

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	CAS

### 1 Aufgabe

1 Seit mehreren Jahren werden Bienenvölker in Europa von Milben bedroht. In einer bestimmten Region werden jeweils am Ende der Winterruhe alle Völker kontrolliert, um festzustellen, wie viele gesund, wie viele mit Milben befallen und wie viele seit dem ersten Milbenbefall insgesamt verendet sind. Die Zusammensetzungen der Po-

population der Bienenvölker können durch Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} g \\ b \\ v \end{pmatrix}$  dargestellt werden,

wobei  $g$  die Anzahl der gesunden,  $b$  die Anzahl der befallenen und  $v$  die Anzahl der verendeten Völker bezeichnet. Die Entwicklung der Zusammensetzung der Population von einem Jahr  $n$  zum nächsten kann modellhaft durch die Gleichung  $\vec{x}_{n+1} = M \cdot \vec{x}_n$

mit  $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$  beschrieben werden.

**a** Stellen Sie die Entwicklung in einem Übergangdiagramm dar.

**b** Beschreiben Sie die Bedeutung der Einträge in der zweiten Spalte von  $M$  im Sachzusammenhang. Begründen Sie, dass die Population gemäß dem Modell langfristig aussterben würde.

Im Jahr 2005 wurde festgestellt, dass 8760 Völker gesund, 1320 mit Milben befallen und seit dem ersten Milbenbefall insgesamt 4920 verendet sind.

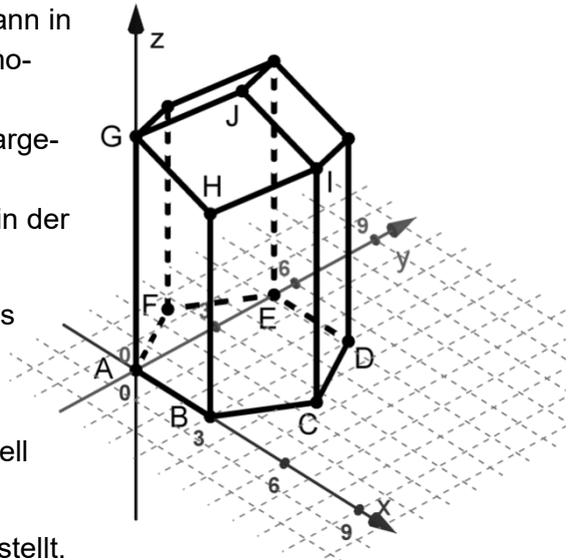
BE

3

3

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),  
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

<p><b>c</b> Ermitteln Sie das Jahr, in dem zum ersten Mal ein Milbenbefall festgestellt wurde sowie die Anzahl der Völker, die es ein Jahr vor der Feststellung des ersten Milbenbefalls gab.</p>	3
<p><b>d</b> Um ein Aussterben der Population zu verhindern, wurden in den Jahren 2005 und 2006 jeweils unmittelbar nach dem Zeitpunkt, zu dem alle Völker kontrolliert wurden, halb so viele gesunde Bienenvölker ergänzt, wie im vorangegangenen Jahr verwendet waren. Bestimmen Sie die Anzahl der Völker, die in den Jahren 2005 und 2006 insgesamt ergänzt wurden.</p>	7
<p><b>2</b> Eine Seite einer Zelle einer Bienenwabe kann in der <math>xy</math>-Ebene eines Koordinatensystems modellhaft durch das regelmäßige Sechseck <math>ABCDEF</math> mit <math>A(0 0 0)</math> und <math>B(3 0 0)</math> dargestellt werden (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Millimeter in der Realität.</p>	5
<p><b>a</b> Begründen Sie, dass die Innenwinkel des Sechsecks <math>120^\circ</math> groß sind. Bestimmen Sie die Koordinaten von <math>D</math>.</p>	4
<p><b>b</b> Eine andere Seite der Zelle wird im Modell durch die Raute <math>GHIJ</math> mit <math>G(0 0 8)</math>, <math>H(3 0 8 - \frac{3\sqrt{2}}{4})</math> und <math>I(\frac{9}{2} \frac{3\sqrt{3}}{2} 8)</math> dargestellt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Seite der Zelle.</p>	25



## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a		3
b	<p>Die Einträge in der zweiten Spalte sind die Anteile der befallenen Völker, die von einem Jahr zum nächsten gesund werden, befallen bleiben bzw. verenden. Da im Modell gesunde und befallene Völker verenden, die umgekehrten Übergänge aber nicht auftreten, würde die Population aussterben.</p>	3

c	$M^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 8760 \\ 1320 \\ 4920 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d. h. im Jahr 2003 wurde zum ersten Mal ein Milbenbefall festgestellt. Ein Jahr vorher gab es 15000 Völker.	3
d	$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8760 \\ 1320 \\ 4920 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 3300 \end{pmatrix}$ , d. h. im Jahr 2004 verendeten $4920 - 3300 = 1620$ Völker. Anzahl der im Jahr 2005 ergänzten Völker: $0,5 \cdot 1620 = 810$ Anzahl der im Jahr 2006 ergänzten Völker: $0,5 \cdot (0,1 \cdot (8760 + 810) + 0,4 \cdot 1320) \approx 743$ Die Gesamtzahl der ergänzten Völker beträgt etwa $810 + 743 = 1553$ .	7
2 a	Ein regelmäßiges Sechseck lässt sich in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen, deren Innenwinkel $60^\circ$ groß sind. Die Größe der Innenwinkel des Sechsecks ergibt sich jeweils als Summe der Größe zweier Innenwinkel zweier Dreiecke. Mit $ \overline{BD}  = \sqrt{ \overline{AD} ^2 -  \overline{AB} ^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ergibt sich für die Koordinaten von D $x = 3$ , $y = 3\sqrt{3}$ und $z = 0$ .	5
b	$\overline{OJ} = \overline{OG} + \overline{HI} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 8 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2} \cdot  \overline{GI}  \cdot  \overline{HJ}  = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \approx 9,5$ , d. h. der Flächeninhalt beträgt etwa $9,5 \text{ mm}^2$ .	4
	25	

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				I	I		X		
b	3	I		I	I		I	X		
c	3		II	II		I			X	
d	7	III	III	III		II	II			X
2 a	5	II	II		I	II			X	
b	4		II	I	I	I			X	

## 4 Bewertungshinweise

---

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

---

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.