

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

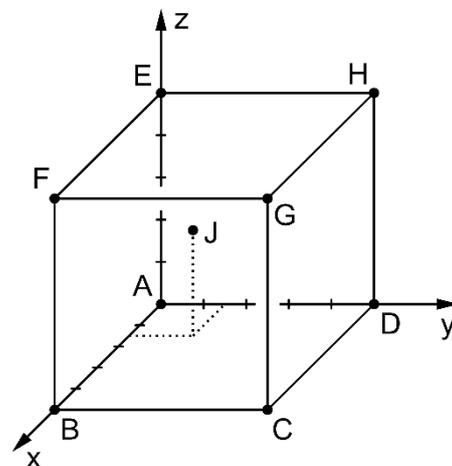
| Anforderungsniveau | Prüfungsteil | Sachgebiet ¹ | digitales Hilfsmittel |
|--------------------|--------------|-------------------------|-----------------------|
| erhöht | B | AG/LA (A1) | WTR |

1 Aufgabe

Ein Energieversorgungsunternehmen bietet drei verschiedene Stromtarife an: den Basistarif X, den Onlinetarif Y und den Ökotarif Z. Das Unternehmen ermöglicht es seinen Kunden, den gewählten Tarif monatlich zu wechseln.

Die Verteilungen der Kunden auf die drei Tarife können in einem dreidimensionalen Koordinatensystem durch Punkte $(x|y|z)$ dargestellt werden. Dabei ist x der Anteil der Kunden im Tarif X, y der Anteil im Tarif Y und z der Anteil im Tarif Z.

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(0|0|0)$, $B(1|0|0)$ und $D(0|1|0)$.



- a Betrachtet werden die Punkte $J(0,3|0,3|0,5)$ und $K(0,6|0,4|0)$. Zeichnen Sie K in die Abbildung ein; ergänzen Sie gestrichelte Hilfslinien so, dass die Lage dieses Punkts im Raum – wie die Lage von J – zu erkennen ist. Geben Sie an, welcher der beiden Punkte keine mögliche Verteilung der Kunden darstellt, und begründen Sie Ihre Angabe.

BE

2

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen: 3

- I Alle Punkte, die mögliche Verteilungen der Kunden darstellen, liegen innerhalb des abgebildeten Würfels oder auf dessen Oberfläche.
- II Alle Punkte, die innerhalb des abgebildeten Würfels oder auf dessen Oberfläche liegen, stellen mögliche Verteilungen der Kunden dar.

c Betrachtet werden alle möglichen Kundenverteilungen, bei denen genau 40 % der Kunden den Tarif X nutzen. Beschreiben Sie die Lage der zugehörigen Punkte im Koordinatensystem und begründen Sie Ihre Angabe. 3

Die Verteilung der Kunden auf die drei Tarife kann auch durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

dargestellt werden. Die Entwicklung der Kundenverteilung von einem Monat n zum nächsten lässt sich modellhaft durch die Gleichung $P \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 0,84 & 0,02 & 0,01 \\ 0,14 & 0,71 & 0,13 \\ 0,02 & 0,27 & 0,86 \end{pmatrix} \text{ beschreiben.}$$

d Stellen Sie die Entwicklung der Kundenverteilung von einem Monat n zum nächsten in einem Übergangdiagramm dar. 3

e Für den Anteil aller Kunden, die von einem Monat zum nächsten den Tarif wechseln, gibt es im Modell einen kleinsten und einen größten möglichen Wert. Geben Sie diese beiden Werte an und begründen Sie Ihre Angabe. 3

Die Lösungen der Gleichung $P \cdot \vec{v} = \vec{v}$ haben die Form $t \cdot \begin{pmatrix} 55 \\ 222 \\ 436 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Das Unternehmen verfolgt das Ziel, dass mindestens 60 % der Kunden den Tarif Z nutzen.

f Zeigen Sie auf der Grundlage des Modells, dass das Ziel langfristig erreicht wird. 2

g Um das Ziel schneller zu erreichen, wird eine Werbekampagne durchgeführt. Anschließend kann die Entwicklung der Kundenverteilung im Modell mithilfe einer Matrix $Q = \begin{pmatrix} 0,84 \cdot (1-q) & 0,02 & 0,01 \\ 0,14 \cdot (1-q) & 0,71 & 0,13 \\ 0,02 + r \cdot q & 0,27 & 0,86 \end{pmatrix}$ mit $q \in]0;1[$ dargestellt werden. Beschreiben Sie 4

die Bedeutung von q im Sachzusammenhang und bestimmen Sie den Wert von r .

h Die Kunden, die sich für den Tarif Z entscheiden, können zwischen den Varianten Z_1 (mit festem Verbrauchspreis) und Z_2 (mit flexiblem Verbrauchspreis) wählen. 5

Unter Berücksichtigung dessen wird die Verteilung der Kunden durch Vektoren der

Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dargestellt. Dabei sind z_1 und z_2 die Anteile der Kunden, die sich für Z_1

bzw. Z_2 entscheiden. Die Entwicklung der Kundenverteilung von einem Monat zum

nächsten wird in dem so erweiterten Modell durch die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 0,84 & 0,02 & 0,01 & 0,01 \\ 0,14 & 0,71 & 0,13 & 0,13 \\ 0,01 & 0,25 & 0,61 & 0,04 \\ 0,01 & 0,02 & 0,25 & 0,82 \end{pmatrix} \text{ beschrieben.}$$

Aus der Matrix R lässt sich die Matrix P herleiten. Zeigen Sie dies für die Einträge 0,27 und 0,86 von P. Begründen Sie, dass umgekehrt aus der Matrix P nicht die Matrix R hergeleitet werden kann.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

| | | BE |
|---|--|----|
| a | <p>J stellt keine mögliche Verteilung dar, da die Summe der Koordinaten nicht 1 ist.</p> | 2 |
| b | <p>Die Aussage I ist richtig, da der Anteil der Kunden in jedem der drei Tarife mindestens 0 und höchstens 1 beträgt. Die Aussage II ist falsch, da die Summe der drei Anteile 1 ist und damit der innerhalb des Würfels liegende Punkt J keine mögliche Verteilung darstellt.</p> | 3 |
| c | <p>Die Punkte bilden die Strecke mit den Endpunkten $(0,4 0,6 0)$ und $(0,4 0 0,6)$. Begründung: Die x-Koordinate der Punkte ist 0,4. Damit gilt $y + z = 0,6$ mit $0 \leq y \leq 0,6$.</p> | 3 |
| d | | 3 |
| e | <p>Der kleinste Anteil von $100\% - 86\% = 14\%$ ergibt sich dann, wenn alle Kunden den Tarif Z nutzen, der größte von $100\% - 71\% = 29\%$, wenn alle den Tarif Y nutzen.</p> | 3 |
| f | $\frac{436}{55+222+436} \approx 61\%$ | 2 |

| | | |
|----------|---|----|
| g | Durch die Kampagne haben die Anteile der Kunden im Tarif X, die von einem Monat zum nächsten diesen Tarif beibehalten bzw. in den Tarif Y wechseln, jeweils um den Anteil q abgenommen. $r \cdot q = 0,84q + 0,14q \Leftrightarrow r = 0,98$ | 4 |
| h | Auf der Grundlage von R ergibt sich für den <ul style="list-style-type: none"> ◆ Wechsel aus Y in Z: $0,25y + 0,02y = 0,27y$; ◆ Verbleib in Z: $0,61z_1 + 0,04z_2 + 0,25z_1 + 0,82z_2 = 0,86 \cdot (z_1 + z_2) = 0,86z$. Dies entspricht jeweils dem durch P beschriebenen Wechselverhalten. Dagegen lässt sich aus der Matrix P nicht die Matrix R herleiten, da sich beispielsweise die Kunden, die von einem Monat zum nächsten vom Tarif X zum Tarif Z wechseln, nicht gleichmäßig auf die Varianten Z_1 und Z_2 verteilen müssten. | 5 |
| | | 25 |

3 Standardbezug

| Teilaufgabe | BE | allgemeine mathematische Kompetenzen | | | | | | Anforderungsbereich | | |
|-------------|----|--------------------------------------|-----|----|----|----|----|---------------------|----|-----|
| | | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | K6 | I | II | III |
| a | 2 | I | | | I | | | X | | |
| b | 3 | II | | I | I | | I | | X | |
| c | 3 | III | | II | | | II | | | X |
| d | 3 | | | I | I | | I | X | | |
| e | 3 | II | II | II | | | I | | X | |
| f | 2 | | II | II | | | I | | X | |
| g | 4 | II | | II | II | | I | | X | |
| h | 5 | III | III | II | II | | II | | | X |

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.