

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

### 1 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{10}x \cdot (3-x) \cdot e^x$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

<b>1 a</b> Geben Sie die Nullstellen von $f$ an. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von $f$ im ersten Quadranten einen Wendepunkt hat.	4
<b>b</b> Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von $f$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ .	2
<b>c</b> Es gibt zwei Tangenten an den Graphen von $f$ , deren Steigung $\frac{3e}{10}$ ist. Berechnen Sie für eine dieser Tangenten die $y$ -Koordinate des Schnittpunkts mit der $y$ -Achse sowie die Größe des Winkels, unter dem sie die $y$ -Achse schneidet.	5
Die Funktion $F$ ist eine Stammfunktion von $f$ .	
<b>d</b> Berechnen Sie den Wert des Terms $F(3) - F(0)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.	2
<b>e</b> Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine positive Zahl $a$ gibt, für die $\int_0^a f(x) dx = 0$ gilt.	3
<b>f</b> Begründen Sie ohne Integration, dass der Graph jeder Stammfunktion von $f$ einen Tiefpunkt hat, der auf der $y$ -Achse liegt.	3
<b>g</b> Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von $f$ , deren Graph einen Tiefpunkt im Koordinatenursprung hat.	3

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),  
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Für jeden Wert von  $b \in \mathbb{R}_0^+$  ist eine Funktion  $g_b$  mit

$$g_b(x) = \frac{1}{10} x \cdot (x - b) \cdot e^x$$

und  $x \in \mathbb{R}$  gegeben. Die Abbildung 2 zeigt die Graphen von  $g_2$ ,  $g_3$  und  $g_4$ .

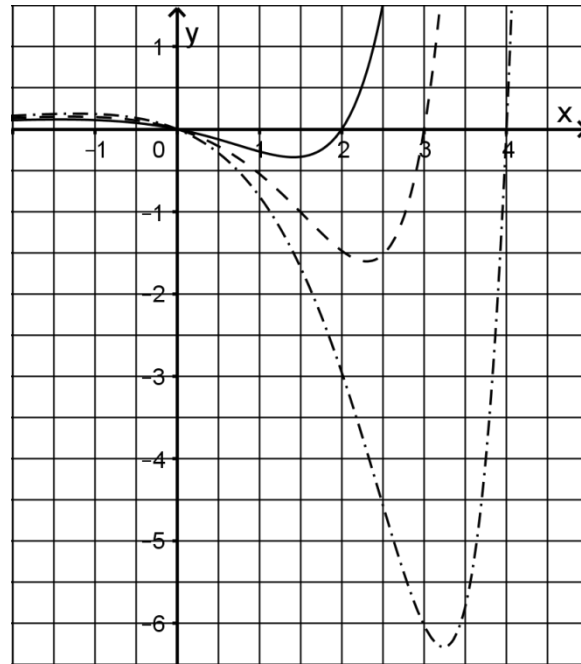


Abb. 2

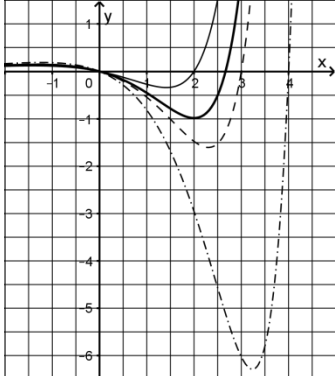
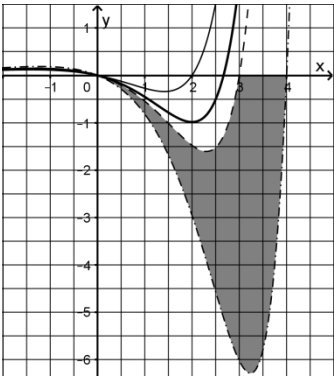
- a** Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von  $b$ , für den der Graph von  $g_b$  und der Graph von  $f$  eine Figur bilden, die bezüglich der  $x$ -Achse symmetrisch ist. 2
- b** Berechnen Sie denjenigen Wert von  $b$ , für den der Tiefpunkt des Graphen von  $g_b$  die  $x$ -Koordinate 2 hat, und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen von  $g_b$  in der Abbildung 2. 3
- c** Für jeden Wert von  $b$  haben die Graphen von  $g_b$  und  $g'_b$  einen gemeinsamen Punkt. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punkts. 3
- d** Für jeden Wert von  $b$  schließen die Graphen von  $g_b$  und  $g_{b+1}$  im vierten Quadranten mit der  $x$ -Achse ein Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück für  $b=3$  in der Abbildung 2. Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $b$ , für den der Inhalt des Flächenstücks  $\frac{1}{10} \cdot (e^3 + 1)$  beträgt. 5

35

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	Nullstellen: 0 und 3 Wendepunkt: Für $x \geq 0$ gilt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ $f'''(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}) \neq 0, f(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}) > 0$	4

	<p><b>b</b> Für <math>x \rightarrow -\infty</math> nähert sich der Graph von <math>f</math> asymptotisch der <math>x</math>-Achse, für <math>x \rightarrow +\infty</math> entfernt er sich von dieser im vierten Quadranten beliebig weit.</p>	2
	<p><b>c</b> Eine Lösung der Gleichung <math>f'(x) = \frac{3e}{10}</math> ist <math>x = 1</math>. Damit ergibt sich für die gesuchte <math>y</math>-Koordinate <math>f(1) - \frac{3e}{10} = -\frac{e}{10}</math>.  <math>\tan \alpha = \frac{10}{3e}</math>, d. h. <math>\alpha \approx 50,8^\circ</math></p>	5
	<p><b>d</b> <math>F(3) - F(0) = \frac{1}{10} \cdot (e^3 + 5) \approx 2,5</math>                  Der Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von <math>f</math> für <math>0 \leq x \leq 3</math> mit der <math>x</math>-Achse einschließt, beträgt etwa 2,5.</p>	2
	<p><b>e</b> Für <math>x &gt; 3</math> sind die Funktionswerte von <math>f</math> negativ und es gilt <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty</math>. Betrachtet man die Flächenstücke, die der Graph von <math>f</math> im Integrationsbereich mit der <math>x</math>-Achse und der Gerade mit der Gleichung <math>x = a</math> einschließt, so gibt es folglich einen Wert von <math>a</math>, für den der Inhalt des oberhalb der <math>x</math>-Achse liegenden Flächenstücks ebenso groß ist wie der Inhalt des unterhalb liegenden Flächenstücks.</p>	3
	<p><b>f</b> Die Terme aller Stammfunktionen <math>H</math> von <math>f</math> haben die Form <math>H(x) = F(x) + c</math>. Es gilt <math>H'(x) = f(x)</math> und damit in einer Umgebung von <math>x = 0</math>: <math>H'(0) = 0</math>, <math>H'(x) &lt; 0</math> für <math>x &lt; 0</math> und <math>H'(x) &gt; 0</math> für <math>x &gt; 0</math>.</p>	3
	<p><b>g</b> <math>H(x) = -\frac{1}{10} \cdot (x^2 - 5x + 5) \cdot e^x + c</math>, <math>H(0) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}</math></p>	3
2	<p><b>a</b> <math>g_b(x) = -f(x) \Leftrightarrow b = 3</math></p>	2
	<p><b>b</b> <math>g'_b(2) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{8}{3}</math></p> 	3
	<p><b>c</b> <math>g_b(x) = g'_b(x) \Leftrightarrow x = \frac{b}{2}</math>, <math>y = g_b\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{1}{40} b^2 e^{\frac{b}{2}}</math></p>	3
	<p><b>d</b></p>  <p><math>\left  \int_0^{b+1} g_{b+1}(x) dx \right  - \left  \int_0^b g_b(x) dx \right  = \frac{1}{10} \cdot (e^3 + 1) \Leftrightarrow b = 2</math></p>	5
		35

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4				I	I		X		
b	2				I	I	II		X	
c	5	II	II			II			X	
d	2	II				I	I		X	
e	3	II			II		II		X	
f	3	II	III			II				X
g	3		I			I	I	X		
2 a	2	II	II			I			X	
b	3		I		I	I		X		
c	3		I			II			X	
d	5	II	III		I	II				X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.