

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2023

## Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	MMS

### 1 Aufgabe

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert.

1 Das Glücksrad wird zwanzigmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

A: „Es wird genau siebenmal eine ungerade Zahl erzielt.“

B: „Es wird mehr als siebenmal und höchstens zwölfmal eine ungerade Zahl erzielt.“

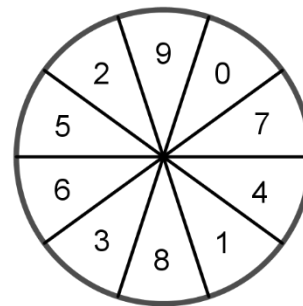
2 Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind.

C: „Die Summe der erzielten Zahlen ist kleiner als 4.“

D: „Das Produkt der erzielten Zahlen ist 2 oder 3.“

3 Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt. Jeder Spieler darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet er das Spiel selbst, bevor er eine „0“ erzielt, so wird ihm die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt er eine „0“, so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung.

a Ein erster Spieler entscheidet sich vor dem Spiel dafür, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, viermal zu drehen und danach das Spiel zu beenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Auszahlung erhält.



BE

3

5

2

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

<p><b>b</b> Bei einem zweiten Spieler beträgt nach mehrmaligem Drehen des Glücksrads die Summe der erzielten Zahlen 60. Er möchte nun das Spiel entweder sofort beenden oder das Glücksrad genau ein weiteres Mal drehen. Berechnen Sie für den Fall, dass sich der Spieler für die weitere Drehung entscheiden sollte, den Erwartungswert für die Auszahlung. Geben Sie eine Empfehlung ab, ob sich der Spieler für das Beenden des Spiels oder für die weitere Drehung entscheiden sollte, und begründen Sie Ihre Empfehlung.</p>	4
<p><b>c</b> Wenn sich ein Spieler vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, <math>n</math>-mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term <math>5n \cdot 0,9^n</math> berechnet werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage:</p> <p style="text-align: center;"><i>Es gibt zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von <math>n</math>, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen.</i></p>	4
<p><b>4</b> Betrachtet wird ein kleiner zehenseitiger Holzkörper, dessen Seiten mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert sind.</p>	
<p><b>a</b> Bei 80 Würfeln wird zwölfmal die „0“ erzielt. Bestimmt man auf dieser Grundlage zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 % ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Wurf die „0“ zu erzielen, so ergibt sich als untere Grenze dieses Intervalls näherungsweise 0,09. Begründen Sie, dass die obere Grenze des Konfidenzintervalls größer als 0,1 ist. Beschreiben Sie die Bedeutung des Konfidenzintervalls im Hinblick auf die Annahme, dass beim Werfen des Holzkörpers die „0“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % erzielt wird.</p>	3
<p><b>b</b> Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von Würfeln, für die Folgendes gilt:</p> <p style="text-align: center;"><i>Wenn man bei genau 15 % der Würfe die „0“ erzielt, dann steht dies bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % nicht in Einklang mit der Annahme, dass beim Werfen des Holzkörpers die „0“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % erzielt wird.</i></p>	4
25	

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	X: Anzahl der erzielten ungeraden Zahlen $P_{0,5}^{20}(X = 7) \approx 7\%$ $P_{0,5}^{20}(8 \leq X \leq 12) \approx 74\%$	3

2	Bei Verwendung des Ergebnisraums $\{(0;0), (0;1), \dots, (1;0), \dots, (9;9)\}$ ist die Summe der erzielten Zahlen bei zehn Ergebnissen kleiner als 4. Bei zwei dieser zehn Ergebnisse, aber nur bei vier Ergebnissen von allen ist das Produkt der erzielten Zahlen 2 oder 3. Damit stimmen die Anteile der Ergebnisse mit dem Produkt 2 oder 3 unter allen Ergebnissen und unter denen mit einer Summe, die kleiner als 4 ist, nicht überein. Die beiden Ereignisse sind also stochastisch abhängig.	5
3 a	$\left(\frac{9}{10}\right)^4 \approx 66\%$	2
b	Erwartungswert in Euro: $\frac{1}{10} \cdot (61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69) = 58,5$ Wegen $58,5 < 60$ sollte der Spieler das Spiel sofort beenden.	4
c	$5n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n = 5 \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n = 9$ Damit sind 9 und 10 die einzigen aufeinanderfolgenden Werte von n, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen. Die Aussage ist also richtig.	4
4 a	$\frac{12}{80}$ ist größer als 0,1 und liegt innerhalb des Konfidenzintervalls. Das angegebene Ergebnis der 80 Würfe steht bei der gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit in Einklang mit der vorgegebenen Annahme.	3
b	$ 0,15 - 0,1  \leq 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{120}}$ $ 0,15 - 0,1  > 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{140}}$ Damit ist 140 die gesuchte Anzahl von Würfeln. <i>Hinweis: Bei Verwendung anderer Näherungsverfahren können sich abweichende Ergebnisse ergeben.</i>	4
		25

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1	3			I	I	I		X		
2	5		II	I		I			X	
3 a	2			I		I		X		
b	4	II		II		I	II		X	
c	4	III	III			II				X
4 a	3	II		II			II		X	
b	4	II	III	II		II	II			X

## 4 Bewertungshinweise

---

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

---

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.