

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A1)	CAS

1 Aufgabe

Betrachtet wird die Entwicklung von Populationen weiblicher Säugetiere derselben Art. Nur im ersten Lebensjahr sind die Tiere unreif, im zweiten Lebensjahr werden sie als jung, anschließend als alt bezeichnet. Die Zusammensetzungen solcher Populationen

können durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix}$ dargestellt werden, wobei u die Anzahl der unreifen, j die Anzahl der jungen und a die Anzahl der alten Säugetiere bezeichnet.

Die Entwicklung einer solchen Population von einem Jahr n zum nächsten kann modellhaft durch die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$ mit $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,7 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Zu

Beobachtungsbeginn besteht die Population aus 24 unreifen, 46 jungen und 6 alten Tieren.

- | | |
|---|---|
| a Beschreiben Sie die Bedeutung der Einträge 2 und 0,8 von L im Sachzusammenhang. | 2 |
| b Zeigen Sie, dass das Modell zur Beschreibung der Entwicklung der Population vor Beobachtungsbeginn nicht geeignet ist. | 2 |
| c Bei bestimmten Zusammensetzungen der Population wachsen die Anzahlen der Tiere in den drei Entwicklungsstadien von einem Jahr zum nächsten mit dem gleichen Fak- | 3 |

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

tor. Bestimmen Sie diesen Faktor und beschreiben Sie diese Zusammensetzungen.

Die Entwicklung einer zweiten Population von einem Frühjahr n zum nächsten kann durch die Gleichung $\vec{w}_{n+1} = N \cdot M \cdot \vec{w}_n$ dargestellt werden. Dabei beschreibt

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ die Entwicklung vom Frühjahr zum folgenden Herbst und

$N = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ mit $0 < k < 1$ die Entwicklung vom Herbst zum folgenden Frühjahr. Zu

Beobachtungsbeginn in einem Frühjahr besteht diese zweite Population aus 225 unreifen, 225 jungen und 225 alten Tieren.

- | | |
|---|---|
| d Geben Sie den Eintrag in der ersten Zeile und dritten Spalte der Matrix $N \cdot M$ an und beschreiben Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang. Begründen Sie den Wert dieses Eintrags mit der Entwicklung von Frühjahr bis Herbst und der Entwicklung von Herbst bis Frühjahr. | 3 |
| e Bestimmen Sie für $k = \frac{4}{5}$ die Zusammensetzung der zweiten Population zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn. | 2 |
| f Für einen Wert von k gibt es Zusammensetzungen der zweiten Population, die sich von einem Frühjahr zum nächsten nicht verändern. Bestimmen Sie diesen Wert von k sowie eine solche Zusammensetzung. | 3 |
| g Die zweite Population bestand eineinhalb Jahre vor Beobachtungsbeginn aus 1053 Tieren. Bestimmen Sie den Wert von k und die Zusammensetzung der zweiten Population eineinhalb Jahre vor Beobachtungsbeginn. | 5 |

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Jährlich bringen die alten Tiere im Mittel zwei weibliche Nachkommen zur Welt. 80 % der jungen Tiere überleben das zweite Lebensjahr.	2
b	$L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 46 \\ 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 61 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$; eine negative Anzahl von Tieren ist im Sachzusammenhang nicht sinnvoll.	2

c	$L \cdot \begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix}$ liefert $b = 1,5$ und unter Berücksichtigung des Sachzusammenhangs $\begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Bei den Zusammensetzungen ist das Verhältnis der Anzahlen der unreifen, jungen und alten Tiere 2:1:1.	3
d	Eintrag: $2k$ Bedeutung: Pro altem Tier gibt es von einem Frühjahr zum nächsten $2k$ zusätzliche unreife Tiere. Begründung: Von Frühjahr bis Herbst bringen die alten Tiere im Mittel zwei weibliche Nachkommen zur Welt, von denen der Anteil k bis zum folgenden Frühjahr überlebt.	3
e	Für $k = \frac{4}{5}$ gilt: $(N \cdot M)^2 \cdot \begin{pmatrix} 225 \\ 225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 \\ 325 \end{pmatrix}$	2
f	$N \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix}$ liefert $k = \frac{3}{11}$ und $\begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}j \\ j \\ \frac{9}{4}j \end{pmatrix}$, d. h. eine solche Zusammensetzung besteht aus 150 unreifen, 100 jungen und 225 alten Tieren.	3
g	$N \cdot M \cdot N \cdot \begin{pmatrix} u \\ j \\ 1053 - u - j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 225 \\ 225 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \wedge u = 675 \wedge j = 216$. Damit ergibt sich $a = 162$.	5
		20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I	I		I	X		
b	2		I	I		I		X		
c	3		II	II		II			X	
d	3	II	II	II		I	II		X	
e	2			I		I		X		
f	3		II	II		II			X	
g	5	II	III	II		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.