

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	WTR

1 Aufgabe

Bevor ein Australischer Marienkäfer das Stadium eines ausgewachsenen Käfers erreicht, durchläuft er nacheinander die Stadien Ei, Larve und Puppe. Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Marienkäfern in einem großen Gewächshaus, in dem die Larven und ausgewachsenen Käfer als natürlicher Pflanzenschutz gegen Schmierläuse wirken.

Die Zusammensetzungen der Population werden durch Vektoren \vec{v}_n der Form

$$\begin{pmatrix} E \\ L \\ P \\ K \end{pmatrix}$$

dargestellt, wobei E die Anzahl der Eier, L die Anzahl der Larven, P die Anzahl der Puppen und K die Anzahl der ausgewachsenen Käfer bezeichnet.

1 Die Entwicklung der Population vom Morgen eines Tages n zum Morgen des nächsten Tages lässt sich modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 4 \\ 0,1 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \text{ beschreiben.}$$

a Stellen Sie die durch die Matrix M beschriebene Entwicklung in einem Übergangsdiagramm dar.

BE

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Es gibt genau dann eine Zusammensetzung der Population mit mindestens einem ausgewachsenen Käfer, die sich vom Morgen eines Tages bis zum Morgen des nächsten Tages nicht verändert, wenn das folgende Gleichungssystem eine Lösung mit $K \geq 1$ hat:

$$\text{I } 0,4E = 4K \qquad \text{II } E = 2L \qquad \text{III } L = 3P \qquad \text{IV } P = K$$

b Leiten Sie die Gleichung III her.

c Entscheiden Sie, ob es eine Zusammensetzung der Population mit mindestens einem ausgewachsenen Käfer gibt, die sich vom Morgen eines Tages bis zum Morgen des nächsten Tages nicht verändert. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

An einem Montagmorgen besteht die Population aus 1850 Eiern, 800 Larven, 250 Puppen und 200 ausgewachsenen Käfern. Da dennoch zahlreiche Pflanzen von Schmierläusen befallen sind, werden an diesem Morgen zusätzliche 50 Larven und 30 ausgewachsene Käfer im Gewächshaus ausgebracht.

d Berechnen Sie für den folgenden Dienstagmorgen die Anzahlen der Eier, Larven, Puppen und Käfer.

e Am Dienstagmorgen werden weitere 50 Larven und 30 ausgewachsene Käfer ausgebracht. Begründen Sie, dass die Zusammensetzung der Population am folgenden Mittwochmorgen nicht durch den Term

$$M \cdot M \cdot \left(\begin{pmatrix} 1850 \\ 800 \\ 250 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right)$$

dargestellt wird. Ändern Sie den vorgegebenen Term so, dass er die Zusammensetzung an diesem Mittwochmorgen angibt.

2 Je geringer die Temperatur im Gewächshaus ist, desto weniger Eier werden gelegt und desto geringer sind die Anteile der Eier, Larven und Puppen, die vom Morgen eines Tages zum Morgen des nächsten Tages in das jeweils nächste Stadium übergehen. Ist die Temperatur geringer als für das in Aufgabe 1 verwendete Modell angenommen, so kann die Entwicklung der Population vom Morgen eines Tages n zum Morgen des nächsten Tages durch die Gleichung $N \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$ mit

$$N = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 4 - \frac{1}{t} \\ 0,1 - 0,9t^2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 - 0,1t^2 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 - 0,9t^2 & 0,9 \end{pmatrix} \text{ beschrieben werden. Dabei ist } t \text{ ein}$$

von der Temperatur abhängiger Parameter mit positiven Werten.

a Begründen Sie, dass bezogen auf die gesamte Entwicklung der Population der größte sinnvolle Definitionsbereich für t durch $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$ angegeben wird.

b An einem Morgen setzt sich die Population aus 1700 Eiern, 1380 Larven, 690 Puppen und 510 ausgewachsenen Käfern zusammen. Am folgenden Morgen enthält die Population nur noch 1360 Eier. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von t .

- c An einem anderen Morgen gehören zur Population 316 Puppen und 373 ausgewachsene Käfer. Ermitteln Sie alle Anzahlen der ausgewachsenen Käfer, die abhängig von der Temperatur am folgenden Morgen auftreten können.

3

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a		3
b	<p>Es gibt genau dann eine solche Zusammensetzung der Population, wenn die Gleichung $M \cdot \begin{pmatrix} E \\ L \\ P \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ L \\ P \\ K \end{pmatrix}$ eine Lösung mit $K \geq 1$ hat. Die dritte Zeile von M liefert $0,1L + 0,7P = P \Leftrightarrow L = 3P$.</p>	3
c	<p>Gleichung I liefert $E = 10K$. Aus den Gleichungen II, III und IV ergibt sich $E = 2 \cdot (3K) = 6K$. Damit gilt $K = 0$, d. h. es gibt keine solche Zusammensetzung.</p>	3
d	$\begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 4 \\ 0,1 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1850 \\ 850 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2030 \\ 865 \\ 260 \\ 232 \end{pmatrix}$	2
e	<p>Der vorgegebene Term berücksichtigt nur das Ausbringen zusätzlicher Larven und Käfer am Montagmorgen.</p> $M \cdot \left(M \cdot \begin{pmatrix} 1850 \\ 800 \\ 250 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right)$	3
2 a	<p>Es muss gelten:</p> <ul style="list-style-type: none"> ♦ $0 \leq 4 - \frac{1}{t} < 4 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{4}$ ♦ $0 \leq 0,1 - 0,9t^2 < 0,1 \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{1}{3}$ 	5

	<p>♦ $0 \leq 0,1 - 0,1t^2 < 0,1 \Leftrightarrow 0 < t \leq 1$</p> <p>Damit: $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{3}$</p>	
b	$0,6 \cdot 1700 + \left(4 - \frac{1}{t}\right) \cdot 510 = 1360 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{t} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = \frac{3}{10}$	3
c	<p>Für die Anzahl der ausgewachsenen Käfer am folgenden Morgen gilt:</p> $(0,1 - 0,9t^2) \cdot 316 + 0,9 \cdot 373$ <p>Da die Werte des Terms $0,1 - 0,9t^2$ für $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{3}$ mit zunehmendem Wert von t kleiner werden, ergibt sich aus den Grenzen dieses Intervalls, dass die Anzahl mindestens 336 und höchstens 349 beträgt.</p>	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I	I		I	X		
b	3	II			II	II			X	
c	3	II	I			II			X	
d	2			I		I	I	X		
e	3	II		II	II				X	
2 a	5	III		III			II			X
b	3		II	II		II			X	
c	3		III	II		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.