

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	WTR

1 Aufgabe

1 Aus den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 werden die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus die Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 hergestellt. Die Abbildung 1 veranschaulicht den Herstellungsprozess, wobei für jeweils eine Mengeneinheit (ME) eines Zwischen- oder Endprodukts der Bedarf an jedem benötigten Rohstoff bzw. Zwischenprodukt in Mengeneinheiten angegeben ist.

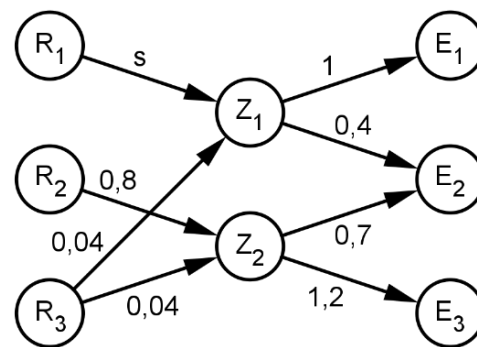


Abb. 1

Entsprechend gibt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0,04 & 0,04 \end{pmatrix}$ zu jedem Zwischenprodukt die erforderlichen Mengeneinheiten der Rohstoffe an,

die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,7 & 1,2 \end{pmatrix}$ zu jedem

Endprodukt die erforderlichen Mengeneinheiten der Zwischenprodukte und die Mat-

rix $C = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,96 \\ 0,04 & 0,044 & 0,048 \end{pmatrix}$ zu jedem Endprodukt die erforderlichen Mengenein-

heiten der Rohstoffe.

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

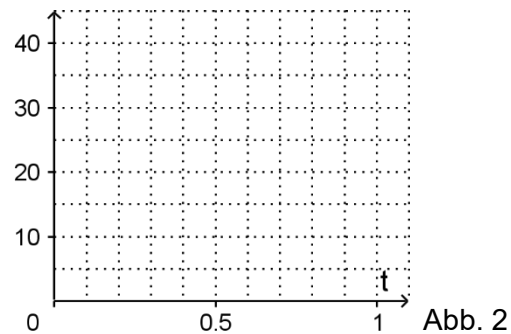
- a Geben Sie den Wert von s (siehe Abbildung 1) und die Bedeutung von s im Sachzusammenhang an. 2
- b Hergestellt werden sollen eine bestimmte Menge von E_1 , 10 ME von E_2 und 25 ME von E_3 . Dabei sollen 6 ME von R_1 verbraucht werden. Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten von R_3 dazu benötigt werden. 5
- c Die Matrix C ist nicht invertierbar. Geben Sie eine Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an. 2
- d Aus den beiden Zwischenprodukten wird ein weiteres Endprodukt E_4 hergestellt. Die Matrix $C^* = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 & u \\ 0 & 0,56 & 0,96 & v \\ 0,04 & 0,044 & 0,048 & 0,06 \end{pmatrix}$ gibt zu jedem der vier Endprodukte die erforderlichen Mengeneinheiten der Rohstoffe an. Ermitteln Sie die Summe der Mengeneinheiten der Zwischenprodukte, die zur Herstellung einer Mengeneinheit von E_4 erforderlich ist. 4

- e Im Folgenden spielt E_4 keine Rolle. 4

Die Herstellung von E_2 wird verändert; die Matrix $B_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1,1-t & 1,2 \end{pmatrix}$ mit

$t \in [0;1,1]$ gibt zu jedem der Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 die erforderlichen Mengeneinheiten der Zwischenprodukte an.

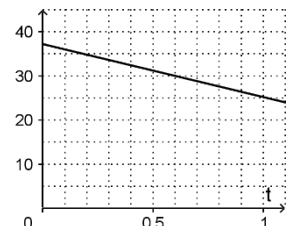
Es werden 10 ME von E_1 , 15 ME von E_2 und 25 ME von E_3 hergestellt. Stellen Sie in der Abbildung 2 den zugehörigen Bedarf von R_2 in Abhängigkeit von t grafisch dar und erläutern Sie Ihren Gedankengang.



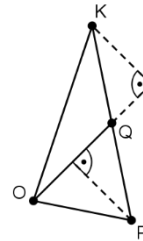
- 2 Der Koordinatenursprung O sowie die Punkte $P(-2|4|-2)$ und $Q(-4|2|2)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
- a Der Innenwinkel des Dreiecks im Punkt Q beträgt 60° . Bestimmen Sie die Größen der beiden anderen Innenwinkel. 3
- b Ein anderes Dreieck OTQ hat den gleichen Flächeninhalt und den gleichen Umfang wie das Dreieck OPQ . Bestimmen Sie die Koordinaten von T . 2
- c Für einen Punkt K gilt $\overline{OK} = \overline{OP} + 2 \cdot \overline{PQ}$. Begründen Sie, ohne zu rechnen, anhand einer geeigneten Skizze, dass die Flächeninhalte der Dreiecke OPQ und OQK übereinstimmen. 3

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a $s = 0,5$ Der Wert gibt an, wie viele Mengeneinheiten von R_1 zur Herstellung einer Mengeneinheit von Z_1 benötigt werden.</p>	2
	<p>b $C \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ liefert $0,5e_1 + 2 = 6$ und $0,04e_1 + 0,44 + 1,2 = r_3$. Daraus folgt $e_1 = 8$ und damit $r_3 = 1,96$.</p>	5
	<p>c Nicht aus jeder vorgegebenen Menge an Rohstoffen lassen sich Endprodukte so herstellen, dass keine Rohstoffe übrig bleiben.</p>	2
	<p>d Die Matrix $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0 & x \\ 0 & 0,7 & 1,2 & y \end{pmatrix}$ gibt zu jedem der Endprodukte E_1, E_2, E_3 und E_4 die erforderlichen Mengeneinheiten der Zwischenprodukte an. Aus $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 & u \\ 0 & 0,56 & 0,96 & v \\ 0,04 & 0,044 & 0,048 & 0,06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0 & x \\ 0 & 0,7 & 1,2 & y \end{pmatrix}$ ergibt sich $0,06 = 0,04 \cdot (x + y) \Leftrightarrow x + y = 1,5$, d. h. es sind insgesamt 1,5 Mengeneinheiten der Zwischenprodukte erforderlich.</p>	4
	<p>e R_2 ist nur für die Herstellung von Z_2 erforderlich, und zwar 0,8 Mengeneinheiten von R_2 pro Mengeneinheit von Z_2. $B_t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix}$ liefert $46,5 - 15t$ für die erforderlichen Mengeneinheiten von Z_2. Damit gibt der Term $37,2 - 12t$ in Abhängigkeit von t die erforderlichen Mengeneinheiten von R_2 an.</p> 	4
2	<p>a Wegen $\overline{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overline{OQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt $\overline{OP} = \overline{PQ} = \overline{OQ}$. Damit sind auch die beiden anderen Innenwinkel 60° groß.</p>	3
	<p>b Mit $\overline{OT} = \overline{PQ}$ ergibt sich $T(-2 -2 4)$.</p>	2

c Die Dreiecke OPQ und OQK haben die Seite \overline{OQ} gemeinsam. Die Längen der Höhen bezüglich der Eckpunkte P bzw. K stimmen überein.



3

25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2			I	I		I	X		
b	5		I	II		II			X	
c	2			II			I		X	
d	4	II	III	III		II				X
e	4	II	III	II	I	I	II			X
2 a	3	I				I		X		
b	2	II	II			I	I		X	
c	3	II			II		II		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.