Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	MMS

1 Aufgabe

BE

1 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $P(2\,|\,-3\,|\,-12)$, $Q(3\,|\,-7\,|\,9)$ und $R(10\,|\,-20\,|\,-4)$ gegeben. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.

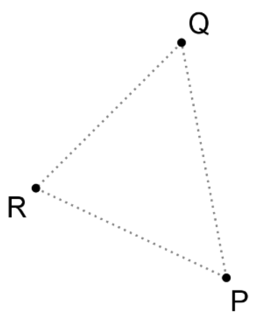
a Zeigen Sie, dass die Punkte P, Q und R nicht auf einer Gerade liegen. 2

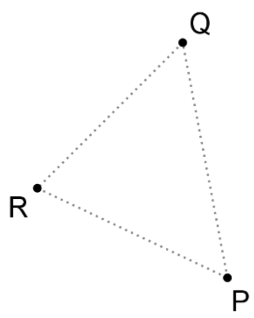
b Berechnen Sie für das Dreieck PQR die Größe des Innenwinkels im Punkt P. 3

c Betrachtet werden die Punkte, deren Ortsvektoren sich in der Form $\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ darstellen lassen. Markieren Sie in jeder der beiden Abbildungen alle Punkte, die der darüber angegebenen Bedingung I bzw. II genügen. 3

I $0 \leq \lambda \leq 1$ und $\mu = 0$

II $0 \leq \lambda + \mu \leq 1$ und $\lambda, \mu \geq 0$





[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

d Betrachtet wird die Menge der Punkte S_σ, für deren Ortsvektoren Folgendes gilt: 3

$$\overrightarrow{OS_\sigma} = \overrightarrow{OR} + \sigma \cdot \overrightarrow{PQ} \text{ mit } \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Begründen Sie, dass die Flächeninhalte der Dreiecke PQS_σ mit dem Flächeninhalt des Dreiecks PQR übereinstimmen.

2 Ein Unternehmen bietet in einer Stadt insgesamt 2400 Fahrräder zum Ausleihen an. Das Stadtgebiet ist in die drei Bereiche A, B und C aufgeteilt. Die Verteilung der Fahrräder in der Stadt kann durch einen Vektor der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ beschrieben werden, wobei a, b und c die Anzahlen der Fahrräder in den Bereichen A, B bzw. C sind. Die Entwicklung der Verteilung vom Ende eines Tages zum Ende des nächsten Tages wird modellhaft durch die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

a Interpretieren Sie im Sachzusammenhang den Eintrag 0,8 in der Matrix M sowie die Tatsache, dass die Summe der Einträge der dritten Spalte von M den Wert 1 hat. 2

b Am Ende eines Montags befinden sich in jedem Bereich gleich viele Fahrräder. Berechnen Sie die Anzahl der Fahrräder im Bereich A am Ende des folgenden Freitags. 2

Am Ende eines Dienstags wird die Verteilung durch $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 800 \\ b_0 \\ 1600 - b_0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Ausgehend davon soll die Entwicklung der Verteilung der Fahrräder genauer untersucht werden. Dazu wird der Vektor $\overrightarrow{v_0}$ in der Form $r \cdot \vec{x} + s \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dargestellt. Es gilt $M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M \cdot \vec{y} = 0{,}7 \cdot \vec{y}$ und $M \cdot \vec{z} = \vec{z}$.

c Zeigen Sie, dass für $n > 0$ gilt: $\overrightarrow{v_n} = s \cdot 0{,}7^n \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}$. 3

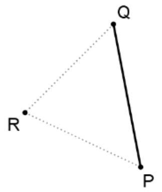
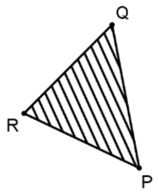
d Bestimmen Sie die Werte von s und t in Abhängigkeit von b_0. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Fahrräder im Bereich A am Ende des Tages n für $n > 0$ mit dem Term $1280 - \frac{4}{7} b_0 \cdot 0{,}7^n$ berechnet werden kann. 3

e Nach dem genannten Dienstag befinden sich am Ende jedes Tags mindestens 800 Fahrräder im Bereich A. Ermitteln Sie, wie viele Fahrräder am Ende des genannten Dienstags im Bereich B gewesen sein können. 4

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 21 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\varepsilon \cdot \overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{PR}$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$	2
	b	$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{PR}}{\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{PR}\rvert}$ liefert $\varphi \approx 56°$.	3
	c	I  II 	3
	d	Die Punkte S_σ liegen auf der Parallele zu PQ durch R. Damit stimmen die Dreiecke PQR und PQS_σ in der Seite PQ und der Länge der zugehörigen Höhe überein.	3
2	**a**	80 % der Fahrräder, die sich am Ende eines Tages im Bereich A befinden, sind auch am Ende des nächsten Tages in diesem Bereich. Jedes Fahrrad, das am Ende eines Tages im Bereich C ist, befindet sich am Ende des nächsten Tages in einem der drei Bereiche.	2
	b	$M^4 \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 800 \\ 800 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1170 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$	2
	c	$\overrightarrow{v_n} = M^n \cdot \left(r \cdot \vec{x} + s \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}\right) = r \cdot M^n \cdot \vec{x} + s \cdot M^n \cdot \vec{y} + t \cdot M^n \cdot \vec{z} = s \cdot 0{,}7^n \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}$	3
	d	$\overrightarrow{v_0} = r \cdot \vec{x} + s \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}$ liefert $s = \frac{1}{7} b_0$ und $t = 160$. Damit ergibt sich für Anzahl der Fahrräder im Bereich A am Ende des Tages n: $a_n = \frac{1}{7} b_0 \cdot 0{,}7^n \cdot (-4) + 160 \cdot 8 = 1280 - \frac{4}{7} b_0 \cdot 0{,}7^n$	3
	e	Für $b_0 = 0$ gilt $a_n = 1280 > 800$. Für $b_0 > 0$ wächst der Wert von a_n von Tag zu Tag. Folglich muss gelten $a_1 \geq 800 \Leftrightarrow 1280 - \frac{4}{7} b_0 \cdot 0{,}7 \geq 800 \Leftrightarrow b_0 \leq 1200$ Damit befanden sich am Ende des genannten Dienstags im Bereich B höchstens 1200 Fahrräder.	4
			25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I				I		X		
b	3					II			X	
c	3	II			II		I		X	
d	3	II			II	I	II		X	
2 a	2			I	I		I	X		
b	2			I		I		X		
c	3		II			III	II			X
d	3		II	II		II	II		X	
e	4	II	III	II		II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.