Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{15}{2}x$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$.	
1 Ein Ballon schwebt zu Beobachtungsbeginn in einer Höhe von 50 m. In den folgenden fünf Minuten lässt sich seine Geschwindigkeit in vertikaler Richtung modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung in 10 Meter pro Minute.	
a Skizzieren Sie die Geschwindigkeit des Ballons in vertikaler Richtung in Abhängigkeit von der Zeit. Markieren Sie den Zeitraum, in dem diese Geschwindigkeit größer als 30 Meter pro Minute ist.	3
b Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ballon ungefähr zum Zeitpunkt 1,2 Minuten nach Beobachtungsbeginn am schnellsten steigt und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem er am schnellsten sinkt. Geben Sie für jeden der beiden Zeitpunkte die zugehörige Geschwindigkeit in vertikaler Richtung an.	4
c Für eine der Nullstellen von f gilt $0 < x < 5$. Beschreiben Sie deren Bedeutung hinsichtlich der Höhe des Ballons.	2
d Entscheiden Sie, ob die Höhe des Ballons fünf Minuten nach Beobachtungsbeginn größer ist als die Höhe zu Beobachtungsbeginn, und begründen Sie Ihre Entscheidung mithilfe der Skizze zu Teilaufgabe 1 a.	3

e Begründen Sie, dass der Term $10 \cdot \int_0^x f(z)\,dz + 50$ für $0 \le x \le 5$ die Höhe des Ballons in Metern in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Gehen Sie dabei auch auf die Bedeutung der Zahlen 10 und 50 ein. 4

f Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Ballon erstmalig seit Beobachtungsbeginn eine Höhe von 120 m erreicht. 3

2 Für jede reelle Zahl u mit $0 < u < 3$ wird das rechtwinklige Dreieck OPQ betrachtet. Für dessen Eckpunkte gilt:

- O ist der Koordinatenursprung.
- P hat die x-Koordinate u und liegt auf der x-Achse.
- Q hat die x-Koordinate u und liegt auf dem Graphen der gegebenen Funktion f.

a Bestimmen Sie für $u = 2$ die Längen der Seiten des zugehörigen Dreiecks OPQ. 3

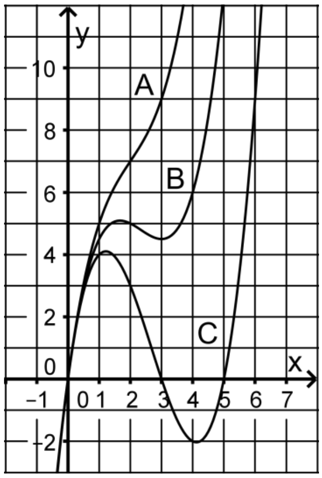
Rotiert eines der Dreiecke OPQ um seine Seite $\overline{OP}$, so entsteht ein Körper.

b Begründen Sie, dass sich das Volumen des Körpers mit dem Term $\frac{1}{3}\pi \cdot (f(u))^2 \cdot u$ berechnen lässt. 3

c Bestimmen Sie denjenigen Wert von u, für den das Volumen des Körpers maximal ist. 4

3 Für jede reelle Zahl a wird die in IR definierte Funktion $f_a : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - a \cdot x^2 + \frac{15}{2}x$ betrachtet.

a Die abgebildeten Graphen A, B und C gehören jeweils zu einem der Werte $a = 3$, $a = 3{,}5$ und $a = 4$. Ordnen Sie jedem dieser Werte den zugehörigen Graphen zu. 2



b Untersuchen Sie für $a \ge 0$ in Abhängigkeit von a den Graphen von f_a auf die Anzahl der Punkte, in denen die jeweilige Tangente an den Graphen parallel zur x-Achse verläuft. 7

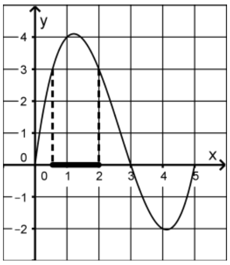
Der Graph von f_a für $a = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ zeichnet sich gegenüber den Graphen für alle anderen Werte von a durch einen besonderen Verlauf aus. Beschreiben Sie die Besonderheit dieses Verlaufs.

c Beschreiben Sie, wie der Graph von f_{-a} aus dem Graphen von f_a hervorgeht. 2

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**		3
	b	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\cdot\left(8-\sqrt{19}\right) \vee x=\frac{1}{3}\cdot\left(8+\sqrt{19}\right)$ In Verbindung mit dem Graphen von f ergibt sich, dass der Ballon nach etwa 1,2 Minuten mit etwa $41\frac{\text{m}}{\text{min}}$ am schnellsten steigt und nach etwa 4,1 Minuten mit etwa $20\frac{\text{m}}{\text{min}}$ am schnellsten sinkt.	4
	c	Zum entsprechenden Zeitpunkt erreicht der Ballon seine größte Höhe.	2
	d	Für $0 \le x \le 5$ schließen der Graph von f und die x-Achse oberhalb der x-Achse eine Fläche größeren Inhalts ein als unterhalb. Damit ist die Höhe des Ballons fünf Minuten nach Beobachtungsbeginn größer ist als die Höhe zu Beobachtungsbeginn.	3
	e	Da f die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung beschreibt, gibt $\int_0^x f(z)\,dz$ in Abhängigkeit von der Zeit die Änderung der Höhe des Ballons in 10 m an. Damit ist $10\cdot\int_0^x f(z)\,dz$ die Änderung der Höhe in m. Der Summand 50 berücksichtigt die Höhe des Ballons zu Beobachtungsbeginn.	4
	f	Für $0 \le x \le 5$ liefert $10\cdot\int_0^x f(z)\,dz+50=120$: $x_1 \approx 2{,}2$ und $x_2 \approx 3{,}8$ Der Ballon erreicht die angegebene Höhe erstmalig nach etwa 2,2 Minuten.	3
2	**a**	$\overline{OP}=2$, $\overline{PQ}=f(2)=3$, $\overline{OQ}=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2}=\sqrt{13}$	3
	b	Der Körper ist ein Kegel mit der Höhe u, dessen Grundfläche den Radius $f(u)$ hat.	3
	c	Betrachtet man die Funktion V mit $V(u)=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(f(u)\right)^2\cdot u$, so zeigt der Graph von V für $0<u<3$ bei $u \approx 1{,}5$ einen Punkt mit maximaler y-Koordinate.	4
3	**a**	$a=3$: A; $a=3{,}5$: B; $a=4$: C	2
	b	$f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2a-\sqrt{4a^2-45}}{3} \vee x=\frac{2a+\sqrt{4a^2-45}}{3}$, $4a^2-45=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ Für $0 \le a<\frac{3}{2}\sqrt{5}$ gibt es keine, für $a>\frac{3}{2}\sqrt{5}$ zwei Punkte, in denen die jeweilige Tangente an den Graphen von f_a parallel zur x-Achse verläuft. Für $a=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ gibt es nur einen solchen Punkt. Für $a=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ verläuft die Tangente an den Graphen von f_a in dessen Wendepunkt parallel zur x-Achse.	7

	c	Der Graph von f_{-a} geht aus dem Graphen von f_a durch eine Spiegelung am Koordinatenursprung hervor.	2
			40

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				X				I	I			X		
b	4	X			X				I		I		X		
c	2				X		II		II			I		X	
d	3		X	X	X		II		II	II				X	
e	4		X		X		II		II			II		X	
f	3	X	X		X				II		I			X	
2 a	3		X		X						I		X		
b	3		X	X	X		II			II		I		X	
c	4	X	X		X		I	I			II			X	
3 a	2			X	X		I			I			X		
b	7	X	X	X	X		II	III			III				X
c	2			X	X		III	III			II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.