

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

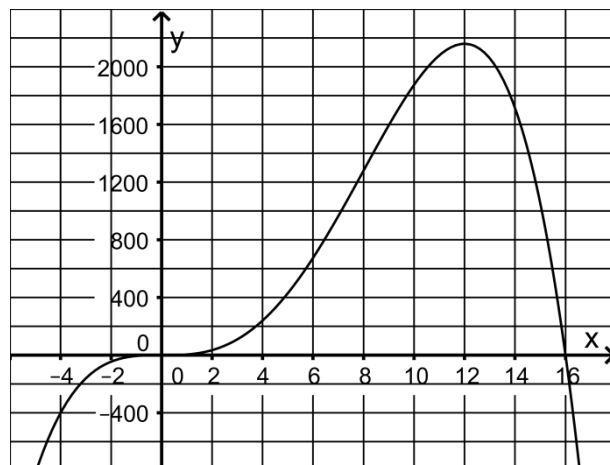
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3$.



BE

- 1 a** Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $(12 | 2160)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist und dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 | 0)$ parallel zur x -Achse verläuft. 5
- b** Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade g , die durch die beiden Wendepunkte des Graphen von f verläuft. Zeichnen Sie in die Abbildung eine Gerade ein, die parallel zu g ist und für $0 \leq x \leq 8$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat. 7

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Für jede reelle Zahl a ist eine in \mathbb{R} definierte Funktion h_a mit $h_a(x) = 5ax^2$ gegeben.		
c	Beschreiben Sie, wie der Graph von h_4 aus dem Graphen von h_3 erzeugt werden kann.	2
d	Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(4 f(4))$ auf dem Graphen von h_a liegt.	2
e	Es gibt genau einen positiven Wert von a , für den die Graphen von f und h_a genau zwei gemeinsame Punkte haben. Ermitteln Sie diesen Wert von a .	5
f	Die Gleichung $f(x) = h_{3,75}(x)$ hat genau die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 10$ und es gilt $\int_0^{10} (f(x) - h_{3,75}(x)) dx = 0$. Deuten Sie dies mit Bezug auf die Graphen von f und $h_{3,75}$.	3
2	Ein Unternehmen lagert Glycerin in einem Tank. Die momentane Änderungsrate des Tankinhalts kann für $0 \leq x \leq 20$ mithilfe der Funktion f beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate in Kilogramm pro Stunde. Zu Beobachtungsbeginn befinden sich im Tank 1200 kg Glycerin.	
a	Der Punkt $(4 240)$ liegt auf dem Graphen von f . Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punkts im Sachzusammenhang.	2
b	Beurteilen Sie die folgende Aussage: <i>Zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die größte Menge Glycerin im Tank enthalten.</i>	2
c	Bestimmen Sie grafisch die Zunahme des Tankinhalts zwischen den Zeitpunkten acht Stunden und zehn Stunden nach Beobachtungsbeginn.	3
d	Berechnen Sie, wie viel Glycerin 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank enthalten ist.	4
		35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$f'(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 15x^2$, $f''(x) = -\frac{15}{4}x^2 + 30x$ Wegen $f(12) = 2160$, $f'(12) = 0$ und $f''(12) = -180 < 0$ ist $(12 2160)$ ein Hochpunkt. Wegen $f'(0) = 0$ verläuft die beschriebene Tangente parallel zur x -Achse.	5

b		$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(-\frac{15}{4}x + 30\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$ Mit $f(0) = 0$ und $f(8) = 1280$ ergibt sich $y = 160x$.	7
c	Der Graph von h_4 kann aus dem Graphen von h_3 durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ erzeugt werden.		2
d	$h_a(4) = f(4) \Leftrightarrow 5a \cdot 16 = 240 \Leftrightarrow a = 3$		2
e	$f(x) = h_a(x) \Leftrightarrow -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3 = 5ax^2 \Leftrightarrow -\frac{5}{16}x^2 \cdot (x^2 - 16x + 16a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8 \pm \sqrt{64 - 16a}$ $64 - 16a = 0 \Leftrightarrow a = 4$		5
f	Die Graphen von f und $h_{3,75}$ haben genau drei gemeinsame Punkte und schließen zwei Flächenstücke gleichen Inhalts ein, die auf verschiedenen Seiten des Graphen von $h_{3,75}$ liegen.		3
2 a	Vier Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Änderungsrate des Tankinhalts 240 kg pro Stunde.		2
b	Die Aussage ist falsch, da die momentane Änderungsrate nach dem Zeitpunkt zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn zunächst positiv ist.		2
c		Der Tankinhalt nimmt um etwa $8 \cdot 2 \cdot 200 \text{ kg} = 3200 \text{ kg}$ zu.	3
d	$\int_0^{20} f(x) dx = \left[-\frac{1}{16}x^5 + \frac{5}{4}x^4 \right]_0^{20} = 0$, d. h. 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich im Tank 1200 kg Glycerin.		4
			35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I				I		X		
b	7		II		I	II			X	
c	2	II			I		I		X	
d	2		I			I		X		
e	5	III	III			II				X

f	3	III			II		III			X
2 a	2			I			I	X		
b	2	II		II	II		I		X	
c	3		I	I	I	I		X		
d	4	II		II		II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.