

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CD} mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



Abb. 1

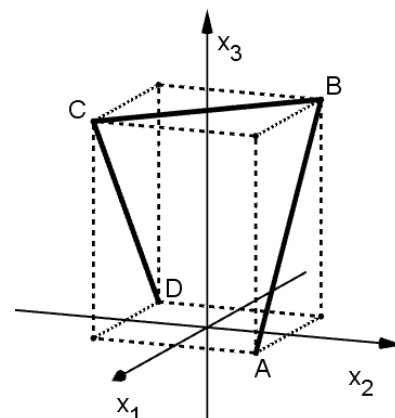


Abb. 2

BE

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- a Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3 -Achse liegen. 2
- b Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit. 3
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.
- c Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3
(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)
- d Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2 -Ebene schneidet. 5
Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.
- e Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper, ohne die Volumina zu berechnen. 4
- f Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar. 4

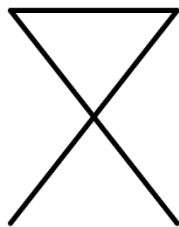


Abb. 3

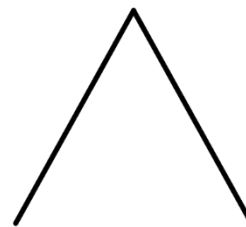


Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

- g Der Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CD} den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h: 4

$$\text{I } \overline{OQ} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, t \in [0;1] \qquad \text{II } \overline{PQ} \circ \overline{AB} = 0 \qquad \text{III } |\overline{PQ}| = 28 - h$$

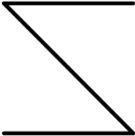
Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a Sowohl die x_1 -Koordinaten als auch die x_2 -Koordinaten von B und C unterscheiden sich nur in ihren Vorzeichen, die x_3 -Koordinaten stimmen überein.	2

b	$2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \approx 102$, d. h. die Länge beträgt etwa 102 m.	3
c	$\vec{n} \circ \overline{AB} = 0 \wedge \vec{n} \circ \overline{AC} = 0$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E. Damit hat die gesuchte Gleichung die Form $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = c$. A liegt genau dann in E, wenn $14 \cdot 11 + 14 \cdot 11 = c$ gilt, d. h. $c = 308$.	3
d	$\cos \varphi = \frac{\left \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{n} \right }{ \vec{n} }$ liefert $\varphi \approx 61^\circ$. Term: $180^\circ - 2\varphi$	5
e	Betrachtet man die Seitenfläche des Quaders, die A und C enthält, als Grundfläche und bezeichnet deren Flächeninhalt mit G und die Länge der zugehörigen Höhe des Quaders mit h, so ergibt sich für den Inhalt des pyramidenförmigen Teilkörpers $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot G \cdot h = \frac{1}{6} \cdot G \cdot h$. Damit beträgt das gesuchte Verhältnis 1:5.	4
f	Abb. 3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, Abb. 4: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 	4
g	Q ist ein Punkt auf \overline{AB} . Gilt $\overline{PQ} \circ \overline{AB} = 0$, steht also \overline{PQ} senkrecht zu \overline{AB} , ist $ \overline{PQ} $ der Abstand von P zu \overline{AB} . Dieser Abstand muss mit $28 - h$, dem Abstand von P zu \overline{BC} , übereinstimmen.	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I			I			X		
b	3			I		I		X		
c	3					II			X	
d	5	II	II			I			X	
e	4	II			I		II		X	
f	4				III					X
g	4	III	III		II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.