Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{10}x \cdot (3-x) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$.

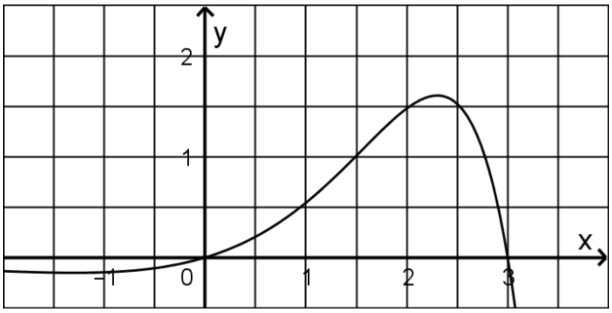


Abb. 1

1 Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -\frac{1}{10} \cdot (x^2 - x - 3) \cdot e^x$.

a Geben Sie die Nullstellen von f an und berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f. 4

b Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für $x \to -\infty$ und begründen Sie Ihre Angabe anhand des Funktionsterms von f. 2

c Eine der Tangenten an den Graphen von f verläuft durch den Punkt $\left(0 \mid \frac{1}{2}\right)$. Zeichnen Sie diese Tangente in die Abbildung 1 ein und geben Sie eine Gleichung der eingezeichneten Gerade an. 3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

d Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels des Graphen von f im Koordinatenursprung.	2
e Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{1}{10} \cdot \left(x^2 - 5x + 5\right) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.	4
f Deuten Sie das Integral $\int_0^3 f(x)\,dx$ geometrisch und berechnen Sie seinen Wert.	3
g Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine positive Zahl a gibt, für die $\int_0^a f(x)\,dx = 0$ gilt.	3
h Begründen Sie ohne Verwendung des Funktionsterms von F, dass der Graph jeder Stammfunktion von f einen Tiefpunkt hat, der auf der y-Achse liegt. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion, für die sich dieser Tiefpunkt im Koordinatenursprung befindet.	5

2 Für jeden Wert von $b \in \mathbb{R}_0^+$ ist eine Funktion g_b mit $g_b(x) = \frac{1}{10} x \cdot (x - b) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Für die erste Ableitungsfunktion von g_b gilt $g_b'(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(x^2 + (2 - b) \cdot x - b\right) \cdot e^x$. Die Abbildung 2 zeigt die Graphen von g_2 und g_3.

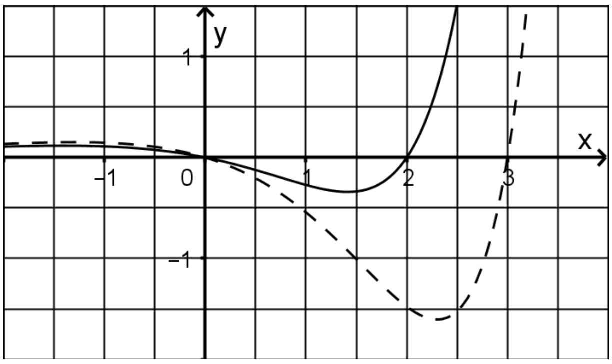
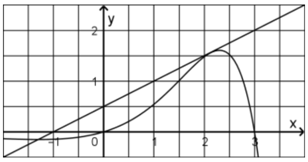


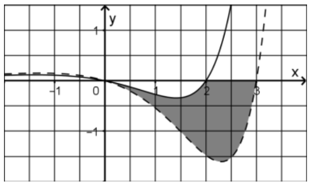
Abb. 2

a Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Graph von g_b und der Graph von f eine Figur einschließen, die bezüglich der x-Achse symmetrisch ist.	2
b Für jeden Wert von b haben die Graphen von g_b und g_b' einen gemeinsamen Punkt. Berechnen Sie die x-Koordinate dieses Punkts.	3
c Für jeden Wert von b schließen die Graphen von g_b und g_{b+1} im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück für $b = 2$ in der Abbildung 2. Für einen Wert von b beträgt der Inhalt des Flächenstücks 5; geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Wert von b bestimmt werden könnte.	4
	35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	Nullstellen: 0 und 3 Hochpunkt: Für $x \geq 0$ liefert $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$: $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\approx 2{,}3$ $y=f\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\approx 1{,}6$	4
	b	Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ nähert sich der Graph von f für $x\to-\infty$ asymptotisch der x-Achse.	2
	c	 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	3
	d	$\tan\alpha=f'(0)=0{,}3$, d. h. $\alpha\approx 16{,}7°$	2
	e	$F'(x)=-\frac{1}{10}\cdot(2x-5)\cdot e^x-\frac{1}{10}\cdot\left(x^2-5x+5\right)\cdot e^x=-\frac{1}{10}\cdot\left(x^2-3x\right)\cdot e^x$ $=\frac{1}{10}x\cdot(3-x)\cdot e^x$	4
	f	Der Wert des Integrals ist der Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f für $0\leq x\leq 3$ mit der x-Achse einschließt. $\int_0^3 f(x)\,dx=F(3)-F(0)=\frac{1}{10}\cdot\left(e^3+5\right)\approx 2{,}5$	3
	g	Für $x>3$ sind die Funktionswerte von f negativ und es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. Betrachtet man die Flächenstücke, die der Graph von f im Integrationsbereich mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x=a$ einschließt, so gibt es folglich einen Wert von a, für den der Inhalt des oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücks ebenso groß ist wie der Inhalt des unterhalb liegenden Flächenstücks.	3
	h	Die Terme aller Stammfunktionen H von f haben die Form $H(x)=F(x)+c$. Es gilt $H'(x)=f(x)$ und damit in einer Umgebung von $x=0$: $H'(0)=0$, $H'(x)<0$ für $x<0$ und $H'(x)>0$ für $x>0$. $H(0)=0\Leftrightarrow F(0)+c=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$	5
2	a	$g_b(x)=-f(x)\Leftrightarrow x-b=-(3-x)\Leftrightarrow b=3$	2
	b	$g_b(x)=g_b'(x)\Leftrightarrow x^2-bx=x^2+2x-bx-b\Leftrightarrow x=\frac{b}{2}$	3

c	 $\left|\int_0^{b+1} g_{b+1}(x)\,dx\right| - \left|\int_0^{b} g_b(x)\,dx\right| = 5$	4
		35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4				I	I		X		
b	2				I	I	II		X	
c	3				I	I		X		
d	2					I		X		
e	4					II			X	
f	3					I	I	X		
g	3	II			II		II		X	
h	5	II	III			II				X
2 a	2	II	II			II			X	
b	3		I			II			X	
c	4	II	III		I	II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.