Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}\cdot\left(x^3-15x^2+50x\right)$.

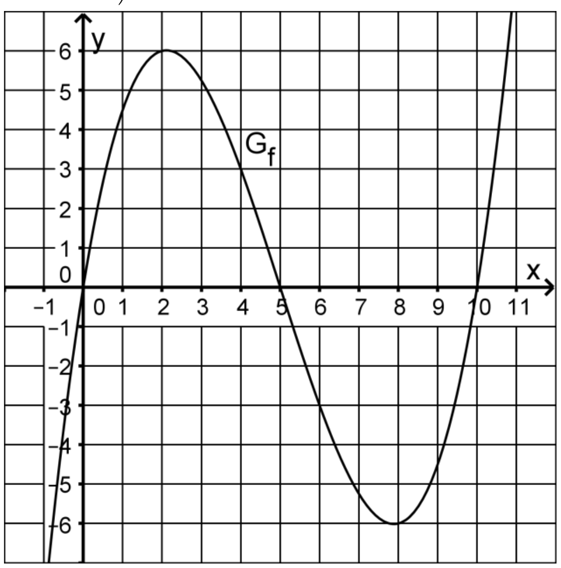


Abb. 1

a Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5\,|\,0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W. — 6

b G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{8}\cdot\left(x^3-25x\right)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Geben Sie an, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist. — 4

c Betrachtet wird das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(4|0)$ und $C(4|f(4))$. Rotiert dieses Dreieck um seine Seite $\overline{AB}$, so entsteht ein Körper. Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche dieses Körpers. 4

d Berechnen Sie $\int_0^5 f(x)\,dx$. 3

e Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_0^8 f(x)\,dx < \int_0^5 f(x)\,dx$ gilt. 3

f Betrachtet wird eine in IR definierte Funktion h. Abbildung 2 stellt $h(x)-f(x)$ in Abhängigkeit von x dar. 4

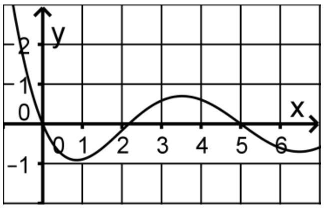


Abb. 2

Beschreiben Sie für $x \in [0;5]$ die gegenseitige Lage der Graphen von f und h. Gehen Sie dabei – für den genannten Bereich – auf die Bedeutung der Schnittpunkte des abgebildeten Graphen mit der x-Achse und auf die Bedeutung der x-Koordinate des Tiefpunkts dieses Graphen ein.

2 Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K: x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Abbildung 3 zeigt den Graphen von K.

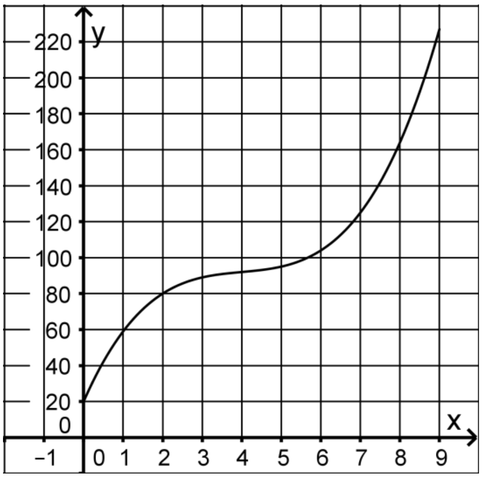


Abb. 3

a Geben Sie mithilfe von Abbildung 3 die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen. 1

b Geben Sie das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang. 2

c Beurteilen Sie die folgende Aussage: 2

Je größer die Produktionsmenge ist, desto höher sind die Kosten, die die Produktion eines zusätzlichen Kubikmeters der Flüssigkeit verursacht.

Die Funktion E mit $E(x)=23x$ gibt für $0 \le x \le 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x)=E(x)-K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

d Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden. 2

e Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 3 ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt. 4

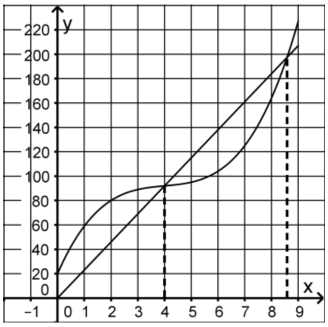
f Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt. 5

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f'(x)=\frac{1}{8}\cdot\left(3x^2-30x+50\right)$, $f''(x)=\frac{1}{8}\cdot(6x-30)$, $f'''(x)=\frac{3}{4}$ $f(5)=0$, $f''(5)=0$, $f'''(5)\neq 0$ $f'(5)=-\frac{25}{8}$, $0=-\frac{25}{8}\cdot 5+t \Leftrightarrow t=\frac{125}{8}$, d. h. $y=-\frac{25}{8}x+\frac{125}{8}$	6
	b	Der Graph von g muss um 5 in positive x-Richtung verschoben werden. Da der Term von g nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten enthält, ist der Graph von g symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, G_f also symmetrisch bezüglich des Punkts $W(5\,\vert\,0)$.	4
	c	$f(4)^2\cdot\pi+f(4)\cdot\pi\cdot\sqrt{f(4)^2+4^2}=24\pi$	4
	d	$\int_0^5 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{32}x^4-\frac{5}{8}x^3+\frac{25}{8}x^2\right]_0^5=\frac{625}{32}$	3
	e	$\int_0^8 f(x)\,dx=\int_0^5 f(x)\,dx+\int_5^8 f(x)\,dx$ Da das Flächenstück, das G_f mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=5$ und $x=8$ einschließt, unterhalb der x-Achse liegt, gilt $\int_5^8 f(x)\,dx<0$.	3

	f	Der abgebildete Graph schneidet die x-Achse bei $x=0$, $x_S \approx 2{,}2$ und $x=5$. Für diese x-Werte haben die Graphen von f und h gemeinsame Punkte. Für $0<x<x_S$ verläuft der Graph von f oberhalb des Graphen von h, für $x_S<x<5$ unterhalb. Unter allen Paaren in der x-Koordinate übereinstimmender Punkte der Graphen von f und g haben die beiden Punkte mit der x-Koordinate des Tiefpunkts den größten Abstand.	4
2	**a**	Die Produktionsmenge beträgt etwa $7\,\mathrm{m}^3$.	1
	b	K ist streng monoton wachsend, d. h. mit zunehmender Produktionsmenge nehmen die Kosten zu.	2
	c	Die Aussage ist falsch. Begründung: $K(3)-K(2)<K(2)-K(1)$	2
	d	$E(4)-K(4)=92-92=0$	2
	e	 Das Unternehmen erzielt nur für $4<x<x_s$ mit $x_s \approx 8{,}6$ einen Gewinn.	4
	f	$G(x)=-x^3+12x^2-27x-20$, $G'(x)=-3x^2+24x-27$ Für $4<x<x_s$ mit $x_s \approx 8{,}6$ gilt: $G'(x)=0 \Leftrightarrow x=4+\sqrt{7}\approx 6{,}6$ Es müssen etwa 6,6 Kubikmeter verkauft werden.	5
			40

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	6	X	X	X	X			I			I		X		
b	4		X	X	X		II	II		II				X	
c	4		X	X	X			III			I	II			X
d	3				X						I		X		
e	3		X	X	X		II				II			X	
f	4			X	X		II			III		II			X
2 a	1	X			X				I	I			X		
b	2				X				I	I		I	X		

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

c	2		X		X		II			III		III			X
d	2				X				I		I		X		
e	4	X		X	X				II	II		II		X	
f	5	X			X				II		II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.