Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A2)	CAS

1 Aufgabe

	BE
1 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1\|1\|2)$, $B(-1\|5\|2)$ und $C(-4\|3\|3)$ gegeben. Das Dreieck ABC stellt modellhaft ein Sonnensegel dar, das zwischen drei Masten gespannt ist. Der horizontale Untergrund wird durch die x_1x_2-Ebene beschrieben. Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.	
a Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, die das Dreieck ABC enthält, in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $x_1 + 3x_3 = 5$)*	3
b Damit Regenwasser gut abfließen kann, soll das Segel so gespannt sein, dass es eine Neigung von mindestens 30 % aufweist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.	3
c Die Seite des Segels, die parallel zum Untergrund verläuft, ist zum betrachteten Zeitpunkt 4 % länger als vor dem ersten Aufspannen des Segels. Berechnen Sie die Länge, die diese Seite vor dem vor dem ersten Aufspannen hatte.	3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Auf das Segel trifft Sonnenlicht. Die zu den beiden unteren Eckpunkten des Segels gehörenden Eckpunkte seines Schattens auf dem Untergrund werden durch $A'(-5\,|\,3\,|\,0)$ und $B'(-5\,|\,7\,|\,0)$ dargestellt.

d Ermitteln Sie im Modell die Koordinaten des Schattens des oberen Eckpunkts des Segels. 4

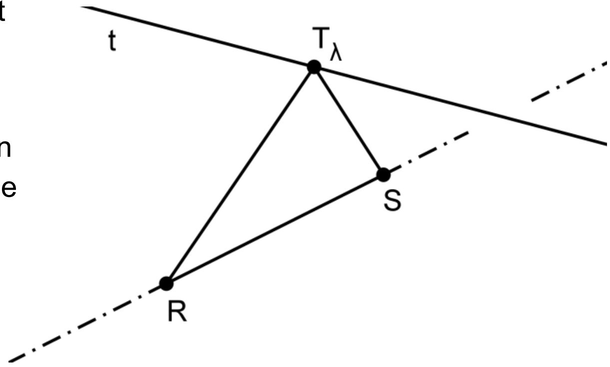
(zur Kontrolle: $(-10\,|\,6\,|\,0)$)

e Stellen Sie den Schatten des Segels in der x_1x_2-Ebene grafisch dar und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt. 3

2 Die Abbildung zeigt die Gerade $t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, die die Gerade durch die Punkte $R(-1\,|\,2\,|\,3)$ und $S(-1\,|\,4\,|\,3)$ nicht schneidet. Zu jedem Wert von λ gehört ein Punkt T_λ von t. Jeder Punkt T_λ hat von R und S den gleichen Abstand. 4

Unter den Dreiecken RST_λ hat eines den kleinsten Flächeninhalt. Begründen Sie, dass der zugehörige Wert von λ die Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ -4+3\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

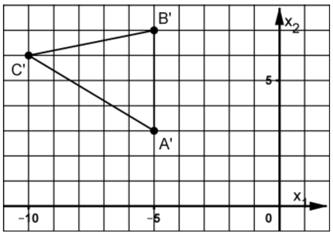


20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	$\overrightarrow{AB} \circ \vec{n} = 0 \wedge \overrightarrow{AC} \circ \vec{n} = 0$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene. Damit hat die Gleichung der Ebene die Form $x_1 + 3x_3 = c$. Da A in der Ebene liegt, gilt $c = 5$.	3
	b	Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\cos\alpha = \frac{\lvert\vec{n}\circ\vec{m}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{m}\rvert}$ ergibt sich $\tan\alpha = \frac{1}{3} > 30\,\%$, die Bedingung ist also erfüllt.	3
	c	$\frac{1}{1.04} \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \frac{4}{1.04} \approx 3{,}85$, d. h. die betrachtete Seite war etwa 3,85 m lang.	3

d	Der gesuchte Punkt hat die x_3 -Koordinate 0. Das Sonnenlicht kann durch den Vektor $\overrightarrow{AA'}$ beschrieben werden. $\overrightarrow{OC} + \mu \cdot \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $x_1 = -10$ und $x_2 = 6$.	4
e	 $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$, d. h. der Flächeninhalt des Schattens beträgt $10\,m^2$.	3
2	Die Dreiecke RST_λ sind gleichschenklig mit der Basis $\overline{RS}$. Bezeichnet man den Mittelpunkt $(-1\,\|\,3\,\|\,3)$ von $\overline{RS}$ mit M, so ist ihr Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot \left\|\overline{RS}\right\| \cdot \left\|\overline{MT_\lambda}\right\|$. Dieser ist genau dann am kleinsten, wenn $\left\|\overline{MT_\lambda}\right\|$ am kleinsten ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\overline{MT_\lambda}$ senkrecht zu t steht, also $\overrightarrow{MT_\lambda}$ senkrecht zum Richtungsvektor von t.	4
		20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3					II			X	
b	3		II	I		II			X	
c	3			I		I	I	X		
d	4		II	II		I	I		X	
e	3			I	I	I		X		
2	4	III	III		II	II	III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.