

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

Der in der Abbildung 1 gezeigte Körper ABCDEFGH stellt einen massiven Betonkörper dar, das Viereck EFGH dessen Deckseite. Alle Außenflächen des Körpers sind eben.

An der durch die Strecke \overline{EH} dargestellten Oberkante des Betonkörpers ist eine Informationskarte befestigt. Die Karte liegt zunächst auf der Deckseite des Betonkörpers auf, wobei sie mit den Kanten der Deckseite bündig abschließt. Anschließend kann die Karte umgeklappt werden. Die Dicke der Karte soll im Folgenden vernachlässigt werden.

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(0|20|0)$, $E(0|40|120)$ und $F(0|58|114)$.

$$\text{Es gilt } \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{FG} = \overline{EH} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im verwendeten Koordinatensystem stellt die xy -Ebene den horizontalen Boden dar, auf dem der Betonkörper befestigt ist. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm in der Realität.

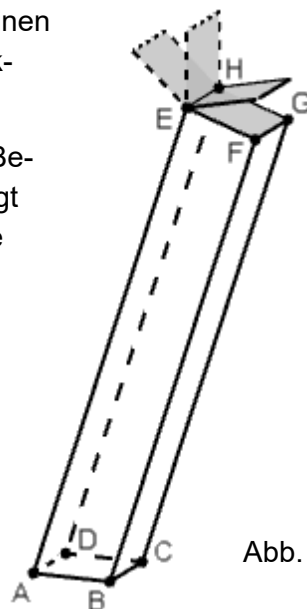


Abb. 1

BE

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- a** Zeigen Sie, dass das Viereck ABFE ein Trapez ist, und prüfen Sie, ob das Viereck im Punkt E einen rechten Winkel hat. 3
- b** Auf der Seitenfläche, die durch das Viereck ABFE beschrieben wird, verläuft eine horizontale Linie, die die Seitenfläche in zwei Teile gleichen Inhalts teilt. Begründen Sie, dass die Höhe dieser Linie über dem Boden in Zentimetern die Hälfte des Mittelwerts der z-Koordinaten von E und F ist. 4
- c** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene, in der das Rechteck EFGH liegt, in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $y + 3z = 400$)

Auf den Betonkörper treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden

beschrieben werden. Der Richtungsvektor dieser Geraden ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- d** Die Karte wird so positioniert, dass sie vertikal steht (vgl. Abbildung 2). Der im Modell mit K' bezeichnete Schatten des durch K dargestellten Eckpunkts liegt auf der Deckseite des Betonkörpers. Berechnen Sie die Koordinaten von K' . 5

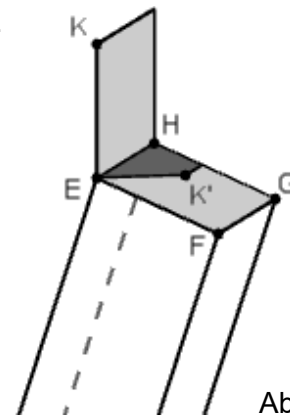


Abb. 2

Mit Ausnahme der Position, die in der Teilaufgabe d betrachtet wurde, können alle möglichen Positionen der Karte jeweils durch eine der Ebenen

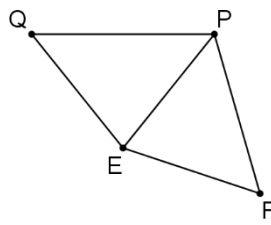
$E_a : a \cdot y + z = 40a + 120$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

- e** Ermitteln Sie denjenigen Wert von a , für den die Karte auf der Deckseite des Betonkörpers liegt. 2
- f** Klappt man die Karte ausgehend von der Deckseite des Betonkörpers um, so erreicht man währenddessen eine Position, in der zum ersten Mal kein Schatten der Karte auf der Deckseite liegt. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von a und erläutern Sie Ihr Vorgehen. 3
- g** Liegt die Karte auf der Deckseite des Betonkörpers, wird einer ihrer Eckpunkte durch F dargestellt. Dieser Eckpunkt nimmt während des Umklappens verschiedene Positionen ein. Zwei dieser Positionen werden durch $P(0 | y_1 | z)$ und $Q(0 | y_2 | z)$ mit $y_2 < y_1$ beschrieben, wobei $\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 - 58 \\ z - 114 \end{pmatrix} = y_1 - y_2$ gilt. Begründen 5

Sie, ohne zu rechnen, dass die Strecken \overline{EF} und \overline{EQ} einen doppelt so großen Winkel einschließen wie die Strecken \overline{EF} und \overline{EP} , und veranschaulichen Sie Ihre Begründung durch eine geeignet beschriftete Skizze.

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a $\overline{BF} = \frac{19}{20} \cdot \overline{AE}$, d. h. $\overline{BF} \parallel \overline{AE}$. $\overline{AE} \circ \overline{EF} = 0$, d. h. das Viereck hat im Punkt E einen rechten Winkel.</p>	3
<p>b Liegen L und M auf AE bzw. BF und verläuft LM parallel zu AB durch den Mittelpunkt von \overline{EF}, so ist der Flächeninhalt des Vierecks ABFE ebenso groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms ABML. Betrachtet man \overline{AB} als dessen Grundseite, so ist die zugehörige Höhe der Mittelwert der z-Koordinaten von E und F. Die untere Teilfläche ist ein Parallelogramm, dessen Höhe zur Grundseite \overline{AB} halb so groß ist wie die des Parallelogramms ABML.</p>	4
<p>c $\vec{n} \circ \overline{EF} = 0$ und $\vec{n} \circ \overline{EH} = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene. Damit lässt sich die gesuchte Gleichung in der Form $y + 3z = c$ schreiben. E liegt genau dann in der Ebene, wenn $c = 400$ gilt.</p>	3
<p>d Gerade durch K mit dem gegebenen Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 120 + \overline{EF} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $40 + \lambda + 3 \cdot (120 + \overline{EF} - 3\lambda) = 400 \Leftrightarrow \lambda = \frac{9}{4}\sqrt{10}$ Die Koordinaten von K' betragen etwa $(-14 47 118)$.</p>	5
<p>e F liegt genau dann in E_a, wenn $a \cdot 58 + 114 = 40a + 120$ und damit $a = \frac{1}{3}$ gilt.</p>	2
<p>f Die betreffende Position wird dann erreicht, wenn die Karte parallel zum einfallenden Sonnenlicht steht. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 3$</p>	3
<p>g Die Punkte F, P und Q haben den gleichen Abstand von E. Da P und Q in ihren x- und z-Koordinaten übereinstimmen, stellt $y_1 - y_2$ ihren Abstand dar. $\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 - 58 \\ z - 114 \end{pmatrix}$ ist der Abstand von F und P. Damit sind die Dreiecke EFP und EPQ kongruent.</p> 	5
	25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I			I	I		X		
b	4	II	II	I	II		II		X	
c	3					II			X	
d	5		I	II		II	I		X	
e	2		I	I		I		X		
f	3	II	II	III	I	I	II			X
g	5	III		II	II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.