

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

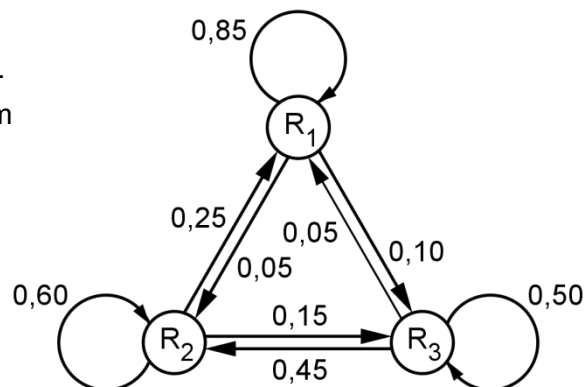
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

| Anforderungsniveau | Prüfungsteil | Sachgebiet ¹ | digitales Hilfsmittel |
|--------------------|--------------|-------------------------|-----------------------|
| erhöht | B | AG/LA (A1) | WTR |

1 Aufgabe

In einer Stadt gibt es nur drei Fastfood-Restaurants R_1 , R_2 und R_3 . Das Wechselverhalten der Kunden von einem Monat zum nächsten lässt sich modellhaft durch das abgebildete Diagramm beschreiben.



- a** Geben Sie zwei Aspekte an, hinsichtlich derer das Modell eine Vereinfachung gegenüber der Realität darstellt.

Die Entwicklung der Anteile der Kunden von einem Monat n zum nächsten kann im Modell durch eine Matrix M und die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$ beschrieben werden. Dabei

haben die Vektoren \vec{v}_n die Form $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$, wobei r_1 den Anteil der Kunden von R_1 , r_2 den Anteil der Kunden von R_2 und r_3 den Anteil der Kunden von R_3 bezeichnet.

- b** In einem Monat hat das Restaurant R_1 einen Kundenanteil von 50 %, R_2 einen Kundenanteil von 20 % und R_3 einen Kundenanteil von 30 %. Berechnen Sie die Anteile

BE

2

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

der Kunden im darauffolgenden Monat.

- c** Angenommen, R_2 hätte in einem Monat einen Kundenanteil von 10 %. Ermitteln Sie, wie groß der Kundenanteil von R_3 in diesem Monat sein müsste, damit die Kundenanteile der drei Restaurants im folgenden Monat übereinstimmen. 4

- d** Für die Matrix $L = s \cdot \begin{pmatrix} 93 & -47 & 33 \\ 8 & 168 & -152 \\ -21 & -41 & 199 \end{pmatrix}$ gilt $M \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie die 3

Bedeutung von L im Sachzusammenhang und bestimmen Sie den Wert von s .

- e** Die Lösungen der Gleichung $M \cdot \overline{v}_n = \overline{v}_n$ haben die Form $t \cdot \begin{pmatrix} 265 \\ 140 \\ 95 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Kundenanteil von R_3 , der sich auf der Grundlage des Modells langfristig 2

ergeben würde.

Das Restaurant R_3 schließt zum Ende eines Monats dauerhaft. Von diesem Monat zum nächsten kann das Wechselverhalten der Kunden im Modell mithilfe der Matrix

$N = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,34 & 0,4 \\ 0,1 & 0,66 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Dabei soll davon ausgegangen werden,

dass diejenigen Kunden von R_1 und R_2 , die zum nächsten Monat nicht zu R_3 gewechselt wären, durch die Schließung in ihrem Wechselverhalten nicht beeinflusst werden.

- f** Begründen Sie, dass aus der Verteilung im Monat nach der Schließung mithilfe des Modells nicht auf die Verteilung der Kunden unmittelbar vor der Schließung geschlossen werden kann. 3

- g** Einige Kunden von R_2 wären zum nächsten Monat zu R_3 gewechselt. Ermitteln Sie denjenigen Anteil dieser Kunden, der nun bei R_2 verbleibt. 3

- h** Auch in den Monaten nach der Schließung von R_3 gibt es stets Kunden beider verbliebenen Restaurants, die von einem Monat zum nächsten das Restaurant wechseln. Dieses Wechselverhalten kann – analog zum Modell für die Entwicklung der Anteile der Kunden vor der Schließung von R_3 – mithilfe einer Matrix beschrieben werden. In einem Monat hat R_2 einen Kundenanteil von 40 %, im folgenden Monat hat dieses Restaurant nur noch halb so viele Kunden wie R_1 . Ermitteln Sie alle passenden Matrizen. 5

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

| | BE |
|---|----|
| a Das Modell geht davon aus, dass das Wechselverhalten der Kunden konstant bleibt und Wechsel von einem Restaurant zu einem anderen nur von einem Monat zum nächsten stattfinden. | 2 |
| b $M \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,25 & 0,05 \\ 0,05 & 0,60 & 0,45 \\ 0,10 & 0,15 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 \\ 0,28 \\ 0,23 \end{pmatrix}$ | 3 |
| c $0,85 \cdot \left(\frac{9}{10} - r_3\right) + 0,25 \cdot \frac{1}{10} + 0,05r_3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,8r_3 = \frac{1}{3} - 0,85 \cdot \frac{9}{10} - 0,25 \cdot \frac{1}{10} \Leftrightarrow r_3 \approx 57\%$ | 4 |
| d Mithilfe von L lassen sich im Modell ausgehend von den Kundenanteilen in einem Monat die Kundenanteile im vorhergehenden Monat bestimmen. $s \cdot (93 + 8 - 21) = 1 \Leftrightarrow s = \frac{1}{80}$ | 3 |
| e $\frac{95}{265+140+95} = 19\%$ | 2 |
| f Bezeichnet man die Anteile der Kunden von R_1 und R_2 im Monat nach der Schließung mit a bzw. b, so kann über die Anteile der Kunden der drei Restaurants im Monat vor der Schließung nur ausgesagt werden, dass sie die folgenden Gleichungen erfüllen: $\text{I } 0,9r_1 + 0,34r_2 + 0,4r_3 = a \qquad \text{II } 0,1r_1 + 0,66r_2 + 0,6r_3 = b$ Diese beiden Gleichungen enthalten drei Unbekannte und sind damit nicht eindeutig lösbar. | 3 |
| g $\frac{0,66-0,60}{0,15} = 40\%$ | 3 |
| h Passende Matrizen haben die Form $\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$ mit $0 \leq a < 1$ und $0 \leq b < 1$. $\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem: $\text{I } \frac{3}{5}a + \frac{2}{5} \cdot (1-b) = \frac{2}{3} \qquad \text{II } \frac{3}{5} \cdot (1-a) + \frac{2}{5}b = \frac{1}{3}$ Da die Gleichungen I und II äquivalent sind, hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Aus I ergibt sich für $b=0$ $\frac{3}{5}a + \frac{2}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{4}{9}$ und für $a=1$ $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{5}{6}$. Damit gilt für die Lösungen $\frac{4}{9} < a < 1$ und $\frac{3}{5}a + \frac{2}{5} \cdot (1-b) = \frac{2}{3}$. | 5 |
| | 25 |

3 Standardbezug

| Teilaufgabe | BE | allgemeine mathematische Kompetenzen | | | | | | Anforderungsbereich | | |
|-------------|----|--------------------------------------|-----|-----|----|----|----|---------------------|----|-----|
| | | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | K6 | I | II | III |
| a | 2 | | | II | | | I | | X | |
| b | 3 | | | I | I | I | | X | | |
| c | 4 | | II | II | | II | | | X | |
| d | 3 | | | I | I | I | I | X | | |
| e | 2 | | II | II | | I | | | X | |
| f | 3 | II | | II | | I | | | X | |
| g | 3 | | III | II | II | I | | | | X |
| h | 5 | III | III | III | | II | | | | X |

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.