Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

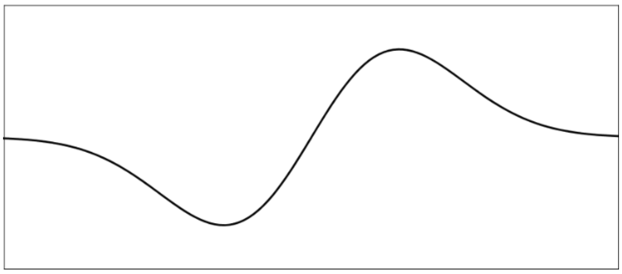


Abb. 1

a Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an. 4

b Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f. 2

(zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$)

c Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. 5

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

d Ist g' die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, so gilt $\int_u^v g'(x)\cdot e^{g(x)}dx = \left[e^{g(x)}\right]_u^v$. Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int_0^1 f(x)dx$. | 3

e Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch: | 3

Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl $w > 2022$ gilt
$$F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x)dx.$$

2 Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt $(1|1)$ enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an. | 3

b Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an. | 2

c Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, a_1 und a_2: | 3

- $f_a(0) = 0$
- $f_a'(0) = f_0'(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \vee x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

d Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist: | 3

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.

II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

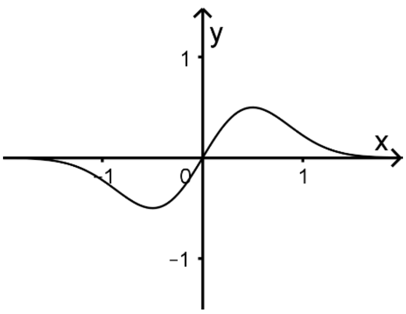


Abb. 2

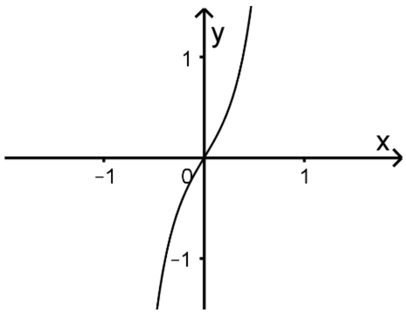


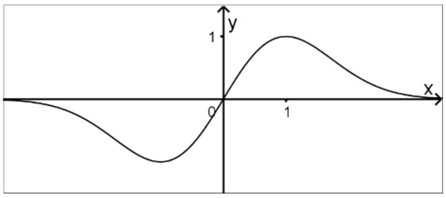
Abb. 3

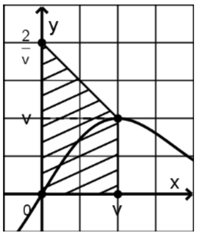
Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

e	Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe.	3
f	Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y=x$ handelt.	3
g	Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $\left(v \mid f_a(v)\right)$ des Graphen von f_a, der Punkt $\left(0 \mid \frac{2}{v}\right)$, der Koordinatenursprung und der Punkt $\left(v \mid 0\right)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat.	6
		40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f(-x)=(-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{2}}=-x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}=-f(x)$ Wegen $e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	4
	b	$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}+x\cdot(-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$	2
	c	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$ Die Funktion f ist für $-1<x<1$ wegen $f'(x)>0$ streng monoton zunehmend, für $x<-1$ und $x>1$ wegen $f'(x)<0$ streng monoton abnehmend. Es gilt $f(1)=1$. 	5
	d	$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=-\int\limits_0^1 (-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}dx=-\left[e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\right]_0^1=-1+e^{\frac{1}{2}}$	3
	e	Für jede reelle Zahl $w>2022$ schließen der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=w$ ein Flächenstück ein. Dessen Inhalt stimmt ungefähr mit dem Inhalt des Flächenstücks überein, das der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=2022$ einschließen.	3
2	**a**	$f_a(1)=1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}}=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow a=1$	3
	b	Steigung: $\sqrt{e}$; Schnittpunkt: $(0 \mid 0)$	2

c	Alle Graphen der Schar schneiden sich im Koordinatenursprung und haben dort die gleiche Steigung. Keiner der Graphen hat einen weiteren Punkt mit einem anderen Graphen der Schar gemeinsam.	3
d	$k \cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right) = k \cdot \frac{x}{k} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{2}} = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{k^2}\cdot x^2+\frac{1}{2}} = f_{\frac{a}{k^2}}(x)$	3
e	Die Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ hat für $a > 0$ genau zwei Lösungen, für $a \leq 0$ keine Lösung. Damit gehören zur Gruppe I die Werte $a > 0$, zur Gruppe II die Werte $a \leq 0$.	3
f	Die Funktion f_1 der Schar ist die Funktion f aus der Aufgabe 1. Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs und hat den Hochpunkt $(1 \mid 1)$.	3
g	 Für $v > 0$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot \left(v + \frac{2}{v}\right) \cdot v = 49 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 + 1 = 49 \Leftrightarrow v^2 = 96$ $a \cdot 96 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{96}$	6
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	I			I	I		X		
b	2					I		X		
c	5	I	II		I	I			X	
d	3	II			III	III	II			X
e	3	II			II		II		X	
2 a	3		II			I			X	
b	2				I	I		X		
c	3	II	II		II		II		X	
d	3		II			III	II			X
e	3	II	II				II		X	
f	3	I	II						X	
g	6		III		II	II	I			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.