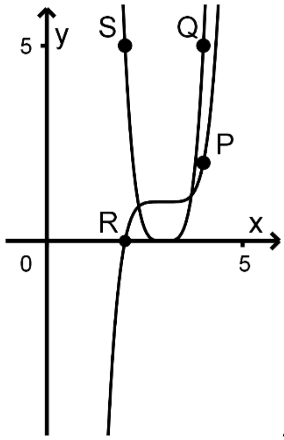


Abb. 4

Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P\left(4 \mid h_k(4)\right)$, $Q\left(4 \mid h_k'(4)\right)$, $R\left(2 \mid h_k(2)\right)$ und $S\left(2 \mid h_k'(2)\right)$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks. Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist, und zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

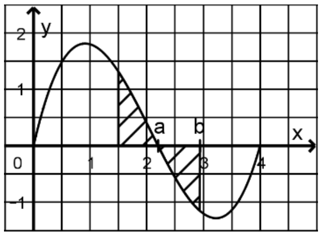
Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ stimmen der Flächeninhalt des Trapezes für k und der Flächeninhalt des Trapezes für $k+1$ überein.

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	06:00 Uhr, 07:36 Uhr, 10:00 Uhr Der Term von f besteht aus vier Linearfaktoren, von denen zwei übereinstimmen. Damit hat f genau drei Nullstellen.	3
	b	Um 08:00 Uhr nimmt die Staulänge ab.	1
	c	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 16x + 8 = 0 \vee 1 - \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{5}x + \frac{8}{5} = 0 \vee x = 4$ $x^2 - \frac{16}{5}x + \frac{8}{5} = 0$ liefert $x_1 = \frac{8}{5} - \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 - \frac{8}{5}} \approx 0{,}62$ und $x_2 = \frac{8}{5} + \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 - \frac{8}{5}} \approx 2{,}58$. In Verbindung mit der Abbildung 1 ergibt sich, dass f bei x_1 sein Maximum annimmt. Damit nimmt die Staulänge etwa 0,62 Stunden nach 06:00 Uhr am stärksten zu.	5
	d	Die Länge des Staus nimmt genau dann zu, wenn $f(x) > 0$ gilt. Damit ist der Stau um 07:36 Uhr am längsten.	2
	e	Begründung: Es gilt $s'(x) = f(x)$ und $s(0) = 0$. $s(4) = 0$	4

	f	$s(2)-s(0{,}5)\approx 1{,}3$, d. h. die Länge hat um etwa 1,3 km zugenommen. Für die durchschnittliche Änderungsrate ergibt sich etwa $\frac{1{,}3\,\text{km}}{1{,}5\,\text{h}}\approx 0{,}9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.	3
	g	Der gesuchte Zeitpunkt wird mit b bezeichnet. Die Inhalte der Flächen, die der Graph mit der x-Achse für $1{,}5\le x\le a$ und $a\le x\le b$ einschließt, müssen übereinstimmen.  	3
2	a	Für alle Werte von k ist der Term von h_k jeweils ein Polynom, wobei x^k der Summand mit dem größten Exponenten ist. Damit gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h_k(x)=-\infty$ für ungerade Werte von k und $\lim\limits_{x\to-\infty} h_k(x)=+\infty$ für gerade.	3
	b	Für $x-3=0$ und $x-3=1$ hat $h_k(x)$ jeweils für alle Werte von k den gleichen Wert. Damit: $(3\,\|\,1)$, $(4\,\|\,2)$	3
	c	Nur für $k=1$ und $k=2$ ist der Graph von h_k' eine Gerade, für $k=1$ ist dieser Graph allerdings keine Tangente an den Graphen von h_k. Es gilt $h_2'(x)=2x-6$, $h_2'(x)=2\Leftrightarrow x=4$ und $h_2(4)=2$. Damit ist die Aussage richtig.	6
	d	Sowohl P und Q als auch R und S haben übereinstimmende x-Koordinaten. Damit sind $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel. Flächeninhalt des Trapezes: $\frac{\|h_k'(4)-h_k(4)\|+\|h_k'(2)-h_k(2)\|}{2}\cdot 2=k-2+\left\|k\cdot(-1)^{k-1}-(-1)^k-1\right\|$ Für jeden der betrachteten geraden Werte von k ergibt sich der Flächeninhalt $k-2+\|-k-1-1\|=2k$ und für $k+1$ der Flächeninhalt $k+1-2+\|(k+1)+1-1\|=2k$.	7
			40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I		I	I	I	I	X		
b	1			I	I		I	X		
c	5			I		I		X		
d	2	I		II					X	
e	4	II	I	II	I	II	II		X	
f	3		I	II		I			X	
g	3	II		II	II		II		X	
2 a	3	II			II		II		X	
b	3	II	II		II	I			X	

c	6	III	II			II	II			X
d	7	III	III		II	III	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.