Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	CAS

1 Aufgabe

	BE
Ein Unternehmen produziert Stahlkugeln für Kugellager. Erfahrungsgemäß sind 4 % aller Kugeln fehlerhaft.	
800 Kugeln werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.	
a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kugeln weniger als 30 fehlerhaft sind.	2
b Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert dieser Anzahl abweicht.	5
Eine fehlerhafte Kugel hat entweder einen Formfehler oder einen Größenfehler. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel einen Formfehler hat, beträgt 3 %. Alle Kugeln werden vor dem Verpacken geprüft. Dabei werden 95 % der Kugeln mit Formfehler, 98 % der Kugeln mit Größenfehler, aber auch 0,5 % der Kugeln ohne Fehler aussortiert.	
c Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.	4
d Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aussortierte Kugel keinen Formfehler hat.	3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

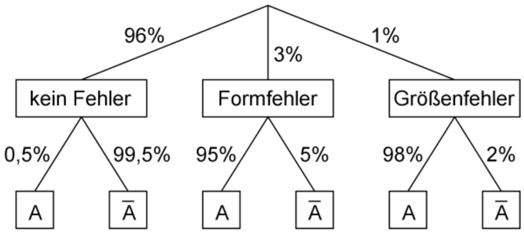
Aufgrund zunehmender Reklamationen wird vermutet, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln auf über 4 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu prüfen, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Kugeln beträgt höchstens 4 %." auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Kugeln getestet werden. Wenn das Ergebnis des Tests die Vermutung nicht entkräftet, soll die Produktion unterbrochen werden, um die Maschinen zu warten. Das Risiko, die Produktion irrtümlich zu unterbrechen, soll höchstens 3 % betragen.

e	Beschreiben Sie für diesen Test im Sachzusammenhang den Fehler zweiter Art. Geben Sie die Konsequenz an, die sich aus diesem Fehler für die Produktion ergeben würde.	3
f	Für den beschriebenen Test wird der Ablehnungsbereich betrachtet. Eine der beiden Grenzen dieses Ablehnungsbereichs ist größer als 0 und kleiner als 500; diese Grenze wird mit k bezeichnet. Zur Bestimmung des Werts von k soll die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0{,}04$ verwendet werden. Begründen Sie, dass keine der beiden Ungleichungen I und II den korrekten Wert von k liefert. I $P(Y \leq k) \leq 0{,}03$ II $P(Y \leq k) \geq 0{,}97$	4
g	Die Kugeln werden in Packungen verkauft. Ein Teil der verkauften Packungen wird zurückgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkaufte Packung zurückgegeben wird, beträgt 3 %. Dem Unternehmen entsteht pro Packung, die zurückgegeben wird, ein Verlust von 5,80 Euro; pro Packung, die nicht zurückgegeben wird, erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 8,30 Euro. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Unternehmen bei einem Verkauf von 200 Packungen einen Gesamtgewinn von mindestens 1500 Euro erzielt.	4
		25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	X: Anzahl der fehlerhaften Kugeln $P_{0,04}^{800}(X < 30) \approx 33\,\%$	2
b	Erwartungswert: $800 \cdot 0{,}04 = 32$ halbe Standardabweichung: $0{,}5 \cdot \sqrt{800 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 2{,}8$ $P_{0,04}^{800}(30 \leq X \leq 34) \approx 35\,\%$	5

c	 A: „Eine Kugel wird aussortiert.“	4
d	$\frac{0{,}01 \cdot 0{,}98 + 0{,}96 \cdot 0{,}005}{0.03 \cdot 0.95 + 0.01 \cdot 0.98 + 0.96 \cdot 0.005} \approx 34\,\%$	3
e	Fehler zweiter Art: Das Unternehmen geht irrtümlich davon aus, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln nicht auf über 4 % angestiegen ist. Konsequenz: Die Produktion wird nicht unterbrochen.	3
f	Unter der Annahme, dass die Nullhypothese zutrifft, soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln mindestens k beträgt, höchstens 3 % betragen bzw. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln kleiner als k ist, mindestens 97 %. Damit müsste in der Ungleichung I „ $Y \geq k$ “ anstelle von „ $Y \leq k$ “ und in der Ungleichung II „ $Y < k$ “ anstelle von „ $Y \leq k$ “ stehen.	4
g	Die Zufallsgröße, die die Anzahl z der zurückgegebenen Packungen beschreibt, wird mit Z bezeichnet. $(200 - z) \cdot 8{,}3 - z \cdot 5{,}8 \geq 1500 \Leftrightarrow z \leq 11$ Damit: $P_{0{,}03}^{200}(Z \leq 11) \approx 98\,\%$	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I		I	I	X		
b	5		II	II		I			X	
c	4				I	I	I	X		
d	3		II	II		I			X	
e	3	II					II		X	
f	4	III		II	II	II	III			X
g	4		III	I		II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.