

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2023

## Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	MMS

### 1 Aufgabe

1 Bei einem Computerspiel sind mehrere Stufen zu durchlaufen. Jeder Spieldurchgang beginnt in der Stufe 1; anschließend werden alle weiteren Stufen in aufsteigender Reihenfolge durchlaufen. Ein Ziel des Spiels ist es, Münzen zu sammeln. Diese werden in drei Kategorien bereitgestellt: 1er-Münzen sind einen Punkt wert, 2er-Münzen zwei Punkte und 8er-Münzen acht Punkte.

Die Verteilung der in der Stufe  $n$  bereitgestellten Münzen wird durch Vektoren der

Form  $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} e_n \\ z_n \\ a_n \end{pmatrix}$  dargestellt, wobei  $e_n$  die Anzahl der 1er-Münzen,  $z_n$  die Anzahl

der 2er-Münzen und  $a_n$  die Anzahl der 8er-Münzen ist. Die Gesamtzahl und die Verteilung der Münzen in der Stufe 1 werden zufällig festgelegt, wobei die Gesamtzahl nicht null sein kann. Die Veränderung der Gesamtzahl der Münzen und der Verteilung der Münzen von einer Stufe zur nächsten wird durch die Gleichung

$$\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n \text{ mit } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ bestimmt.}$$

a Stellen Sie die durch die Gleichung bestimmte Veränderung von einer Stufe zur nächsten in einem Übergangdiagramm dar.

BE

3

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Beurteilen Sie die folgende Aussage:

*Unabhängig von der Verteilung der Münzen in der Stufe 1 nimmt die Gesamtzahl der Münzen von Stufe zu Stufe zu.*

c Untersuchen Sie, ob bei dem Spiel die in der folgenden Tabelle dargestellten Anzahlen von 1er- und 2er-Münzen auftreten können.

Stufe	1	2	3
Anzahl der 1er-Münzen	50	0	300
Anzahl der 2er-Münzen	30	15	0

Zu Beginn eines Spieldurchgangs in der Stufe 1 wurden einhundert 1er-Münzen, fünfunddreißig 2er-Münzen und zehn 8er-Münzen bereitgestellt.

d Die folgende Rechnung stellt die Lösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang dar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 180 \\ 36 \end{pmatrix} \text{ liefert } \frac{36}{600+180+36} \approx 4\%$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung.

e In dem betrachteten Spieldurchgang sammelt der Spieler in den ersten drei Stufen 300 Münzen mit einem Gesamtwert von 462 Punkten. Dabei ändert sich der Anteil der gesammelten 1er-Münzen an den bereitgestellten 1er-Münzen von Stufe zu Stufe nicht; gleiches gilt für die entsprechenden Anteile der gesammelten 2er- und 8er-Münzen. Die beschriebenen Anteile der gesammelten 1er- und 2er-Münzen stimmen überein. Ermitteln Sie den beschriebenen Anteil der gesammelten 1er-Münzen.

2 Für  $k \in [0; 7[$  werden die Pyramiden  $A_k B_k C D S$  mit  $A_k(0 | k - 1 | 0)$ ,  $B_k(2k + 2 | k - 1 | 0)$ ,  $C(5 | 6 | 0)$ ,  $D(0 | 6 | 0)$  und  $S(0 | 0 | 6)$  betrachtet (vgl. Abbildung 1).

a Begründen Sie, dass die Grundfläche der Pyramide für jeden Wert von  $k$  ein Trapez ist. Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $k$ , für den die Grundfläche rechteckig ist.

b Berechnen Sie denjenigen Wert von  $k$ , für den die Größe des Winkels, den die Kante  $\overline{A_k S}$  mit der Grundfläche der Pyramide einschließt,  $60^\circ$  beträgt.

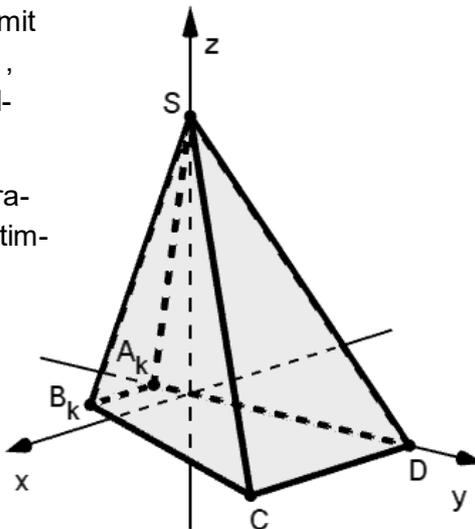


Abb. 1

2

3

3

5

4

2

- c Der in der Abbildung 2 gezeigte Graph stellt das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von  $k$  dar. Das Volumen der Pyramide für  $k = k_2$  ist halb so groß wie das Volumen der Pyramide für  $k = k_1$ . Ermitteln Sie alle möglichen Werte von  $k_2$ .

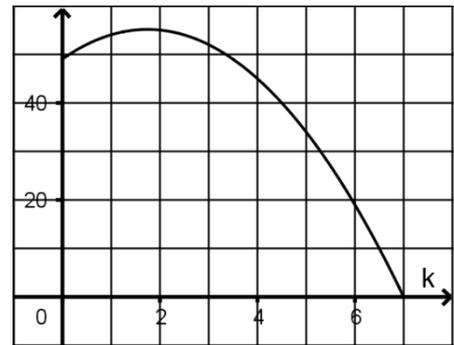


Abb. 2

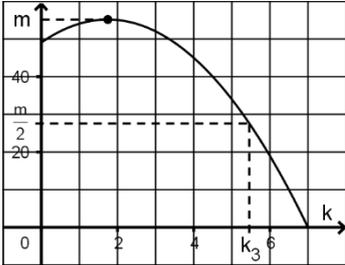
3

25

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a		3
b	$M \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d. h. die Aussage ist falsch.}$	2
c	<p>Die Gleichung <math>M \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ a_2 \end{pmatrix}</math> ist für <math>a_1 = 0</math> lösbar. Es gilt <math>M^2 \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}</math>. Damit können die dargestellten Anzahlen auftreten.</p>	3
d	<p>Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der 8er-Münzen an der Gesamtzahl der in der Stufe 4 bereitgestellten Münzen.</p>	3
e	$\sum_{k=0}^2 \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \cdot M^k \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200p \\ 215p \\ 34q \end{pmatrix}$ <p><math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 2 &amp; 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200p \\ 215p \\ 34q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 462 \end{pmatrix}</math> liefert für den gesuchten Anteil <math>p = 20\%</math>.</p>	5

2	<b>a</b> Für jeden Wert von $k$ haben $A_k$ und $B_k$ sowie $C$ und $D$ jeweils die gleiche $y$ -Koordinate. $2k + 2 = 5 \Leftrightarrow k = 1,5$		4
	<b>b</b> $\tan 60^\circ = \frac{ \overline{OS} }{ \overline{OA_k} }$ und $k \in [0; 7[$ liefern $k \approx 4,5$ .		2
	<b>c</b>  $k_2 \in [k_3; 7[$ mit $k_3 \approx 5,5$		3
			25

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I	I			X		
b	2	I	II	II	II	I	I		X	
c	3		II	II	I	II			X	
d	3	I		I	I		I	X		
e	5		III	III		II	II			X
2 a	4	II	II		II	I			X	
b	2		II		I	I			X	
c	3	III	III		II		II			X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.