

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

1 Aufgabe

Ein Unternehmen stellt Olivenöl her und füllt es in Flaschen ab. Laut Aufdruck beträgt die Füllmenge jeder Flasche 600 ml.

1 Die Flaschen werden in Kartons verpackt; jeder Karton enthält zwölf Flaschen. Ein Karton gilt als fehlerhaft, wenn mehr als eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält. Für jede Flasche beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie weniger als 600 ml Öl enthält, 1,5 %.

a Die Rechnung $0,985^{12} \approx 83,4\%$ stellt im Sachzusammenhang die Lösung einer Aufgabe dar. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie den Ansatz der Rechnung.

b An einen Supermarkt wird regelmäßig die gleiche Anzahl von Flaschen geliefert. Dabei enthalten im Mittel mehr als 780 Flaschen mindestens 600 ml Öl. Ermitteln Sie, wie viele Flaschen mindestens geliefert werden.

c Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 150 Kartons. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3 % der Kartons fehlerhaft sind.

2 Die Füllmenge der Flaschen soll als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 600,5 ml und einer Standardabweichung von 0,23 ml angenommen werden.

a Eine Flasche wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

BE

3

3

4

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

A: „Die Flasche enthält mehr als 601 ml Öl.“

B: „Die Füllmenge der Flasche weicht höchstens um 0,5 ml vom Erwartungswert ab.“

b Die Füllmenge einer Flasche ist nie negativ. Die Normalverteilung, die zur Beschreibung der Füllmenge der Flaschen verwendet wird, ist jedoch auch für negative reelle Zahlen definiert und nimmt dabei ausschließlich positive Werte an. Begründen Sie, dass die Verwendung der Normalverteilung dennoch sinnvoll ist.

c Das Unternehmen möchte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält, verringern. Für die nötige Änderung der Maschine, die die Flaschen befüllt, gibt es zwei Vorschläge:

Vorschlag 1: Die eingestellte Füllmenge von 600,5 ml wird erhöht.

Vorschlag 2: Die Genauigkeit, mit der die eingestellte Füllmenge von 600,5 ml erreicht wird, wird erhöht.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen jeweils den Graphen der Dichtefunktion, die vor der Änderung der Maschine die Füllmenge der Flaschen beschreibt.

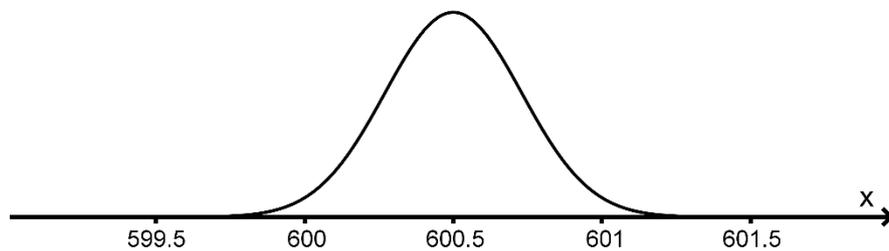


Abb. 1

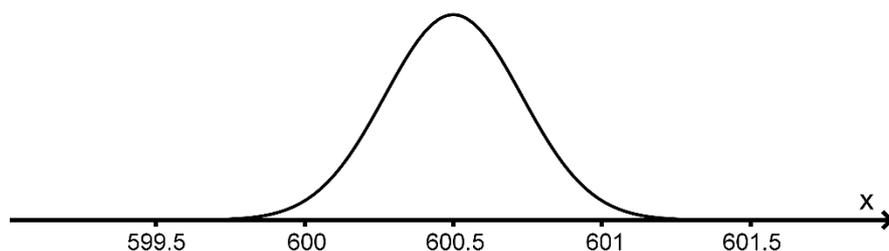


Abb. 2

Skizzieren Sie in der Abbildung 1 den Graphen einer Dichtefunktion, die sich aus dem Vorschlag 1 ergeben könnte, und in der Abbildung 2 den Graphen einer Dichtefunktion, die zum Vorschlag 2 passt. Begründen Sie für jeden Vorschlag mithilfe des skizzierten Graphen, dass damit das Ziel des Unternehmens erreicht wird.

3 Jede Flasche wird mit einem Anhänger versehen. Die Anhänger gibt es mit n verschiedenen Motiven. Für jede Flasche wird eines dieser Motive zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n zufällig ausgewählten Flaschen alle Motive verschieden sind, ist kleiner als 1%. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen Wert von n .

2

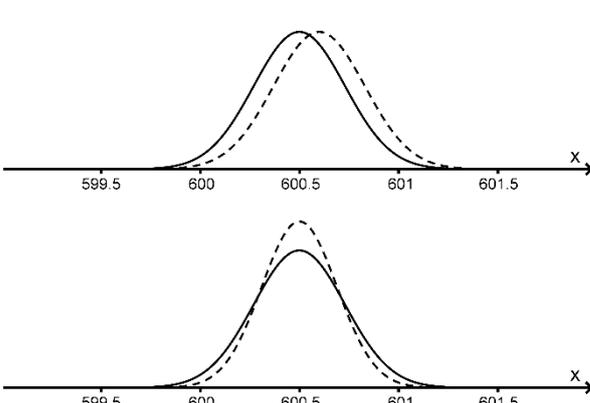
6

4

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a Aufgabenstellung: „Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton alle Flaschen mindestens 600 ml Öl enthalten.“</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche mindestens 600 ml Öl enthält, beträgt $1 - 0,015 = 0,985$, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Flaschen eines Kartons diese Eigenschaft haben, $0,985^{12}$.</p>	3
	<p>b Bezeichnet man die Anzahl der gelieferten Flaschen mit m, so gilt $m \cdot 0,985 > 780 \Leftrightarrow m \geq 792$.</p>	3
	<p>c Y: Anzahl der Flaschen, die weniger als 600 ml Öl enthalten $P_{0,015}^{12}(Y \geq 2) \approx 0,013$</p> <p>Z: Anzahl der fehlerhaften Kartons $3\% \cdot 150 = 4,5$ $P_{0,013}^{150}(Z \geq 5) \approx 5\%$</p>	4
2	<p>a X: Füllmenge in ml $P(A) = P_{600,5;0,23}(X > 601) \approx 1,5\%$ $P(B) = P_{600,5;0,23}(600 \leq X \leq 601) \approx 97,0\%$</p>	3
	<p>b Die Wahrscheinlichkeit, die die verwendete Normalverteilung für negative Füllmengen liefert, ist so gering, dass sie im Sachzusammenhang vernachlässigt werden kann.</p>	2
	<p>c</p>  <p>Abb. 1</p> <p>Abb. 2</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält, entspricht dem Inhalt der Fläche, die für $x \leq 600$ zwischen dem Graphen der Dichtefunktion und der x-Achse liegt. Jeder der beiden Vorschläge führt zu einer Verkleinerung dieser Fläche.</p>	6
3	<p>Mit $\frac{6!}{6^6} \approx 1,5\%$ und $\frac{7!}{7^7} \approx 0,6\%$ ergibt sich 7 als kleinster möglicher Wert von n.</p>	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I		I	I		I	X		
b	3	I	II	I		II	II		X	
c	4		III	I		I	I			X
2 a	3			I		I		X		
b	2	II		II			II		X	
c	6	II		II	II		II		X	
3	4		III	II		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.