

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

Betrachtet wird der Stumpf ABCDEFGH der schiefen Pyramide ABCDS. Die Grundfläche ABCD mit $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$ und $D(0|0|0)$ sowie die Deckfläche des Stumpfs mit $E(3|0|4)$, $F(3|3|4)$, $G(0|3|4)$ und $H(0|0|4)$ sind quadratisch.

- a Zeichnen Sie den Stumpf in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein. 3
- b Erläutern Sie das folgende Vorgehen zur Bestimmung der x_3 -Koordinate der Pyramidenspitze S: 3

$$\text{Aus } \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \text{ ergibt sich } s = 16.$$

- c Bestimmen Sie das Volumen des Stumpfs. 3

Der Mittelpunkt M der Kante \overline{AB} und der Mittelpunkt N der Kante \overline{CG} liegen auf der

Gerade $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

- d Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von j mit der x_1x_3 -Ebene. 3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Die Punkte der Kante \overline{BC} lassen sich in der Form $P_w (w | 4 | 0)$ darstellen.

- e Für einen Punkt P_w der Kante \overline{BC} schneidet die Gerade durch H und P_w die Gerade j. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von w.
- f Es gibt Punkte P_w der Kante \overline{BC} , für die der von den Strecken $\overline{P_wM}$ und $\overline{P_wH}$ eingeschlossene Winkel größer als 70° ist. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von w.

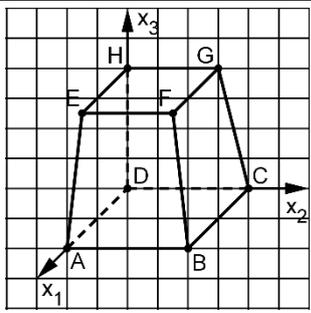
3

5

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a</p> 	3
<p>b</p> <p>Die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ verläuft durch A und E. Da D und H auf der x_3-Achse liegen, gilt dies auch für S. Damit ist der Wert von s die x_3-Koordinate von S.</p>	3
<p>c</p> $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12 = \frac{148}{3}$	3
<p>d</p> <p>Mit $x_2 = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\mu = -\frac{2}{3}$ und damit $x_1 = \frac{28}{3}$ und $x_3 = -\frac{8}{3}$.</p>	3
<p>e</p> <p>Gerade durch H und P_w: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} w \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$</p> $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} w \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ liefert } w = \frac{12}{5}.$	3
<p>f</p> <p>Mit $\overline{P_wM} = \begin{pmatrix} 4-w \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overline{P_wH} = \begin{pmatrix} -w \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ liefert $\cos(70^\circ) = \frac{\overline{P_wM} \circ \overline{P_wH}}{ \overline{P_wM} \cdot \overline{P_wH} }$ die Werte</p>	5

$w_1 \approx -0,26$ und $w_2 \approx 2,96$. P_w liegt genau dann auf \overline{BC} , wenn $0 \leq w \leq 4$ gilt. Da die Größe des von den Strecken $\overline{P_w M}$ und $\overline{P_w H}$ eingeschlossenen Winkels für $w \rightarrow +\infty$ beliebig klein wird, ist der Winkel für $w \in [0; w_2[$ größer als 70° .

20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3				I			X		
b	3	II			II		II		X	
c	3		I			I		X		
d	3		I		I	II			X	
e	3		II			I			X	
f	5	III	II			II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.