Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

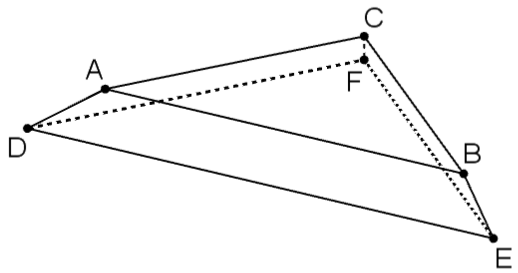
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

BE

In einem Koordinatensystem wird der abgebildete Körper ABCDEF mit $A(0|10|1)$, $B(10|20|1)$, $C(0|20|1)$, $D(0|7|0)$ und $F(0|20|0)$ betrachtet. Die beiden Seitenflächen ACFD und BEFC stehen senkrecht zur x_1x_2-Ebene.



1 a A, B und D liegen in der Ebene H. Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $x_1 - x_2 + 3x_3 + 7 = 0$)

b Begründen Sie, dass die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl in der x_1x_2-Ebene als auch in der Ebene H liegt. 2

Der Punkt E liegt auf i, wobei der Abstand von E zu F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F.

c Ermitteln Sie die Koordinaten von E. 5

d Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Vierecke ACFD und BEFC den gleichen Flächeninhalt haben. 3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Der Körper ABCDEF stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht, das Viereck ADEB die Vorderseite des Podests und der Punkt D deren untere linke Ecke. Die x_1x_2-Ebene beschreibt den horizontalen Boden der Bühne. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.	
a Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt.	3
b Die Position eines Scheinwerfers kann im Modell durch den Punkt $(5\,\vert\,-3\,\vert\,z)$ dargestellt werden. Vom Scheinwerfer ausgehendes Licht trifft an der unteren linken Ecke der Vorderseite des Podests unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auf. Ermitteln Sie die Höhe des Scheinwerfers über dem Boden der Bühne.	4
c Die Position eines zweiten Scheinwerfers lässt sich im Modell durch den Punkt $P(2\,\vert\,4\,\vert\,8)$ beschreiben. Die Gerade mit der Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\10\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\mu\in\mathbb{R}$ schneidet die Ebene mit der Gleichung $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0$ im Punkt $Q(-2\,\vert\,8\,\vert\,1)$. Es gilt $\left\vert\overline{PQ}\right\vert=9$. Treffen Sie auf der Grundlage dieser Informationen eine Aussage über den Abstand des zweiten Scheinwerfers von der Vorderkante der Deckfläche des Podests. Begründen Sie Ihre Aussage ohne zu rechnen.	4
	25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Das aus $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\10\\1\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$ mit $m,n\in\mathbb{R}$ resultierende Gleichungssystem I $x_1=10m$ II $x_2=10+10m-3n$ III $x_3=1-n$ liefert $x_2=10+x_1+3x_3-3\Leftrightarrow x_1-x_2+3x_3+7=0$.	4
	b	Für alle Punkte von i gilt $x_3=0$, d. h. i liegt in der x_1x_2-Ebene. Wegen $\lambda-(7+\lambda)+7=0$ liegt i auch in H.	2

	c	Für $\lambda \neq 0$ gilt: $\left\lvert \begin{pmatrix} \lambda \\ 7+\lambda \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert = \overline{DF} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + (\lambda - 13)^2} = 13 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda^2 - 26\lambda + 13^2 = 13^2$ $\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 26\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda \cdot (\lambda - 13) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 13$ Damit: $E(13 \mid 20 \mid 0)$	5
	d	Grund- und Deckfläche des Körpers sind parallel zur x_1x_2-Ebene, die beiden Vierecke stehen senkrecht dazu, sind also Trapeze mit gleicher Höhe. Da zudem die Punkte A, B, D und E in einer Ebene liegen, gilt wegen $\overline{DF} = \overline{EF}$ auch $\overline{AC} = \overline{BC}$.	3
2	a	$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $\frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$, d. h. der Flächeninhalt beträgt $50\,m^2$.	3
	b	$\tan 47° = \frac{z}{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert} = \frac{z}{\sqrt{125}} \Leftrightarrow z = \tan 47° \cdot \sqrt{125}$, d. h. die Höhe beträgt etwa 12 m.	4
	c	Der Abstand ist größer als 9 m. Begründung: Q ist der Fußpunkt des Lots von P auf die Gerade durch A und B. Da $Q \notin \overline{AB}$, ist der Abstand von P zu $\overline{AB}$ größer als $\lvert\overline{PQ}\rvert$.	4
			25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4					II			X	
b	2	I				I	I	X		
c	5		II			II	I		X	
d	3	III			II		III			X
2 a	3			I	I	I		X		
b	4		II	II		II			X	
c	4	II	III	II	I		III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.