Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

BE

1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto e^x \cdot (x-a)^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Jeder Graph der Schar hat genau einen Hochpunkt und genau einen Tiefpunkt. Die Abbildung 1 zeigt $G_{\frac{3}{2}}$.

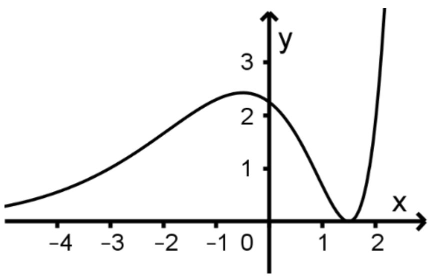


Abb. 1

a $G_{\frac{3}{2}}$ nimmt in einem seiner Wendepunkte seine kleinste Steigung an. Bestimmen Sie diese Steigung rechnerisch. 4

b G_a hat mit jeder der beiden Koordinatenachsen genau einen gemeinsamen Punkt. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an und begründen Sie, dass der gemeinsame Punkt mit der x-Achse der Tiefpunkt von G_a ist. 3

c Es gibt einen positiven Wert von a, für den G_a und die Koordinatenachsen eine Fläche mit dem Inhalt 3 einschließen. Bestimmen Sie diesen Wert von a. 3

d Für jeden Wert von a mit $a \neq 0$ schließt die Gerade durch die beiden Extrempunkte von G_a mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den dieses Dreieck gleichschenklig ist. 5

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Betrachtet werden die in IR definierten Funktionen $f_{a,b}: x \mapsto e^x \cdot \left((x-a+b)^2 - b\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt $f_{a,0}(x) = f_a(x)$. Der Graph von $f_{a,b}$ wird mit $G_{a,b}$ bezeichnet.

e Für positive Werte von b hat $G_{a,b}$ zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Für jeden Wert von a wird der Abstand dieser beiden Schnittpunkte betrachtet. Zeigen Sie rechnerisch, dass dieser Abstand unabhängig von a ist. 3

Erhöht man im Term von $f_{a,b}$ den Wert von b um 1, so erhält man einen Term der ersten Ableitungsfunktion von $f_{a,b}$. Es gilt also $f'_{a,b}(x) = f_{a,b+1}(x)$.

f Die Abbildung 2 zeigt für einen bestimmten Wert von a die Graphen zweier Funktionen der Schar, bei denen sich die Werte von b um 1 unterscheiden. 3

Entscheiden Sie, welcher der beiden Graphen I und II zum größeren Wert von b gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

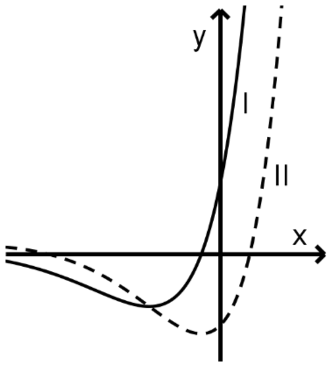


Abb. 2

g Für jeden Wert von a gilt $f_{a,0}(a) = 0 \wedge f_{a,1}(a) = 0 \wedge f_{a,2}(a) \neq 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache für die Graphen der Funktionen $f_{a,-1}$ an. 3

2 Der Schalldruckpegel eines bestimmten Wecktons wird durch die in $[0;4]$ definierte Funktion

$$h: x \mapsto \begin{cases} 20 \cdot \sin x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 20 \cdot \sin(x-2) + 20 \cdot \sin 2 & \text{für } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

beschrieben. Dabei ist x die seit Beginn des Wecktons vergangene Zeit in Sekunden und $h(x)$ der Schalldruckpegel in Dezibel (dB). Die Abbildung 3 zeigt einen Teil des Graphen von h.

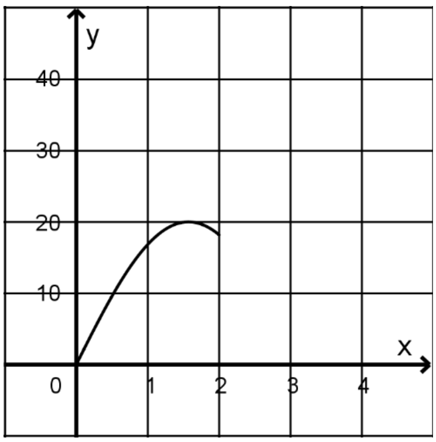


Abb. 3

a Zeigen Sie, dass der Graph von h bei $x = 2$ keinen Sprung aufweist, und vervollständigen Sie den Graphen von h in der Abbildung 3. 4

b Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Weckton den größten Schalldruckpegel hat, und geben Sie diesen Schalldruckpegel an. 3

c Berechnen Sie unter Verwendung der folgenden Information den durchschnittlichen Funktionswert von h. 5

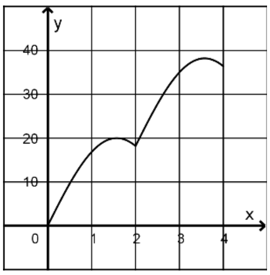
Der durchschnittliche Funktionswert von h im Intervall $[a; b]$ stimmt mit der Höhe eines Rechtecks überein, das die beiden folgenden Eigenschaften hat:

- *Das Rechteck hat die Breite $b - a$.*
- *Das Rechteck hat den gleichen Inhalt wie die Fläche, die für $a \leq x \leq b$ zwischen dem Graphen von h und der x-Achse liegt.*

d	Dem Graphen von h ist zu entnehmen, dass der Weckton bestimmte Schalldruckpegel mehr als einmal annimmt. Zwei Zeitpunkte mit gleichem Schalldruckpegel haben jeweils einen bestimmten Abstand. Bestimmen Sie rechnerisch den größten dieser Abstände.	4
		40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	In Verbindung mit der Abbildung ergibt sich: Für $x>0$ gilt $f''_{\frac{3}{2}}(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ und damit $f'_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)=2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$.	4
	b	$(a\,|\,0)$, $(0\,|\,a^2)$ Da $f_a(x)\geq 0$, ist $(a\,|\,0)$ der Tiefpunkt von G_a.	3
	c	$\int_0^a f_a(x)\,dx=3$ liefert $a\approx 1{,}76$.	3
	d	$f'_a(x)=0 \Leftrightarrow x=a-2 \vee x=a$, $f_a(a-2)=4e^{a-2}$ Steigung der Gerade durch die beiden Extrempunkte: $-2e^{a-2}$ $-2e^{a-2}=-1 \Leftrightarrow a=2-\ln 2$	5
	e	$f_{a,b}(x)=0 \Leftrightarrow x=a-b-\sqrt{b} \vee x=a-b+\sqrt{b}$ Damit ist der Abstand der beiden Schnittpunkte $2\sqrt{b}$.	3
	f	Graph I Begründung: Der Graph zum größeren Wert von b stellt die Ableitungsfunktion der zum anderen Graphen gehörenden Funktion dar. Der Graph II kommt als Graph der Ableitungsfunktion nicht infrage, da er keinen Schnittpunkt mit der x-Achse hat, dessen x-Koordinate mit der x-Koordinate des Tiefpunkts des Graphen I übereinstimmt.	3
	g	Für jeden Wert von a hat der Graph von $f_{a,-1}$ einen Wendepunkt mit der x-Koordinate a, in dem die Tangente an den Graphen parallel zur x-Achse verläuft.	3
2	**a**	$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(20\cdot\sin(x-2)+20\cdot\sin 2\right)=h(2)$  	4

	b	Für $2<x<4$ gilt $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2+\frac{\pi}{2}$. Der Weckton hat nach etwa 3,6 Sekunden mit etwa 38 Dezibel den größten Schalldruckpegel.	3
	c	$\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\int_0^2(20\cdot\sin x)\,dx+2\cdot20\cdot\sin 2\right)\approx 23$	5
	d	$h(x)=h(2)\Leftrightarrow 20\cdot\sin x=20\cdot\sin 2\Leftrightarrow x=\pi-2\vee x=2$ $2-(\pi-2)\approx 0{,}86$, d. h. der größte Abstand beträgt etwa 0,86 Sekunden.	4
			40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4		I		I	I		X		
b	3					I	I	X		
c	3		I		I	I		X		
d	5		II		I	II			X	
e	3		II			II	I		X	
f	3	III	III		II		II			X
g	3	III			II		II			X
2 a	4	II			I	II			X	
b	3			II	II		II		X	
c	5	II	III		II	II	III			X
d	4	II	II		II	II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.