

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2021

## Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	CAS

### 1 Aufgabe

1 Um die Ausbreitung der Europäischen Wildkatze in Deutschland zu unterstützen, haben Tierschützer zwischen den Wäldern, in denen Wildkatzen leben, sogenannte grüne Korridore aus Büschen angelegt. Diese Korridore ermöglichen eine Wanderbewegung der Wildkatzen zwischen den Wäldern.

Zunächst wird das Wanderverhalten der Wildkatzen zwischen den Wäldern A, B und C betrachtet. Die Verteilung der Wildkatzen auf die drei Wälder kann durch

Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  dargestellt werden, wobei a, b und c die Anzahlen der

Wildkatzen in den Wäldern A, B bzw. C angeben. Das Wanderverhalten von einem Jahr n zum nächsten wird modellhaft durch die Gleichung  $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$  mit

$M = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,1 & 0,07 \\ 0,28 & 0,6 & 0,18 \\ 0,27 & 0,3 & 0,75 \end{pmatrix}$  beschrieben.

a Stellen Sie das beschriebene Wanderverhalten in einem Übergangendiagramm dar.

Zu Beginn der Beobachtung leben 100 Wildkatzen im Wald A, 110 im Wald B und 425 im Wald C.

BE

3

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),  
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- b** Ermitteln Sie, wie sich die Wildkatzen drei Jahre nach Beobachtungsbeginn auf die Wälder verteilen. 2
- c** Bestimmen Sie die exakten Einträge der Grenzmatrix  $G = \lim_{n \rightarrow \infty} (M^n)$ . Interpretieren Sie diese Einträge im Sachzusammenhang. 4
- d** Aufgrund von Tierschutzmaßnahmen im Wald A hat sich der Anteil der Wildkatzen, die von einem Jahr zum nächsten dort verbleiben, auf 64 % erhöht. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Maßnahmen weder auf die Gesamtzahl der Wildkatzen in den drei Wäldern noch auf das Wanderverhalten der Tiere in den Wäldern B und C Einfluss hatten. Ermitteln Sie, wie groß die Abwanderungsraten aus dem Wald A sein müssten, damit sich eine Verteilung der Wildkatzen, bei der 200 Tiere im Wald B leben, nicht mehr ändert. 4

Zu Beginn eines Jahres wird das Wandergebiet der Wildkatzen durch weitere grüne Korridore um den Wald D erweitert. Die Verteilung der Wildkatzen auf die vier Wälder

der wird im entsprechend erweiterten Modell durch Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$  beschrieben,

ihr Wanderverhalten durch die Matrix  $N = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,05 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,65 & 0,15 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,55 \end{pmatrix}$ . Unmittelbar

nach der Erweiterung des Wandergebiets um den Wald D leben 115 Wildkatzen im Wald A, 200 im Wald B, 320 im Wald C und 70 im Wald D.

Um die Ausbreitung der Wildkatzen weiter zu fördern, werden am Ende jedes Jahres in jedem der vier Wälder zwei zusätzliche Wildkatzen ausgesetzt.

- e** Bestimmen Sie die Verteilung der Wildkatzen zwei Jahre nach der Erweiterung. 3
- f** Geben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms 3

$$N^3 \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + (N^2 + N + E) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ an, wobei } E \text{ die passende Einheitsmatrix ist. Be-}$$

gründen Sie Ihre Angabe.

- 2** In einem abgeschlossenen Waldgebiet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Wildkatzen untersucht. Die Zusammensetzung der Population wird durch Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} w \\ j \\ e \end{pmatrix}$  dargestellt; dabei ist  $w$  die Anzahl der Welpen (bis sechs Monate alt),  $j$  die Anzahl der Jungtiere (mehr als sechs Monate bis zwölf Monate alt) und  $e$  die Anzahl der erwachsenen Tiere (mehr als zwölf Monate alt). Die Entwicklung der Population von einem Halbjahr  $r$  zum nächsten kann modellhaft durch die

Gleichung  $\overline{v}_{r+1} = P \cdot \overline{v}_r$  mit  $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$  beschrieben werden. Zu Beginn der

Untersuchung befinden sich im Waldgebiet ausschließlich acht Jungtiere und acht erwachsene Tiere.

**a** Zeigen Sie, dass das Modell zur Beschreibung der Entwicklung der Population vor Beginn der Untersuchung nicht geeignet ist. 2

**b** Gegeben ist die folgende Lösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang: 4

$$f(r) = (1 \ 0 \ 0) \cdot \left( P^r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$

Für  $r \geq 4$  gilt  $\frac{f(r+1)}{f(r)} \approx 1,1$ .

$k \cdot 1,1^4 = f(4)$  liefert  $k \approx 32$ , d. h.  $f(r) \approx 32 \cdot 1,1^r$  für alle  $r \geq 4$ .

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und beschreiben Sie die Bedeutung der Zahl 1,1.

25

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a		3
b	$M^3 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 425 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 82 \\ 204 \\ 349 \end{pmatrix}$	2
c	$M \cdot G = G \text{ mit } G = \begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ 1-x-y & 1-x-y & 1-x-y \end{pmatrix} \text{ liefert } x = \frac{230}{1783} \text{ und } y = \frac{593}{1783}.$ <p>Langfristig werden also etwa 13 % der Tiere im Wald A, etwa 33 % im Wald B und etwa 54 % im Wald C leben.</p>	4

	<p><b>d</b> <math>\begin{pmatrix} 0,64 &amp; 0,1 &amp; 0,07 \\ z &amp; 0,6 &amp; 0,18 \\ 0,36-z &amp; 0,3 &amp; 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 200 \\ 435-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 200 \\ 435-a \end{pmatrix}</math> liefert <math>z \approx 0,19</math>, d. h. die Abwanderungsrate von A nach B müsste etwa 19% betragen, die von A nach C etwa 17%.</p>	4
	<p><b>e</b> <math>\vec{v}_2 = N \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 136 \\ 151 \\ 247 \\ 187 \end{pmatrix}</math></p>	3
	<p><b>f</b> Mit dem Term lässt sich die die Verteilung der Wildkatzen drei Jahre nach der Erweiterung bestimmen.</p> <p>Begründung: <math>\vec{v}_3 = N \cdot \vec{v}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = N \cdot \left( N \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}</math></p> $= N^3 \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + (N^2 + N + E) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	3
2	<p><b>a</b> <math>P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 160 \\ -80 \end{pmatrix}</math></p> <p>Eine negative Anzahl von Tieren ist im Sachzusammenhang nicht sinnvoll.</p>	2
	<p><b>b</b> Die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Welpen kann ab dem Zeitpunkt vier Halbjahre nach Beginn der Untersuchung näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm.</p> <p>1,1 ist der Wachstumsfaktor.</p>	4
		25

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I	I		I	X		
b	2			I		I		X		
c	4			II		II	I		X	
d	4	II	III	II		II	II			X
e	3		II	II		II	II		X	
f	3	II		II	II	II	I		X	

2 a	2		II	II		II	I		X	
b	4	II		III	III		II			X

## 4 Bewertungshinweise

---

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.