

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	MMS/WTR

1 Aufgabe

1 Für ein Land wird die Gruppe derjenigen Personen betrachtet, die im Jahr 2022 eine Urlaubsreise unternahmen. 45 % dieser Personen sind weiblich. Der Anteil derjenigen, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren, beträgt unter den weiblichen Personen 80 %; der entsprechende Anteil unter den nicht weiblichen Personen wird mit a bezeichnet.

Aus der betrachteten Gruppe wird eine Person zufällig ausgewählt. Untersucht werden die folgenden Ereignisse:

W: „Die Person ist weiblich.“

Z: „Die Person war mit ihrer Urlaubsreise zufrieden.“

a Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person mit ihrer Urlaubsreise zufrieden war, 77,8 % beträgt.

b Weisen Sie nach, dass es in der betrachteten Gruppe für $a = 0,7$ weniger weibliche als nicht weibliche Personen geben würde, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren.

c Geben Sie denjenigen Wert von a an, für den W und Z stochastisch unabhängig wären, und begründen Sie Ihre Angabe, ohne zu rechnen.

BE

4

2

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

d Die ausgewählte Person war mit ihrer Urlaubsreise nicht zufrieden. Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person weiblich ist, mit zunehmendem Wert von a zunimmt. 3

2 Ein großes Reiseunternehmen führt auf seinen Internetseiten ein kostenloses Gewinnspiel durch. Jede Person kann nur einmal an dem Spiel teilnehmen. Als Ergebnis des Spiels wird eine bestimmte Anzahl von Strandkörben angezeigt; diese Anzahl beträgt mindestens 1 und höchstens 5. Im Folgenden sind dazu die möglichen Gewinne beschrieben:

- ◆ Unter den teilnehmenden Personen, bei denen nur ein Strandkorb angezeigt wird, werden Sachgewinne verlost.
- ◆ Die teilnehmenden Personen mit zwei, drei, vier oder fünf Strandkörben erhalten jeweils einen Reisegutschein. Der folgenden Tabelle können die Werte der Gutscheine sowie die Wahrscheinlichkeiten für diese Gewinne entnommen werden.

Anzahl der Strandkörbe	2	3	4	5
Wert des Gutscheins in €	200	500	1000	10 000
Wahrscheinlichkeit	$8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$

Bei dem Spiel beträgt der Erwartungswert des Gewinns pro Person 43,5 Cent.

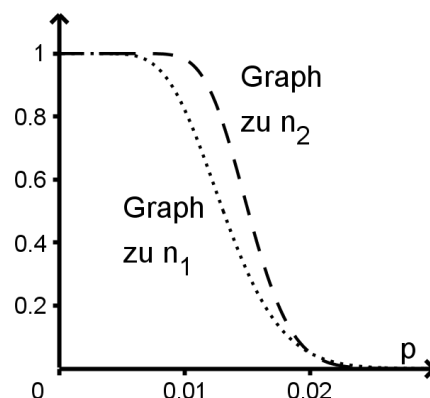
a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Spiel nur ein Strandkorb angezeigt wird, um weniger als ein Tausendstel von 1 abweicht. Bestimmen Sie für die Personen mit einem Strandkorb den Erwartungswert des Gewinns pro Person. 4

b Es soll davon ausgegangen werden, dass 80 000 Personen an dem Spiel teilnehmen werden. Der Erwartungswert der Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben wird mit μ bezeichnet. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen ganzzahligen Wert von c , für den die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % im Intervall $[\mu - c; \mu + c]$ liegt. 4

c Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen bucht, wird mit p bezeichnet. Für das Unternehmen wäre eine Verlängerung des Gewinnspiels für $p \geq 2\%$ mit Vorteilen verbunden, für $p < 2\%$ dagegen mit finanziellen Verlusten. Die Nullhypothese „ p beträgt mindestens 2 %.“ soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Je größer der Umfang der Stichprobe gewählt wird, desto teurer ist die Durchführung des Tests. 5

Das Gewinnspiel soll nur dann nicht verlängert werden, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

Die Abbildung stellt für zwei mögliche Stichprobenumfänge n_1 und n_2 mit $n_1 < n_2$ in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt. Geben Sie an, unter welcher Bedingung sich der größere Stichpro-

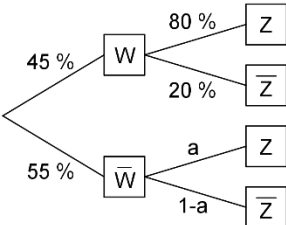


benumfang für das Unternehmen lohnen könnte, und begründen Sie Ihre Angabe unter Verwendung der Abbildung sowie des Fehlers zweiter Art.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a</p>  <p>$0,45 \cdot 0,8 + 0,55 \cdot a = 0,778 \Leftrightarrow a = 0,76$</p>	4
	<p>b $0,45 \cdot 0,8 = 0,36 < 0,385 = 0,55 \cdot 0,7$</p>	2
	<p>c $a = 0,8$ Für diesen Wert von a ist der Anteil derjenigen, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren, unter den nicht weiblichen Personen ebenso groß wie unter den weiblichen.</p>	3
	<p>d Mit zunehmendem Wert von a nimmt der Anteil derjenigen, die mit ihrer Urlaubsreise nicht zufrieden waren, unter den nicht weiblichen Personen ab, während er unter den weiblichen Personen konstant bleibt. Damit nimmt unter den Personen, die mit ihrer Urlaubsreise nicht zufrieden waren, der Anteil der weiblichen Personen zu.</p>	3
2	<p>a $1 - (8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-6}) = 0,999127 > 1 - 0,001$ $0,999127 \cdot x + 8 \cdot 10^{-4} \cdot 200 + 5 \cdot 10^{-5} \cdot 500 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot 1000 + 3 \cdot 10^{-6} \cdot 10000 = 0,435$ liefert $x \approx 0,20$, d. h. der Erwartungswert beträgt etwa 20 Cent.</p>	4
	<p>b $\mu = 8 \cdot 10^{-4} \cdot 80000 = 64$ $P_{8 \cdot 10^{-4}}^{80000} (55 \leq X \leq 73) \approx 77\%$, $P_{8 \cdot 10^{-4}}^{80000} (54 \leq X \leq 74) \approx 81\%$ Damit: $c = 10$</p>	4
	<p>c Der Fehler zweiter Art kann auftreten, wenn $p < 0,02$ gilt, beispielsweise für $p = 0,014$. Für diesen Wert von p liegt der Graph zu n_2 oberhalb des Graphen zu n_1. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, das Gewinnspiel irrtümlich zu verlängern, für n_2 kleiner als für n_1. Bei größerem Stichprobenumfang ist für das Unternehmen also das Risiko, durch eine Verlängerung des Gewinnspiels finanzielle Verluste zu erleiden, geringer. Gleichzeitig sind aber die Kosten für die Durchführung des Tests höher. Damit könnte sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen, wenn</p>	5

	die zusätzlichen Kosten für den größeren Stichprobenumfang verhältnismäßig gering wären.	
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4		II	I	I	I	I		X	
b	2			I	I	I		X		
c	3	I		I			I	X		
d	3	III		II			II			X
2 a	4		I	II	I	I			X	
b	4		II	II		II	II		X	
c	5	III		III	II		III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.