Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

**Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder**

# Pool für das Jahr 2022

**Aufgaben für das Fach Mathematik**

## Kurzbeschreibung

| **Anforderungsniveau** | **Prüfungsteil** | **Sachgebiet**[1] | **digitales Hilfsmittel** |
|---|---|---|---|
| erhöht | B | Analysis | MMS |

## 1 Aufgabe

**BE**

Gegeben ist die Schar der in IR definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen sind symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

**1** Zunächst werden einzelne Funktionen der Schar betrachtet.

**a** Geben Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von $f_1$ an. Weisen Sie nach, dass $f_1$ genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von $f_1$ für $x \to +\infty$ an. 3

**b** Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von $f_1$ ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. 2

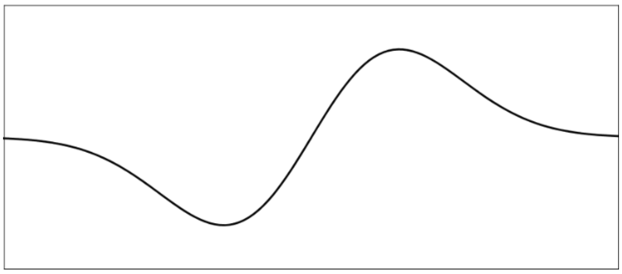


Abb. 1

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

**c** Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch: 3

*Für jede Stammfunktion $F_1$ von $f_1$ und für jede reelle Zahl $u > 2022$ gilt*

$$F_1(u) - F_1(0) \approx \int_0^{2022} f_1(x)\,dx\,.$$

**d** Der Graph von $f_0$ ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an. 2

**e** Für einen Wert von a liegt der Punkt $P(1\,|\,e)$ auf dem Graphen von $f_a$. Berechnen Sie für diesen Wert von a die Größe des Winkels, den der Graph von $f_a$ mit der Parallele zur x-Achse durch den Punkt P einschließt. 4

**f** Begründen Sie unter Verwendung der Abbildung 2, dass $\int_{-0,5}^{1} f_{-1}(x)\,dx = \int_{0,5}^{1} f_{-1}(x)\,dx$ gilt. 2

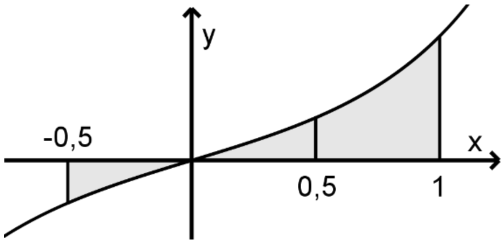



Abb. 2

**2** Nun werden alle Funktionen der gegebenen Schar betrachtet.

**a** Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, $a_1$ und $a_2$: 3

- $f_a(0) = 0$
- $f_a'(0) = f_0'(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \iff a_1 = a_2 \vee x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

**b** Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist: 3

*Wird der Graph von $f_a$ mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.*

**c** Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stimmen die Wendestellen von $f_a$ mit den Lösungen der Gleichung $(a \cdot x^2 - 3) \cdot x = 0$ überein. Geben Sie für alle Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Wendestellen von $f_a$ an und begründen Sie Ihre Angabe. 5

**d** Beschreiben Sie die Lage der Punkte $(x\,|\,y)$ mit $x \cdot y < 0$ im Koordinatensystem und begründen Sie, dass keiner dieser Punkte auf einem Graphen der Schar liegt. Zeigen Sie, dass jeder Punkt, der sowohl eine positive x-Koordinate als auch eine positive y-Koordinate hat, auf genau einem Graphen der Schar liegt. 5

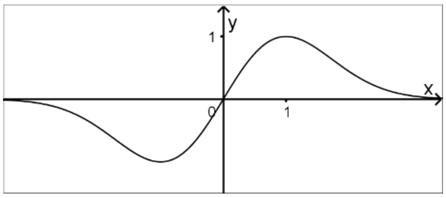
**e** Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt. 3

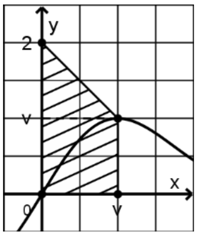
**f** Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v\,|\,f_a(v))$ des Graphen von $f_a$, der Punkt $(0\,|\,2)$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v\,|\,0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 144 hat. 5

40

# 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

| | | | BE |
|---|---|---|---|
| **1** | **a** | Hochpunkt: $(1\|1)$<br>$f_1(x)=0 \Leftrightarrow x=0$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$ | 3 |
| | **b** |  | 2 |
| | **c** | Für jede reelle Zahl $u>2022$ schließen der Graph von $f_1$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=u$ ein Flächenstück ein. Dessen Inhalt stimmt ungefähr mit dem Inhalt des Flächenstücks überein, das der Graph von $f_1$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=2022$ einschließen. | 3 |
| | **d** | Steigung: $\sqrt{e}$; Schnittpunkt: $(0\|0)$ | 2 |
| | **e** | $f_a(1)=e \Leftrightarrow a=-1$<br>$\tan\varphi = f'_{-1}(1)=2e$, d. h. $\varphi\approx 80°$. | 4 |
| | **f** | Die beiden Flächenstücke, die der Graph von $f_{-1}$ mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=-0{,}5$ und $x=0{,}5$ einschließt, haben den gleichen Inhalt und liegen auf unterschiedlichen Seiten der x-Achse. | 2 |
| **2** | **a** | Alle Graphen der Schar schneiden sich im Koordinatenursprung und haben dort die gleiche Steigung. Keiner der Graphen hat einen weiteren Punkt mit einem anderen Graphen der Schar gemeinsam. | 3 |
| | **b** | $k\cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right)=k\cdot\frac{x}{k}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{2}}=x\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{k^2}\cdot x^2+\frac{1}{2}}=f_{\frac{a}{k^2}}(x)$ | 3 |
| | **c** | Für $a=0$ ist der Graph von $f_a$ eine Gerade, d. h. $f_a$ hat keine Wendestelle.<br>Für $a\neq 0$ gilt $\left(a\cdot x^2-3\right)\cdot x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=\frac{3}{a}$. Damit ergibt sich:<br>♦ Für $a<0$ hat die gegebene Gleichung genau eine Lösung, d. h. $f_a$ genau eine Wendestelle.<br>♦ Für $a>0$ hat die gegebene Gleichung genau drei Lösungen, d. h. $f_a$ genau drei Wendestellen. | 5 |
| | **d** | Die Punkte $(x\|y)$ mit $x\cdot y<0$ liegen im zweiten bzw. vierten Quadranten.<br>Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}}>0$. Daraus folgt $f_a(x)<0$ für $x<0$ und $f_a(x)>0$ für $x>0$. Damit gilt $x\cdot y\geq 0$ für alle Punkte der Graphen der Schar. | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| | Für jeden Punkt $(x\,|\,y)$ mit $x>0$ und $y>0$ gilt $f_a(x)=y \Leftrightarrow a=\frac{1}{x^2}\cdot\left(1-2\cdot\ln\frac{y}{x}\right)$. <br> Also gibt es genau einen Wert von a, für den dieser Punkt auf dem Graphen von $f_a$ liegt. | |
| **e** | Der Graph von $f_1$ ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs und hat den Hochpunkt $(1\,|\,1)$. | 3 |
| **f** |  $\frac{1}{2}\cdot(v+2)\cdot v=144 \wedge v=\frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow a=\frac{1}{256}$ | 5 |
| | | 40 |

## 3 Standardbezug

| Teilaufgabe | BE | allgemeine mathematische Kompetenzen | | | | | | Anforderungsbereich | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | K6 | I | II | III |
| **1 a** | 3 | | | | | I | | X | | |
| **b** | 2 | | | | I | I | | X | | |
| **c** | 3 | II | | | II | | II | | X | |
| **d** | 2 | | | | I | I | | X | | |
| **e** | 4 | | II | | | I | | | X | |
| **f** | 2 | I | | | I | | | X | | |
| **2 a** | 3 | II | II | | II | | II | | X | |
| **b** | 3 | | II | | | III | II | | | X |
| **c** | 5 | II | II | | | | II | | X | |
| **d** | 5 | II | III | | II | I | II | | | X |
| **e** | 3 | I | II | | | | | | X | |
| **f** | 5 | | III | | II | II | I | | | X |

## 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2]

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.

vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.