Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

BE

Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \leq 6$ werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$ betrachtet (vgl. Abbildung 1).

a Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenklig ist. 2

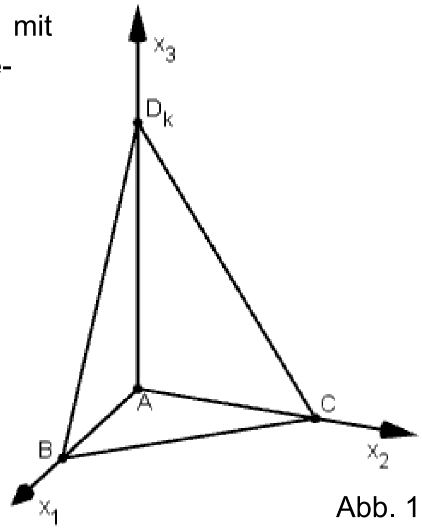

Abb. 1

b Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist $M(2|2|0)$. Begründen Sie, dass $\left|\overline{MD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}\right|$ die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k ist. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k. 3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene L_k.

c Bestimmen Sie eine Gleichung von L_k in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + \frac{4}{k} \cdot x_3 = 4$)

d Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe des Winkels, unter dem die x_3-Achse die Ebene L_k schneidet, 30° beträgt. 5

Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abbildung 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte A und $Q(1|1|3)$ sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenflächen des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen.

Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders. Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck.

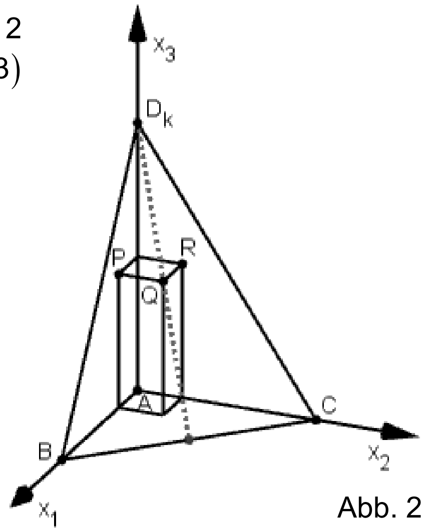

Abb. 2

e Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k. 3

(zur Kontrolle: $k = 4$)

f Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet. 4

g Nun wird die Pyramide $ABCD_6$, d. h. diejenige für $k = 6$, betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader einbeschrieben (vgl. Abbildung 3). Die Grundflächen der Quader liegen in der x_1x_2-Ebene, haben den Eckpunkt A gemeinsam und sind quadratisch. Die Höhe h der Quader durchläuft alle reellen Werte mit $0 < h < 6$. Für jeden Wert von h liegt der Eckpunkt Q_h in der Seitenfläche BCD_6 der Pyramide. 4

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts Q_h.

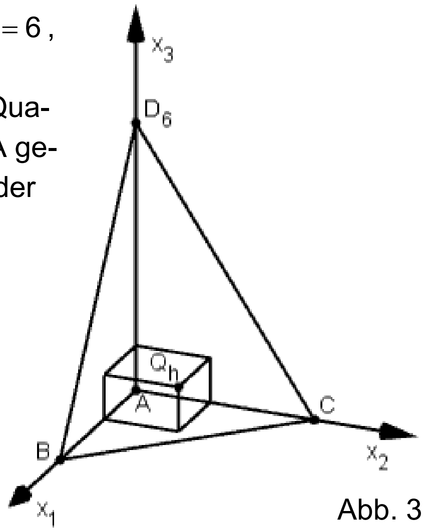

Abb. 3

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Die Dreiecke ABD_k und ACD_k sind rechtwinklig und stimmen in den Längen ihrer Katheten überein. Damit sind auch die beiden Hypotenusen gleich lang.	2
b	Da das Dreieck BCD_k gleichschenklig mit der Basis $\overline{BC}$ ist, stellt $\overline{MD_k}$ eine Höhe dieses Dreiecks dar. Flächeninhalt: $\frac{1}{2}\cdot\left\|\overline{BC}\right\|\cdot\left\|\overline{MD_k}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{8+k^2}$	3
c	Da der Koordinatenursprung nicht in L_k liegt, lässt sich die gesuchte Gleichung in der Form $ax_1+bx_2+cx_3=4$ schreiben. Mit den Koordinaten von B, C und D_k ergibt sich $a=1$, $b=1$ und $c\cdot k=4 \Leftrightarrow c=\frac{4}{k}$.	4
d	Für $k>0$ gilt: $\sin 30^\circ=\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{4}{k}\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{4}{k}\end{pmatrix}\right\|}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{\frac{4}{k}}{\sqrt{1+1+\frac{16}{k^2}}}\Leftrightarrow 2+\frac{16}{k^2}=\frac{64}{k^2}\Leftrightarrow k^2=24\Leftrightarrow k=2\sqrt{6}$	5
e	Enthält L_k den Punkt $P(1\|0\|3)$, so gilt $1+\frac{12}{k}=4\Leftrightarrow k=4$.	3
f	$4\le k<6$: drei Eckpunkte $3<k<4$: fünf Eckpunkte $0<k\le 3$: vier Eckpunkte	4
g	Q_h ist derjenige Punkt der Strecke $\overline{MD_6}$, der die x_3-Koordinate h hat. Die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\6\end{pmatrix}$ dieser Strecke liefert für $\lambda=\frac{h}{6}$: $x_1=x_2=2-\frac{h}{3}$	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I			I			X		
b	3	I			I		I	X		

c	4					II			X	
d	5		II			II			X	
e	3		II			II	II		X	
f	4	III			III					X
g	4	II	III			II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.