Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

BE

Auf einem ebenen, horizontalen Gelände steht ein 15 m hoher Mast, an dem drei rechteckige Werbeflächen befestigt sind. In der Abbildung 1 ist eine der Werbeflächen grau dargestellt. Der Mast ist zylinderförmig und hat einen Durchmesser von 80 cm; er verläuft ebenso wie die seitlichen Kanten der Werbeflächen vertikal.

In einem Koordinatensystem wird das Gelände durch die x_1x_2-Ebene beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Der Mittelpunkt der Grundfläche des Masts wird durch den Koordinatenursprung dargestellt. Die Punkte $A(5|-2|11)$, $E(-2|5|15)$ und $F(-2|-2|15)$ stellen Eckpunkte der Werbeflächen dar.

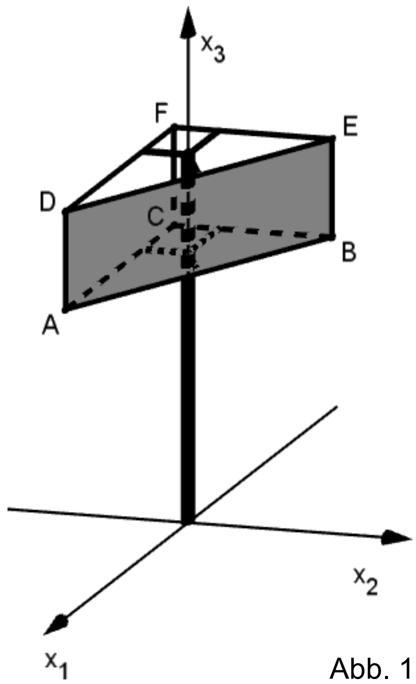

Abb. 1

a Bestimmen Sie den Flächeninhalt der grau dargestellten Werbefläche. Prüfen Sie, ob die beiden anderen Werbeflächen einen rechten Winkel einschließen. 4

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Die grau dargestellte Werbefläche liegt im Modell in einer Ebene, deren Gleichung in der Form $a \cdot x_1 + a \cdot x_2 = b$ dargestellt werden kann. Ermitteln Sie passende Werte von a und b. 3

c Begründen Sie, dass der Abstand der grau dargestellten Werbefläche zum Mast mit dem Abstand des Mittelpunkts der oberen Kante dieser Werbefläche zum Mast übereinstimmt. 5

Auf dem Gelände befindet sich ein Sportplatz. Von dort aus blickt ein Kind zur grau dargestellten Werbefläche. Die Sicht des Kindes wird durch eine Mauer eingeschränkt. Die obere Kante der Mauer wird im Modell durch die Strecke zwischen den Punkten $P(20\,|\,-5\,|\,3)$ und $Q(20\,|\,25\,|\,3)$ dargestellt. Der Punkt, von dem der Blick des Kindes ausgeht, wird durch $K(24\,|\,15\,|\,1)$ beschrieben. Das Kind kann denjenigen Teil der Werbefläche, der durch das Dreieck GBH mit $G(4\,|\,-1\,|\,11)$ dargestellt wird, nicht sehen (siehe Abbildung 2).

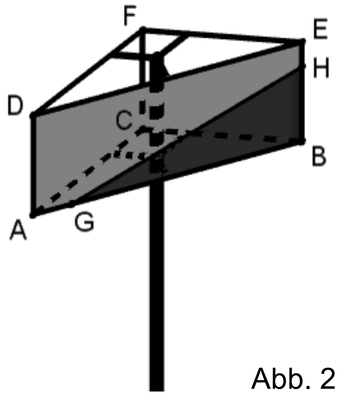

Abb. 2

d Eine Sichtlinie verläuft im Modell von K zu G. Berechnen Sie die Größe des Winkels dieser Sichtlinie gegenüber der Horizontalen. 3

e Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten von H. 5

Auf dem Sportplatz wird ein Fußball geschossen. Die Flugbahn des Balls wird im Modell durch Punkte der Form $\left(32 - 8t\,|\,5\,|\,-5t^2 + 6{,}5t + 0{,}3\right)$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit dem Schuss vergangene Zeit in Sekunden.

f Der Ball bewegt sich im Modell in der Ebene L. Beschreiben Sie die besondere Lage von L im Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. 2

g Beschreiben Sie, wie man ermitteln könnte, ob der Ball die Mauer trifft, bevor er den Boden berührt. 3

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Mit $D(5\,|\,-2\,|\,15)$ ergibt sich $4 \cdot \left|\overrightarrow{DE}\right| = 28\sqrt{2}$, der Flächeninhalt beträgt also etwa $40\,\text{m}^2$. $\overrightarrow{FD} \circ \overrightarrow{FE} = 0$, d. h. die beiden anderen Flächen schließen einen rechten Winkel ein.	4
b	Da A in der Ebene liegt, gilt $3a = b$. Damit: $a = 1$, $b = 3$	3

c	Die x_3-Achse stellt die Symmetrieachse des zylinderförmigen Masts dar. Damit ist es ausreichend, zu begründen, dass kein Punkt des Vierecks ABED einen kleineren Abstand zur x_3-Achse hat als der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{DE}$. D und E haben den gleichen Abstand zum Punkt $(0\|0\|15)$. Damit hat kein Punkt der Strecke $\overline{DE}$ einen kleineren Abstand zur x_3-Achse als M. Da die seitlichen Kanten der Werbeflächen vertikal verlaufen, gilt dies für alle Punkte des Vierecks ABED.	5
d	$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}-20\\-16\\10\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-20\\-16\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-20\\-16\\10\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}-20\\-16\\0\end{pmatrix}\right\|}$ liefert $\varphi \approx 21°$.	3
e	H ist der Schnittpunkt der Gerade BE mit der Ebene, die die Punkte K, P und Q enthält. $\overrightarrow{OB} + \lambda \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OK} + \mu \cdot \overrightarrow{KP} + \sigma \cdot \overrightarrow{KQ}$ liefert $\lambda = \lambda_1$. Damit: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \lambda_1 \cdot \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}-2\\5\\14\end{pmatrix}$	5
f	L verläuft parallel zur x_1x_3-Ebene und wird durch die Gleichung $x_2 = 5$ dargestellt.	2
g	Die Gleichung $32 - 8t = 20$ liefert die Lösung t_1. Wenn $0 < -5t_1^2 + 6{,}5t_1 + 0{,}3 \leq 3$ gilt, trifft der Ball die Mauer, bevor er den Boden berührt.	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	I		I	I	I	I	X		
b	3		II			I			X	
c	5	II		II			II		X	
d	3			I		II	I		X	
e	5		III	III	I	II				X
f	2	I			I			X		
g	3	II	III	II	II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.