

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

Aufgaben für das Fach Mathematik

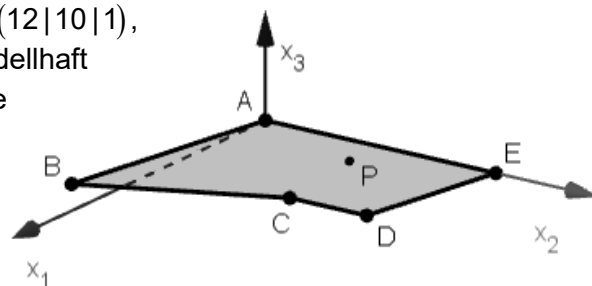
Kurzbeschreibung

| Anforderungsniveau | Prüfungsteil | Sachgebiet ¹ | digitales Hilfsmittel |
|--------------------|--------------|-------------------------|-----------------------|
| grundlegend | B | AG/LA (A2) | WTR |

1 Aufgabe

Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(18|0|1,5)$, $C(12|10|1)$, $D(12|15|1)$ und $E(0|15|0)$ stellen modellhaft die Eckpunkte einer ebenen Rasenfläche dar (vgl. Abbildung). Die Strecken \overline{AB} und \overline{DE} sind parallel.

Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



a Zeigen Sie, dass auch \overline{AE} und \overline{CD} parallel sind und dass \overline{CD} und \overline{DE} einen rechten Winkel einschließen.

b Ausgehend vom Ansatz $|\overline{AE}| \cdot |\overline{DE}| + \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| - |\overline{DE}|) \cdot (|\overline{AE}| - |\overline{CD}|)$ kann eine Größe berechnet werden, die im betrachteten Sachzusammenhang eine Rolle spielt. Nennen Sie diese Größe und erläutern Sie den gegebenen Ansatz.

Die Rasenfläche wird von einem Roboter gemäht, der die Form eines flachen Zylinders hat. Zur Beschreibung der Bewegung des Roboters wird der Mittelpunkt seiner kreisförmigen Unterseite betrachtet, die einen Radius von 20 cm hat. Es soll vereinfachend davon ausgegangen werden, dass dieser Mittelpunkt die Rasenfläche berührt.

Die Position des Mittelpunkts wird zunächst durch $P(3,6|8|0,3)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Die anschließende Bewegung des Mittelpunkts verläuft im Modell entlang der

BE

3

4

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

| | |
|---|----|
| Gerade g , die durch P verläuft und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Dabei bewegt sich der Roboter auf den durch \overline{BC} dargestellten Rand der Rasenfläche zu. | |
| c Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts Q , in dem g die Strecke \overline{BC} schneidet. (zur Kontrolle: $Q(15,6 4 1,3)$) | 5 |
| d Weisen Sie nach, dass der Winkel, unter dem sich der Roboter dem Rand der Rasenfläche nähert, etwa 41° groß ist. | 3 |
| e Der Roboter ändert seine Richtung, sobald der Rand seiner Unterseite den Rand der Rasenfläche erreicht. Der Punkt, der die Position des Mittelpunkts im Moment der Richtungsänderung darstellt, wird mit S bezeichnet. Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Skizze die Koordinaten von S . | 5 |
| | 20 |

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

| | BE |
|---|----|
| a $\overline{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \overline{CD}$, $\overline{CD} \circ \overline{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ | 3 |
| b Ausgehend vom gegebenen Ansatz kann der Inhalt der Rasenfläche berechnet werden. Im Modell kann die Fläche zerlegt werden in ein Rechteck mit den Seitenlängen $ \overline{AE} $ und $ \overline{DE} $ sowie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen $ \overline{AB} - \overline{DE} $ und $ \overline{AE} - \overline{CD} $ haben. | 4 |
| c $\begin{pmatrix} 3,6 \\ 8 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem: I $12\lambda + 6\mu = 14,4$ II $4\lambda + 10\mu = 8$ III $\lambda + 0,5\mu = 1,2$ Aus I und II ergibt sich $48\lambda = 48 \Leftrightarrow \lambda = 1$ und damit $Q(15,6 4 1,3)$. | 5 |
| d $\cos \varphi = \frac{\begin{vmatrix} -6 \\ 10 \\ -0,5 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{36 + 100 + 0,25} \cdot \sqrt{144 + 16 + 1}}$ liefert $\varphi \approx 41^\circ$. | 3 |

e

$$|\overline{QS}| = \frac{0,2}{\sin\varphi}$$

$$\begin{pmatrix} 15,6 \\ 4 \\ 1,3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{144+16+1}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot |\overline{QS}| \approx \begin{pmatrix} 15,3 \\ 4,1 \\ 1,3 \end{pmatrix}$$

5

20

3 Standardbezug

| Teilaufgabe | BE | allgemeine mathematische Kompetenzen | | | | | | Anforderungsbereich | | |
|-------------|----|--------------------------------------|-----|----|----|-----|----|---------------------|----|-----|
| | | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | K6 | I | II | III |
| a | 3 | I | | | | I | | X | | |
| b | 4 | I | | I | I | | I | X | | |
| c | 5 | | I | | | II | | | X | |
| d | 3 | | | I | | II | I | | X | |
| e | 5 | | III | II | II | III | II | | | X |

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.