

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

1 Ein Unternehmen verkauft Fitnessarmbänder. Die momentane Änderungsrate des Absatzes kann modellhaft mithilfe der in IR definierten Funktion $f : x \mapsto 4000x \cdot e^{-0,4x}$ beschrieben werden. Dabei ist x die seit der Produkteinführung vergangene Zeit in Monaten und $f(x)$ die momentane Änderungsrate des Absatzes in Stück pro Monat.

a Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes den größten Wert erreicht, und geben Sie diesen Wert an.

b Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \leq x \leq 18$ und kennzeichnen Sie diejenigen Punkte des Graphen, die zu einer momentanen Änderungsrate des Absatzes in Höhe von 1000 Stück pro Monat gehören.

c Im Zeitraum, der mit der Produkteinführung beginnt und 18 Monate später endet, gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes am stärksten zunimmt, und einen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt. Zur Bestimmung dieser beiden Zeitpunkte wurden folgende Berechnungen durchgeführt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$f'''(5) > 0$$

Erläutern Sie diese Berechnungen. Geben Sie die beiden gesuchten Zeitpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe ohne weitere Rechnung.

BE

4

3

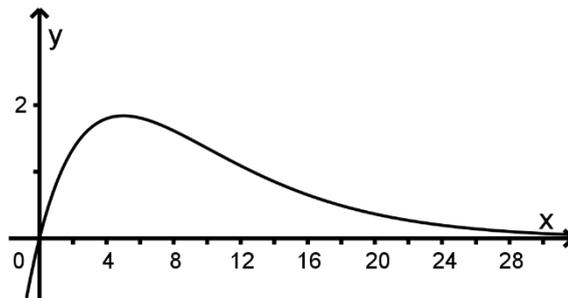
6

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Gleichzeitig mit der Einführung des Fitnessarmbands brachte das Unternehmen eine Smartwatch auf den Markt. Die momentane Änderungsrate des Absatzes der Smartwatch in Stück pro Monat lässt sich im Modell mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $g: x \mapsto 1600 \cdot x^2 \cdot e^{-0,4x}$ beschreiben.

- d** Vergleichen Sie die momentanen Änderungsraten des Absatzes für das Fitnessarmband und die Smartwatch fünf Monate nach Produkteinführung. 2
- e** Berechnen Sie die Anzahl der im ersten Jahr nach Produkteinführung insgesamt verkauften Smartwatches. 3
- f** Untersuchen Sie im Modell, ob es einen Zeitpunkt nach Produkteinführung gibt, bis zu dem ebenso viele Fitnessarmbänder wie Smartwatches verkauft wurden. Geben Sie gegebenenfalls diesen Zeitpunkt an. 3

- 2** Im Folgenden wird zunächst die in \mathbb{R} definierte Funktion $h: x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ betrachtet. Die Abbildung zeigt den Graphen von h .



Die Tangente an den Graphen von h in dessen Wendepunkt $W(10 | h(10))$ wird mit t bezeichnet.

- a** Zeigen Sie, dass t die x -Achse im Punkt $(20 | 0)$ schneidet und zeichnen Sie t in die Abbildung ein. 3
- b** Markieren Sie in der Abbildung das Flächenstück, das der Graph von h , die Tangente t und die x -Achse im Bereich $0 \leq x \leq 20$ einschließen. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks. 3

Die Funktion h ist eine der in \mathbb{R} definierten Funktionen $h_b: x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{10}b \cdot x}$ mit $b \in \mathbb{R}^+$.

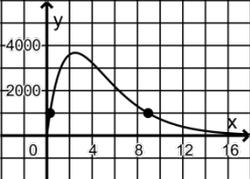
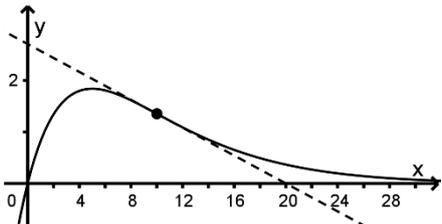
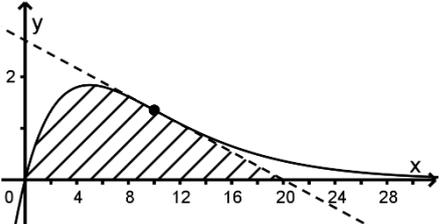
- c** Geben Sie denjenigen Wert von b an, der zur Funktion h gehört. Zeigen Sie rechnerisch, dass es genau einen Punkt gibt, durch den alle Graphen von h_b verlaufen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. 4
- d** Für jeden Wert von b ist $E_b\left(\frac{10}{b} \mid \frac{10}{b} e^{-1}\right)$ der Extrempunkt und $W_b\left(\frac{20}{b} \mid \frac{20}{b} e^{-2}\right)$ der Wendepunkt des Graphen von h_b . Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet. 4

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Alle Dreiecke OW_bE_b mit $b \in \mathbb{R}^+$ sind ähnlich.

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$, $f''(2,5) < 0$, $f(2,5) \approx 3700$ Damit erreicht die momentane Änderungsrate des Absatzes zweieinhalb Monate nach Produkteinführung mit etwa 3700 Stück pro Monat den größten Wert.	4
b		3
c	Die Zunahme bzw. Abnahme der momentanen Änderungsrate des Absatzes werden durch f' beschrieben. Die möglichen Extremstellen von f' sind die Nullstellen von f'' . Da $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ und $f'''(5) > 0$, hat f' bei $x = 5$ ein Minimum als einziges Extremum. Der Graph von f zeigt, dass $f'(0) > 0$ und $f'(18) < 0$ gilt. Für $0 \leq x \leq 18$ nimmt f' damit sein Maximum bei $x = 0$ an. Die momentane Änderungsrate des Absatzes nimmt also zum Zeitpunkt der Produkteinführung am stärksten zu und fünf Monate danach am stärksten ab.	6
d	$f(5) \approx 2707$, $g(5) \approx 5413$ Fünf Monate nach Produkteinführung ist die momentane Änderungsrate des Absatzes für die Smartwatch größer als die für das Armband.	2
e	$\int_0^{12} g(x) dx \approx 42900$	3
f	Betrachtet man die Graphen derjenigen Stammfunktionen von f und g , die bei $x = 0$ den Wert 0 haben, so ergibt sich, dass bis etwa 4,5 Monate nach Produkteinführung ebenso viele Armbänder wie Smartwatches verkauft wurden.	3
2 a	Gleichung von t : $y = -\frac{1}{e^2} \cdot x + \frac{20}{e^2}$ $-\frac{1}{e^2} \cdot x + \frac{20}{e^2} = 0 \Leftrightarrow x = 20$ 	3
b	 $\int_0^{10} h(x) dx + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h(10) = 25 - \frac{25}{e^2}$	3

c	Zu h gehört der Wert $b = 2$. Für $b \neq 2$ gilt $h(x) = h_b(x) \Leftrightarrow x = 0$. $y = h(0) = 0$	4
d	$\overrightarrow{OW_b} = \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20e^{-2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{E_b W_b} = \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20e^{-2} - 10e^{-1} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE_b} = \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10e^{-1} \end{pmatrix}$ Die Verhältnisse der Seitenlängen sind unabhängig von b, stimmen also für alle Dreiecke überein. Folglich ist die Aussage richtig.	4
		35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	I		I		I	I	X		
b	3			I	I			X		
c	6	II		II	II		II		X	
d	2		I	I		I		X		
e	3			II		I			X	
f	3		III	II		II				X
2 a	3				I	I		X		
b	3		II		I	II			X	
c	4	II	II		I	I			X	
d	4	II	III			I	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.